

## Chapitre III

# ONDES LONGITUDINALES DANS UN SOLIDE.

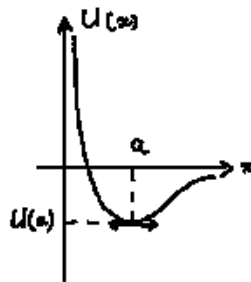
Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

*Cette multitude de têtes ondule obscurément comme les vagues d'une mer nocturne.*

V. HUGO. *William Shakespeare.*

*La propagation de phénomènes vibratoires sur de longues distances, accompagnée d'un transport énergétique, peut avoir, dans le cas de tremblements de terre ou de tsunamis, des effets dévastateurs. Après une théorie simpliste de l'élasticité, nous étudierons ici le mécanisme de propagation des vibrations.*

### III-1 Modélisation d'une liaison.



On modélise ainsi l'énergie d'une liaison : énergie  $U(x)$  minimale pour  $x = a$  (qui correspond à la longueur à l'équilibre), nulle à l'infini et infinie pour  $x$  nul (répulsion quantique à courte distance). Un développement de TAYLOR à l'ordre 2 donne :

$$U(x) = U(a) + (x - a) \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=a} + \frac{1}{2} (x - a)^2 \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=a} + \dots$$

soit compte tenu qu'on a un minimum pour  $x = a$  (donc  $\frac{dU}{dx}|_{x=a} = 0$  et  $k = \frac{d^2U}{dx^2}|_{x=a} > 0$ ) :

$$U(x) = U(a) + (1/2)k(x - a)^2 \quad \text{et} \quad F = -\frac{dU}{dx} = -k(x - a)$$

soit formellement un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $a$ .

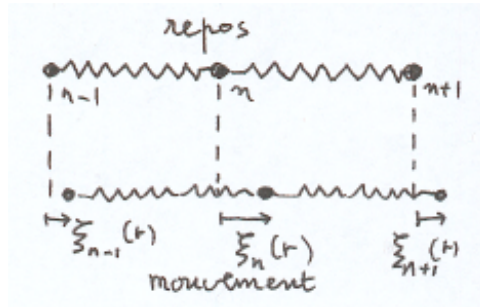
Un solide peut être ici modélisé par un réseau cubique de pas  $a$  où des atomes ponctuels de masse  $m$  sont réunis par des ressorts de raideur  $k$  et de longueur à vide  $a$

Calculons un ordre de grandeur. Les énergies de liaison molaires sont de l'ordre de quelques centaines de kJ/mol, donc les énergies de liaison  $U(a)$  (divisons par le nombre d'AVOGADRO) sont de l'ordre d'un peu moins de  $U = 10^{-18}$  J. Comme  $U(x)$  varie sur une longueur caractéristique de l'ordre de  $a$  et que  $a$  est de l'ordre de  $2 \text{ \AA}$  soit  $2 \cdot 10^{-10}$  m, la raideur  $k$  est de l'ordre de  $U(a)/a^2$  soit un peu plus de  $10 \text{ N m}^{-1}$

## III-2 Un modèle de solide unidirectionnel.

### III-2.a Modélisation et mise en équation.

Considérons une chaîne d'atomes ponctuels de masse  $m$ , alignés sur un axe  $Ox$  et séparés par des ressorts identiques de raideur  $k$  et de longueur à vide  $a$ . Chaque atome, indicé par  $n$ , donc d'abscisse au repos  $x = na$ , se déplace parallèlement à  $Ox$  de  $\xi_n(t)$ .

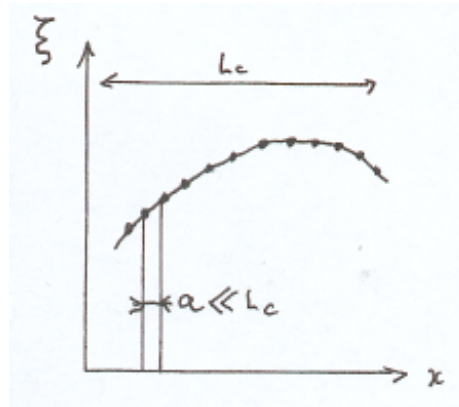


Un bilan de forces sur la masse d'indice  $n$  et l'étude des allongements des deux ressorts qui l'encadrent conduit aisément à :

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k [(\xi_{n+1} - \xi_n) - (\xi_n - \xi_{n-1})]$$

### III-2.b Passage au continu.

Si, à  $t$  donné,  $\xi_n$  varie lentement avec  $x$  sur une longueur caractéristique  $L_c$ , les points sur un graphe sont si serrés qu'on a l'illusion d'une courbe continue : on « voit » une fonction  $\tilde{\xi}(x, t)$  telle que  $\tilde{\xi}(na, t) = \xi_n(t)$ . C'est l'approximation des milieux continus. Désormais, on cesse d'écrire le tilde.



L'équation précédente devient :

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k [\xi(x+a, t) + \xi(x-a, t) - 2\xi(x, t)]$$

Un développement de TAYLOR à l'ordre 2 conduit alors à :

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k a^2 \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2}$$

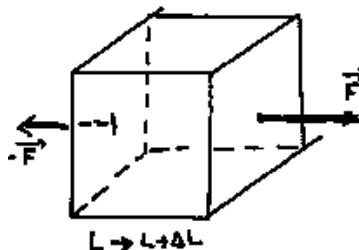
On retrouve l'équation de d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{k a^2}{m}}$$

### III-3 Une première approche de l'élasticité.

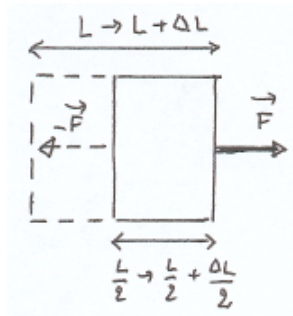
#### III-3.a Recherche d'une loi phénoménologique.

Considérons un parallélépipède solide de côté  $L$  selon  $Ox$ ,  $L'$  et  $L''$  selon  $Oy$  et  $Oz$ , donc de surface  $S = L' L''$  selon  $yOz$ . Tirons sur deux faces opposées perpendiculaires à  $Ox$  par des forces opposées (sinon le solide se mettrait en mouvement) de module  $F$  perpendiculairement aux faces choisies ; le cube s'allonge dans ce sens de  $\Delta L$ . Cherchons à réfléchir sur le lien entre  $F$  et  $\Delta L$ .

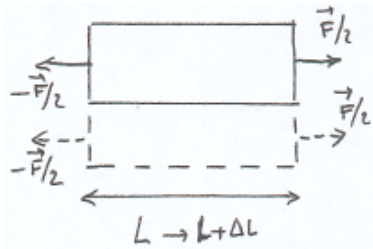


Coupons par la pensée le solide en deux moitiés égales dans la direction de  $Ox$  et étudions la moitié droite ; elle est soumise à la force  $\vec{F}$  définie ci-dessus et à une force exercée par la moitié gauche, forcément égale à  $-\vec{F}$

car on est à l'équilibre. Sa longueur et son allongement sont les moitiés de la longueur et l'allongement total, soit  $L/2$  et  $\Delta L/2$ . Donc, à force égale,  $\Delta L$  est proportionnel à  $L$ .



Coupons par la pensée le solide en deux moitiés égales, cette fois dans la direction de  $Oz$  et étudions la moitié du haut ; elle est soumise à la force  $\vec{F}/2$ , comme la moitié du bas pour que le total soit  $\vec{F}$  et cette fois, longueur et allongement restent  $L$  et  $\Delta L$ . Donc, à allongement égal, la force est proportionnelle à la surface  $S$ .



Ceci suggère une loi de la forme :

$$\frac{\Delta L}{L} = f\left(\frac{F}{S}\right)$$

avec, bien sûr,  $f(0) = 0$

La recherche d'une loi *phénoménologique* simple conduit à proposer une relation linéaire, confirmée par l'expérience si l'on ne s'approche pas trop de la limite de rupture. On introduit une constante  $E$ , caractéristique du matériau, appelée module d'YOUNG, homogène à une pression et l'on écrit :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

où  $F/S$ , homogène à une pression s'appelle contrainte et  $\Delta L/L$  l'allongement relatif, sans dimension.

N.B. Il existe d'autres types variés de déformations d'un solide qui relèvent de la théorie de l'élasticité (elle nécessite de solides connaissances en algèbre linéaire).

### III-3.b Tentative de justification.

On peut essayer de rattacher ce résultat au modèle unidirectionnel précédent. Sur la longueur  $L$ , on peut placer  $N_1 = L/a$  ressorts de longueur  $a$ , chacun est allongé de  $\Delta L/N_1 = a \Delta L/L$  et est donc soumis à une force de module  $f = k a \Delta L/L$ . Sur une face de surface  $S = L' L''$ , aboutissent  $N_2 = (L'/a)(L''/a) = S/a^2$  chaînes de ressorts ; la force totale est donc  $F = N_2 f = k S \Delta L/L a$ . On peut donc identifier le module d'YOUNG  $E$  au rapport  $k/a$ .

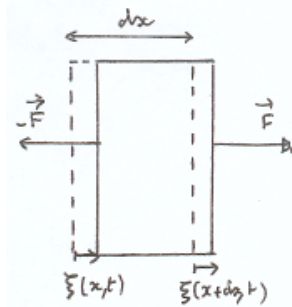
Avec  $k$  un peu supérieur à  $10 \text{ N m}^{-1}$  et  $a$  de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , on a  $E$  de l'ordre de  $10^{11} \text{ Pa} = 100 \text{ GPa}$ , ce que confirment les mesures expérimentales.

Bien sûr, la réalité est plus complexe.

## III-4 Ondes planes longitudinales.

### III-4.a Élasticité hors d'équilibre.

Considérons une «tranche» de solide d'épaisseur  $dx$ , qu'on fera tendre vers 0, de section  $S$ . Le modèle ci-dessus prévoit une force  $F = S E \Delta L/L$ , on se convainc rapidement que  $\Delta L = \xi(x+dx, t) - \xi(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$  (DL de TAYLOR) et que  $L$  est ici  $dx$ .



$$\text{Donc } F(x, t) = E S \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

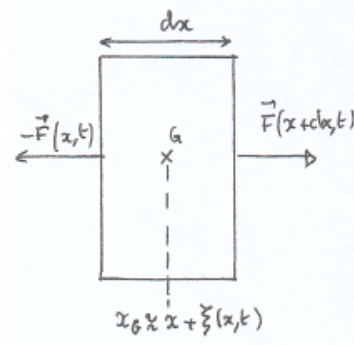
En conclusion, il faut bien comprendre que la loi  $F(x, t) = E S \frac{\partial \xi}{\partial x}$  est une équation *locale* de la loi  $F/S = E \Delta L/L$

### III-4.b Mouvements longitudinaux dans un solide.

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique à une même tranche d'épaisseur  $dx$  (avec  $a \ll dx \ll L_v$ , longueur caractéristique introduite plus haut), de section  $S$ , en tenant compte que  $F$  varie lentement avec  $x$  (sinon pas de mouvement). On notera  $\mu$  la masse volumique du solide, donc la masse de la tranche est  $dm = \mu S dx$ .

On a donc :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x+dx, t) - F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = E S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$



Après simplification on retrouve l'équation de d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Remarque : vérifions l'homogénéité  $[E] = M L^{-1} T^{-2}$  et  $[\mu] = M L^{-3}$  d'où  $[c] = L T^{-1}$  OK.

Ordre de grandeur : avec  $E$  de l'ordre de  $10^{11}$  Pa et  $\mu$  de l'ordre de  $10^4 \text{ kg.m}^{-3}$  on a  $c$  de l'ordre de  $3.10^3 \text{ m.s}^{-1}$ . L'expérience donne des vitesses de l'ordre de  $1,5 \text{ km.s}^{-1}$ .

Remarquons enfin que, puisque  $E$  s'identifie à  $k/a$  et  $\mu$  à  $m/a^3$  (évidemment ?), on retrouve  $c = \sqrt{\frac{k a^2}{m}}$ , résultat établi plus haut.

### III-5 Ondes progressives

Nous ne reprenons pas la recherche d'ondes stationnaires : on se reportera au chapitre précédent. Par contre, on s'intéressera à des phénomènes se propageant à grande distance. On peut montrer, et nous nous contenterons de le vérifier, que l'équation de d'ALEMBERT a pour solutions des fonctions de la forme  $F(x \pm ct)$  ou, ce qui revient au même,  $G(t \pm x/c)$ . Bien comprendre, mathématiquement parlant, qu'il s'agit d'une fonction *quelconque* d'une variable  $F(u)$  dans laquelle on remplace la variable  $u$  par la combinaison linéaire  $x \pm ct$ .

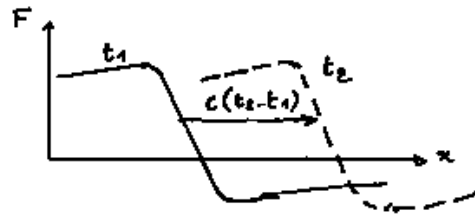
Vérifions grâce aux formules de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \cdot F'(x \pm ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1^2 \cdot F''(x \pm ct)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\pm c) F'(x \pm ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = (\pm c)^2 F''(x \pm ct)$$

La suite coule de source.

Interprétation physique : en remarquant que  $x - ct_2 = [x - c(t_2 - t_1)] - ct_1$  d'où  $F(x, t_2) = F(x - c(t_2 - t_1), t_1)$ , on voit qu'à l'instant  $t_2$ , on retrouve en tout point le phénomène qui existait en  $t_1$  à une distance  $c(t_2 - t_1)$  en arrière,



donc que la «carte» du phénomène s'est déplacée en bloc de  $c(t_2 - t_1)$  entre  $t_2$  et  $t_1$  donc à une vitesse  $c$ .

Ce type de solutions est donc logiquement appelée onde progressive et, dans ce contexte, onde plane progressive car le phénomène est invariant dans tout un plan  $x = Cte$ . Il importe de bien comprendre que la vitesse de propagation de l'onde n'a strictement rien à voir avec la vitesse des atomes, de même (pas ici certes) la direction de propagation n'est pas *a priori* celle du mouvement de la matière (penser à une corde à sauter, voire une ola dans un stade). Il arrive qu'on appelle célérité la vitesse d'une onde (distinction célérité d'une onde / vitesse de la matière).

Remarque : bien sûr,  $F(t + x/c)$  représente une onde se déplaçant à la vitesse  $c$  dans le sens des  $x$  décroissants.

Remarque : On voit apparaître une distinction entre les ondes qu'on étudie ici et les ondes progressives qu'on aurait sur une corde vibrante : par rapport à la direction de propagation, le mouvement de la matière est parallèle dans ce chapitre (ondes longitudinales) et perpendiculaire dans le précédent (ondes transversales). Dans le cas d'ondes transversales, les mouvements se font dans un plan à 2 dimensions, ce qui offre une variété de possibilités qui sera étudiée plus tard (lumière polarisée).

## III-6 Ondes planes progressives sinusoïdales

### III-6.a Terminologie.

On dit aussi, à la place de sinusoïdales, harmoniques ou, dans le cas de la lumière, monochromatiques.

Il s'agit du cas particulier où  $F$  est sinusoïdale. Rien de particulier sauf une terminologie à maîtriser. On note de façon brute  $F(t - x/c) = F_m \cos[\omega(t - x/c) + \varphi]$  avec  $F_m$  l'amplitude (on ajoute souvent réelle, cf *infra*),  $\omega$ , la pulsation,  $\omega(t - x/c) + \varphi$ , la phase et  $\varphi$  la phase à l'origine (mieux, aux origines).

On symétrise le rôle de  $x$  et de  $t$  en écrivant (j'allège en prenant  $\varphi$  nul) :  $F_m \cos(\omega t - kx) = F_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$  avec  $\|\vec{k}\| = k = \omega/c$  appelé vecteur d'onde.

On privilégie les fréquences temporelle (fréquence tout court) et spatiale (nombre d'onde) en écrivant :  $F_m \cos[2\pi(ft - \sigma x)]$  où  $f = \omega/(2\pi)$ ,  $\sigma = k/(2\pi)$  et  $\sigma = f/c$ .

On privilégie les périodes temporelle (période tout court) et spatiale (lon-

gueur d'onde) en écrivant :  $F_m \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)]$  où  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ ,  $\lambda = 1/\sigma = 2\pi/k$  et  $\lambda = ct$  (relation évoquée au chapitre précédent, cf onde stationnaires).

Remarque : la longueur caractéristique évoquée plus haut s'identifie ici à  $\lambda$ , donc l'approximation des milieux continus est valable si  $a \ll \lambda = cT = c/f$  avec  $c$  de l'ordre de  $10^3 \text{ms}^{-1}$  et  $a$  de l'ordre de  $10^{-10} \text{m}$ , il suffit d'avoir  $f \ll 10^{13} \text{Hz}$  soit  $f \leq 10^{11} \text{Hz} = 100 \text{GHz}$ , bref, c'est largement le cas, sauf conditions exceptionnelles.

Notation complexe : On note souvent  $F = \text{Re}(\underline{F})$  avec  $\underline{F} = F_m \exp(j(\omega t - kx) + \varphi)$  ou mieux  $\underline{F}_m \exp(j(\omega t - kx))$  où  $\underline{F}_m = F_m \exp(j\varphi)$  est l'amplitude complexe; on remarquera que l'amplitude réelle et la phase à l'origine sont le module et l'argument de l'amplitude complexe. Formellement, en amplitude complexe,  $\partial/\partial t$  et  $\partial/\partial x$  peuvent être remplacés par  $j\omega$  et  $jk$  (attention, uniquement pour une onde progressive plane sinusoïdale).

Remarque : La formule de trigonométrie  $\cos(\omega t) \cos(kx) = (1/2) \cos(\omega t - kx) + (1/2) \cos(\omega t + kx)$  prouve le lien entre onde stationnaire et onde progressive : la première est somme de deux progressives de sens contraires.

### III-6.b Complément : la transformation de Fourier.

Pour un physicien, c'est une façon de considérer que toute fonction, quelle qu'elle soit, est somme de sinusoïdes, en gros, que l'ensemble des fonctions sinusoïdales est une base de l'ensemble des fonctions, même si cette façon de dire les choses ferait hurler un matheux. Ceci qui justifie le grand cas que l'on fait des fonctions sinusoïdales en physique. En notation complexe  $f(t)$  est somme de sinusoïdes de pulsations  $\omega$  et d'amplitudes complexes  $\tilde{f}(\omega)$ ;  $\omega$  variant continûment, on note :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

et l'on montre que  $\tilde{f}(\omega)$  se calcule par :

$$\tilde{f}(\omega) = Cte \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

où la valeur de la constante ne nous intéresse pas. Le théorème de PARSEVAL et son interprétation énergétique se généralise en :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$|\tilde{f}(\omega)|^2$  est appelée densité spectrale d'énergie. Le matheux appelle  $\tilde{f}(\omega)$  transformée de FOURIER de  $f(t)$  et le physicien spectre de  $f(t)$ . Bien sûr, on peut remplacer  $t$  par  $t \pm x/c$ .

### III-7 Complément : étude énergétique

C'est, vis-à-vis de ce chapitre, un léger débordement du programme, mais on introduit ici un mode de pensée au programme qui sera développé ultérieurement.



La tranche de section  $S$  de largeur  $dx$  a une énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} \mu S dx (\partial \xi / \partial t)^2$$

en divisant par le volume  $S dx$  et pour  $\xi = \xi_m \cos(\omega(t - x/c))$ , on en déduit une énergie cinétique volumique :

$$K_{vol} = \frac{1}{2} \mu \xi_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega(t - x/c))$$

La loi de force écrite formellement  $F = (E S / \partial x) \partial \xi$ , par analogie avec un ressort suggère une énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} (E S / \partial x) (\partial \xi)^2$$

d'où, en divisant par le volume  $S dx$  une énergie potentielle volumique :

$$U_{vol} = \frac{1}{2} E (\partial \xi / \partial x)^2 = (1/2) E \xi_m^2 (\omega/c)^2 \sin^2(\omega(t - x/c))$$

avec le lien entre  $E$ ,  $\mu$  et  $c$ , on remarque que  $K_{vol} = U_{vol}$ , ce qui s'avérera très fréquent ; l'énergie mécanique volumique est donc :

$$u(x, t) = \frac{E}{c^2} \xi_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega(t - x/c))$$

Physiquement donc, là où passe une onde, l'espace est rempli d'énergie. Plus important maintenant : là où passe une onde, une énergie est transportée. Sur une section d'aire  $S$ , la gauche exerce sur la droite la force  $-F$  ( $F$  donnée ci-dessus) et la section a une vitesse  $v = \partial \xi / \partial t$  ; il apparaît donc une puissance  $P = -F v$  et une puissance surfacique transportée :

$$\Pi(x, t) = -\frac{F v}{S} = -E \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = E \xi_m^2 \frac{\omega^2}{c} \sin^2(\omega(t - (x/c)))$$

Considérons à nouveau la tranche de section  $S$ , de largeur  $dx$  pendant une durée  $dt$ . Elle reçoit par la gauche l'énergie  $S \Pi(x, t) dt$  et perd par la droite  $S \Pi(x + dx, t) dt$ , elle gagne donc algébriquement la différence, soit, après un développement limité,  $dU = -S (\partial \Pi / \partial x) dx dt$ . A l'instant  $t + dt$ , elle contient  $u(x, t + dt) S dx$ , à l'instant  $t$ , elle contenait  $u(x, t) S dx$ , elle a donc gagné  $dU = S (\partial u / \partial x) dt dx$ . Par identification, on doit donc avoir :

$$-(\partial \Pi / \partial x) = (\partial u / \partial x)$$

relation essentielle qu'on retrouvera partout et qui est ici confirmée par un calcul élémentaire.

Remarque : on verra ultérieurement qu'on peut définir une vitesse de propagation de l'énergie par le rapport  $\Pi/u$ , cette vitesse s'identifie ici, après un calcul immédiat, avec la célérité  $c$  de l'onde.

### III-8 Exercice guidé.

Après la feuille d'exercices sur ce chapitre et le précédent, cet exercice supplémentaire introduit une problématique récurrente du programme : la réflexion et la transmission d'une onde à l'interface entre deux milieux de caractéristiques différentes, ici entre deux cordes différentes nouées.

Deux cordes de même axes  $Ox$  sont nouées en  $x = 0$  par un nœud ponctuel de masse  $m$ . La corde de gauche ( $x < 0$ ) a une masse linéique  $\mu_1$  et celle de droite ( $x > 0$ ) une masse linéique  $\mu_2$ . La tension, commune aux deux cordes, est  $T$ . Une onde progressive sinusoïdale «incidente»  $y_i(x, t) = a \exp[j\omega(t - x/c_1)]$  vient de  $-\infty$  vers le nœud. Du nœud, naissent une onde réfléchie  $y_r(x, t)$  dont l'amplitude est notée  $r \cdot a$ , se propageant vers  $-\infty$  dans la corde gauche et une onde transmise  $y_t(x, t)$  dont l'amplitude est notée  $t \cdot a$ , se propageant vers  $+\infty$  dans la corde droite.

1. Rappeler l'expression de  $c_1$  en fonction de  $\mu_1$  et  $T$ .
2. Donner les expressions de  $y_r(x, t)$  et de  $y_t(x, t)$
3. Dans la corde gauche, peut-on mesurer expérimentalement  $y_i(x, t)$  ou  $y_r(x, t)$  ?
4. Donner l'expression du déplacement  $y(x, t)$  dans la corde gauche et dans la corde droite.
5. Montrer que  $y(x, t)$  est continu en  $x = 0$  et en déduire que  $1 + r = t$
6. En introduisant l'angle  $\alpha$  défini comme dans le cours, montrer que  $\alpha$  est discontinu en  $x = 0$
7. En déduire que  $T [\alpha(0^+, t) - \alpha(0^-, t)] = -m\omega^2 y(0, t)$
8. En déduire une seconde relation entre  $r$  et  $t$
9. Calculer  $r$  et  $t$  en fonction de  $T$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $m$  et  $\omega$
10. Commenter l'expression de  $t$  en terme de filtre