

Chapitre XVII

RAPPELS D'ÉLECTRO- ET DE MAGNÉTOSTATIQUE.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

Ce chapitre ne se substitue pas à la relecture du cours de PCSI mais en rappelle brièvement les conclusions essentielles. Il ne reprend pas le cours de PCSI sur les dipôles électriques et les dipôles magnétiques qu'on n'oubliera pas de réviser par soi-même.

XVII-A ELECTROSTATIQUE.

XVII-A.1 Loi de Coulomb.

Inspiré par la théorie de la gravitation établie par NEWTON en 1687, COULOMB postule et vérifie expérimentalement¹ en 1785 la loi d'interaction entre charges électriques q au point M et q' au point M' :

$$\vec{F} = \frac{q q'}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}$$

Où \vec{u} est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MM'}$ et r la distance $\|\overrightarrow{MM'}\|$.

XVII-A.2 Champ électrique.

On peut scinder dans cette formule d'une part le facteur $\frac{q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}$ ne dépendant que de la charge q et du point M' , qu'on appelle champ créé par q en M' , et d'autre part la charge q' . On a donc : $\vec{F} = q' \vec{E}(M')$

¹avec de très grosses incertitudes à l'époque; il fallait avoir foi en la physique pour en conclure à la validité de la loi.

XVII-A.3 Champ créé par une distribution de charges.

Soit un ensemble de charges q_i placées en des points M_i . Une charge q' placée au point M' subit par additivité la force :

$$\vec{F} = q' \vec{E}(M') = q' \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_i M'}}{\|\overrightarrow{M_i M'}\|^3} \overrightarrow{M_i M'}$$

Lorsque la répartition de charges comporte beaucoup de charges très serrées, on peut en rendre compte par un modèle continu à une (répartition linéaire), deux (répartition surfacique) ou trois (répartition volumique) dimensions et l'on définit alors des densités linéiques, surfaciques ou volumiques de charges (respectivement notées λ , σ et ρ). Pour le calcul du champ électrique, la sommation se transforme en intégration. Par exemple, on aura pour une répartition volumique :

$$\vec{F} = q' \vec{E}(M') = q' \iiint \frac{\rho(M) dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\|\overrightarrow{MM'}\|^3} \overrightarrow{MM'}$$

XVII-A.4 Symétries et invariances.

Soit une répartition de charges. Imaginons que nous voulions calculer le champ électrique en un point M et qu'il existe pour les charges un plan Π de symétrie passant par M , c'est-à-dire qu'une symétrie par rapport à Π transforme la répartition de charges en elle-même. Alors on peut affirmer, par symétrie, que le champ en M est égal à son symétrique, c'est-à-dire qu'il est contenu dans le plan Π .

Et s'il existe deux plans de symétrie passant par M , alors le champ en M est contenu dans ces deux plans donc par leur droite d'intersection, ce qui donne la direction du champ.

Enfin s'il existe, passant par M , un axe Δ de symétrie de révolution, le champ est colinéaire à cet axe Δ .

Par exemple, dans le cas d'une sphère uniformément chargée, de centre O , créant un champ $\vec{E}(M)$, tout plan contenant OM est plan de symétrie pour les charges, donc le champ est à l'intersection de tous ces plans. Il en résulte que le champ en M est porté par OM ; on dit qu'il est radial. On aurait pu aussi évoquer la symétrie de révolution autour de OM .

Soit une répartition de charges. Imaginons qu'une translation d'une longueur quelconque dans une direction privilégiée transforme la répartition en elle-même. Alors le champ électrique est identique à lui-même en deux points déduits l'un de l'autre par la même translation.

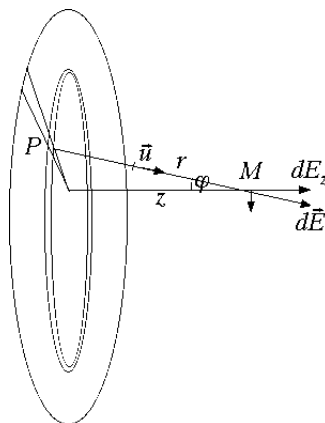
On en déduira, dans le cas d'une invariance par translation parallèle à Oz , que le champ ne dépend pas de z .

De même, si une répartition de charges est invariante par rotation d'un angle θ arbitraire autour d'un axe Oz , les composantes en coordonnées cylindriques du champ sont indépendantes de l'angle θ .

XVII-A.5 Exemple de calcul de champ électrique.

Considérons un disque de centre O , de rayon R , d'axe Oz et d'épaisseur négligeable, chargé avec une densité surfacique uniforme de charge σ . On veut calculer le champ électrique en un point M de l'axe Oz de cote z (le calcul s'avère impossible en dehors de l'axe Oz).

La symétrie de la répartition de charges par rapport aux plans xOz et yOz entraîne que le champ recherché a la direction de Oz (on aurait pu aussi évoquer la symétrie de révolution autour de Oz).



Découpons le disque en couronnes élémentaires de rayons r et $r + dr$, puis en portions de couronnes entre les angles θ et $\theta + d\theta$ autour d'un point P .

La charge élémentaire est $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$ et le champ élémentaire :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\|PM\|^2} \vec{u}$$

Seule la projection sur Oz nous intéresse car nous savons que la symétrie impose que le champ total n'a de composante ni selon Ox ni selon Oy .

Par projection, et en notant φ l'angle \widehat{OMP} , on a donc :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\|PM\|^2} \cos\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\|PM\|^2} \frac{z}{\|PM\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} z$$

On a donc :

$$E_z = \iint dE_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-(r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

soit

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Remarque : Si l'on fait tendre R vers l'infini, on trouve le champ créé par un plan. Sa valeur devient indépendante de z :

$$E_z = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

selon que z est positif ou négatif; on remarque que le champ change de signe à la traversée du plan.

Remarque critique : tous ces calculs ne sont en fait qu'une vue de l'esprit. En effet, ou bien le corps chargé est isolant et on n'a pu l'électriser qu'en surface et par frottement et on a alors aucun moyen de vérifier que la densité surfacique est uniforme, ou bien il est conducteur et les charges (on peut démontrer qu'elles restent en surface) se déplacent librement et la densité surfacique, fonction du point où l'on est, devient une inconnue du problème. Il faut dans ce cas se doter de théorèmes spécifiques qui sont au-delà du programme.

La seule façon de donner du sens physique à ce qui précède est l'adaptation de la méthode au calcul des champs de gravitation. En effet la loi de Coulomb et la loi de gravitation universelle sont analogues.

XVII-A.6 Potentiel électrique.

Le champ électrique créé par une charge q en un point O est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

En utilisant les formules donnant le gradient d'une fonction scalaire en coordonnées sphériques, on peut aussi écrire :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right)$$

Par sommation, un ensemble de charges q_i en des points P_i donne :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) \quad \text{avec} \quad V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|P_i M\|}$$

$V(M)$ s'appelle le potentiel électrique au point M

XVII-A.7 Exemple de calcul de potentiel électrique.

Soit un disque horizontal de centre O , de rayon R , dans le plan Oxy , chargé avec une densité surfacique uniforme de charge, notée σ . Soit un point M de l'axe à une cote z du plan. On découpe le plan en couronnes élémentaires de centre O , de rayons r et $r + dr$, puis en portions de couronne entre les angles θ et $\theta + d\theta$.

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on a :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right)$$

On retrouve bien sûr le champ calculé précédemment par $\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$

Attention à ne pas dire que $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = 0$ car on ne connaît que $V(0, 0, z)$ et l'on ne peut pas dériver par rapport à x une fonction qu'on ne connaît qu'en $x = 0$. C'est la symétrie de révolution qui permet d'affirmer que les composantes du champ selon x et y sont nulles.

Remarque : on pourrait penser calculer le potentiel créé par un plan en faisant tendre R vers l'infini. Malheureusement l'intégrale diverge alors. C'est pratiquement toujours le cas lorsque la charge totale est infinie car la situation n'est pas réaliste.

XVII-A.8 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

On définit une ligne de champ comme une courbe tangente en chacun de ses points au champ électrique.

On définit une surface équipotentielle comme une surface dont tous les points sont au même potentiel.

Considérons deux points M et M' infiniment proches d'une même équipotentielle, l'un de coordonnées (x, y, z) , l'autre de coordonnées $(x + dx, y + dy, z + dz)$. On a donc :

$$0 = V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) = dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{dl} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On en déduit que la ligne de champ, parallèle à \vec{E} , est orthogonale à la surface équipotentielle qui contient \overrightarrow{dl} .

Imaginons cette fois que $\overrightarrow{MM'}$ soit parallèle à la ligne de champ et dans le sens du champ électrique. On a alors :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} > 0 \quad \text{d'où} \quad dV < 0$$

Les lignes de champ sont donc orientées dans le sens des potentiels strictement décroissants. Une conséquence importante est qu'il est impossible qu'une ligne de champ soit fermée (c'est-à-dire qu'elle fasse une boucle en revenant à son point de départ).

XVII-A.9 Théorème de Gauss.

Le champ créé par une charge q au point O envoie à travers une sphère de centre O et de rayon r un flux électrique :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On peut montrer, en se dotant d'outils géométriques adaptés, que ce résultat reste vrai pour toute surface fermée entourant le point O . Par contre, si la surface fermée ne contient pas le point O , alors le flux est nul. Nous admettrons ce résultat.

Soit un ensemble de charges q_i en des points P_i et une surface fermée Σ , le flux électrique à travers Σ est :

$$\Phi = \sum_i \oiint_{\Sigma} \frac{q_i \overrightarrow{P_i M}}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{P_i M}\|^3} \cdot dS \vec{e}_r = \sum_i \phi_i$$

Les flux élémentaires ϕ_i valent q_i ou 0 selon que q_i est à l'intérieur ou à l'extérieur. On peut donc écrire :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

L'intérêt du théorème de Gauss est qu'il permet de calculer rapidement le champ électrique, mais uniquement dans les situations de haute symétrie.

On n'oubliera pas que, par analogie, il existe un théorème de Gauss gravitationnel.

XVII-A.10 Usage raisonné du théorème de Gauss.

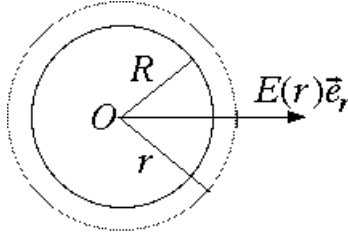
Soit une répartition de charges et un point M quelconque où l'on veuille calculer le champ électrique. Il faut, dans un premier temps, analyser les symétries pour trouver la direction de $\vec{E}(M)$ puis les invariances.

Ensuite, il faut trouver une surface fermée à laquelle appliquer le théorème ; il ne s'agit pas d'une surface matérielle mais d'une entité mathématique. Pour pouvoir calculer le champ en M , il faut premièrement que la surface passe par M . Deuxièmement que $\vec{E}(M)$ soit orthogonal à la surface (sinon on perd tout espoir de connaître la composante tangentielle du champ) et enfin que le module du champ soit uniforme sur la surface. Expliquons tout cela par l'étude des grands classiques.

XVII-A.11 Les grands classiques.**Champ créé par une sphère uniformément chargée en surface.**

Soit une sphère de centre O , de rayon R , portant la charge Q uniformément répartie à sa surface. Soit un point M à la distance r de O . Tout plan contenant

OM est plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans ; il est donc radial. La symétrie sphérique du problème indique en outre que le module du champ ne dépend que de r ; on peut donc écrire $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$



Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de centre O et de rayon r passant par M . On a :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \oiint E(r) dS = E(r) \oiint dS = 4\pi r^2 E(r)$$

Quant à Q_{int} , elle est égale à Q si $r > R$ et nulle si $r < R$, donc :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{e}_r}{r^2} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Champ et potentiel créés par une sphère uniformément chargée en volume.

Attention l'exemple qui suit n'est pas un exemple d'électrostatique, car il est impossible d'électriser en profondeur un isolant et il est impossible de maintenir en profondeur des charges dans un conducteur (on montrera dans un chapitre ultérieur qu'elles migrent en surface). Il s'agit donc en fait ici de trouver par analogie le champ de gravitation créé par une répartition uniforme de masse.

Soit une sphère de centre O , de rayon R , portant la charge Q uniformément répartie en volume et qui a donc une densité volumique de charge $\rho = 3Q/4\pi R^3$. Par la même méthode que celle du «grand classique» précédent, on arrive à :

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Si $r > R$ alors $Q_{\text{int}} = Q$ et :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{pour } r > R$$

Par contre, si $r < R$, la charge intérieure est celle d'une sphère de rayon r , soit $(4/3)\pi r^3 \rho$ et, en reportant la valeur de ρ , $Q_{\text{int}} = Q(r/R)^3$, d'où :

$$\vec{E} = \frac{Q(r/R)^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

soit :

$$\vec{E} = \frac{Q r}{4 \pi \varepsilon_0 R^3} \vec{e}_r \quad \text{pour } r < R$$

Profitons de cet exemple pour montrer comment on peut en déduire le potentiel électrique. Ici, la relation $\vec{E} = -\text{grad } V$ devient, puisque la symétrie sphérique permet d'affirmer que V ne dépend que de r , $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$. On en déduit :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r > R$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q r}{4 \pi \varepsilon_0 R^3} \quad \text{pour } r < R$$

soit, en appelant A et B les constantes d'intégration :

$$V = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r} + A \quad \text{pour } r > R$$

$$V = -\frac{Q r^2}{8 \pi \varepsilon_0 R^3} + B \quad \text{pour } r < R$$

Les potentiels sont certes définis à une constante additive près, mais il est raisonnable de choisir $V = 0$ infiniment loin des charges, là où la force d'interaction tend vers 0. On fait donc tendre r vers l'infini (dans la formule valable pour $r > R$, bien sûr) et V tend vers 0 si A est nul. Par définition, V est dérivable, donc continu, et $\lim_{r \rightarrow R^+} = \lim_{r \rightarrow R^-}$, d'où l'on tire $B = \frac{3Q}{8 \pi \varepsilon_0 R}$. Finalement,

$$V = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r} \quad \text{pour } r > R$$

$$V = \frac{Q}{8 \pi \varepsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) \quad \text{pour } r < R$$

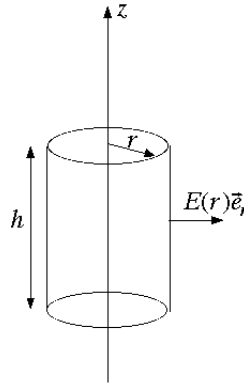
Champ créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé.

Un fil confondu avec Oz possède une densité linéique de charges λ . On veut calculer le champ en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z . Les deux plans passant par M , le premier passant par Oz , le second perpendiculaire à Oz , sont des plans de symétrie, donc le champ est parallèle à leur intersection ; il est donc radial. Le problème possède une invariance par translation parallèlement à Oz et une invariance par rotation autour de Oz ; son module ne dépend donc ni de z , ni de θ . On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

On va donc appliquer le théorème de Gauss à la surface choisie selon les principes évoqués plus haut, à savoir un cylindre d'axe Oz , de rayon r et d'une hauteur arbitraire h . Le flux à travers cette surface est :

$$\iint \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \iint E(r) dS = E(r) \iint dS = 2 \pi r h E(r)$$



L'ennui est que cette surface n'est pas fermée. On la ferme donc en lui accolant deux disques de rayon r qui lui servent de fond et de couvercle. Le flux à travers ces surfaces est nul car leurs vecteurs surfaces sont selon \vec{e}_z et le champ selon \vec{e}_r . La charge intérieure est alors λh et on en déduit :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Remarque : si l'on cherche à trouver le potentiel électrique correspondant, on trouve un potentiel en $\ln(r)$ qui ne pourra pas tendre vers 0 quand r devient infini. Cela provient du fait que le fil infini uniformément chargé porte une charge infinie, ce qui n'est pas physiquement possible. Ce calcul n'est en fait qu'un cas d'école destiné à maîtriser le théorème de GAUSS mais ne correspond à aucune situation physiquement plausible.

Champ créé par un plan infini uniformément chargé.

Un plan xOy possède une densité surfacique de charges σ . Soit un point M de coordonnées x, y, z .

Tout plan contenant la parallèle à Oz passant par M est plan de symétrie ; on en déduit que le champ est parallèle à Oz . De plus l'invariance par translation parallèle à Ox ou Oy permet d'affirmer que le champ ne dépend ni de x , ni de y . On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

Enfin la symétrie par rapport au plan xOy permet d'affirmer que le champ au point de cote $-z$ est symétrique de celui en z , donc que la fonction $E(z)$ est impaire.

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de génératrices parallèles à Oz , limité par deux disques de surface S l'un à la cote z , l'autre à la cote $-z$ (avec z positif). Le flux est nul à travers la surface latérale du cylindre, car les vecteurs surfaces sont parallèles au plan xOy et le champ perpendiculaire. Le flux à travers le disque du haut, orienté vers le haut est $E(z)S$ et celui à travers le disque du bas, orienté vers le bas est $(-E(z))(-S)$. Le théorème de Gauss donne donc (avec z positif) :

$$2 E(z) S = \sigma S / \varepsilon_0$$

d'où :

$$E(z) = \begin{cases} \sigma / 2 \varepsilon_0 & \text{si } z > 0 \\ -\sigma / 2 \varepsilon_0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Application au condensateur plan.

Un condensateur plan est formé de deux plaques d'aire S parallèles séparées par du vide sur une épaisseur e . Si les dimensions des plaques sont grandes devant e , elles créent le même champ que si elles étaient infinies.

$$\begin{array}{c} \uparrow (\sigma / 2 \varepsilon_0) \vec{e}_z \quad \sigma \\ \hline \downarrow (\sigma / 2 \varepsilon_0) \vec{e}_z \\ \\ \hline -\sigma \quad -(\sigma / 2 \varepsilon_0) \vec{e}_z \downarrow \\ (\sigma / 2 \varepsilon_0) \vec{e}_z \uparrow \end{array}$$

Les densités surfaciques des deux plaques sont opposées. La première crée donc au-dessus d'elle-même le champ $\sigma / 2 \varepsilon_0$ et en dessous $-\sigma / 2 \varepsilon_0$, la seconde de densité opposée crée $-\sigma / 2 \varepsilon_0$ au-dessus et $\sigma / 2 \varepsilon_0$ en dessous. Le bilan est $-\sigma / \varepsilon_0$ entre les plaques et nul ailleurs.

Le potentiel entre les plaques vérifie :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = -\sigma / \varepsilon_0$$

Il est donc de la forme :

$$V(z) = (\sigma / \varepsilon_0) z$$

Donc la différence de potentiel entre la plaque du haut ($z = e$) et celle du bas ($z = 0$) est :

$$U = (\sigma / \varepsilon_0) e = (\sigma / \varepsilon_0) (Q / S)$$

On en déduit la capacité du condensateur :

$$C = Q / U = \varepsilon_0 S / e$$

XVII-A.12 Considérations énergétiques.

Une force \vec{F} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p si $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$. Une force électrique s'écrit $\vec{F} = q \vec{E} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\text{grad}} (qV)$. On en déduit que l'énergie potentielle d'une charge q dans un champ \vec{E} est :

$$\mathcal{E}_p = qV$$

En particulier, l'énergie d'une charge q_j dans le champ créé par une charge q_i est :

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Il est plus pertinent ici de dire que \mathcal{E}_p est l'énergie d'interaction entre q_i et q_j .

XVII-B Magnétostatique.

XVII-B.1 Formule de Biot et Savart.

Historiquement, en cherchant une analogie avec les forces gravitationnelles et les forces électriques, on s'est fourvoyé dans de fausses pistes pour élaborer une théorie du magnétisme. Il n'est d'aucun intérêt ici de détailler les tâtonnements qui ont abouti à la théorie qui suit, que nous admettrons donc comme fruit d'un long travail de maturation des idées.

La source des champs magnétiques est le déplacement des charges électriques. Mis à part le comportement tout à fait exceptionnel de quelques rares corps (fer, oxyde de fer, oxyde de chrome, etc.), il faut créer des courants électriques pour générer un champ magnétique. Ceux-ci étant en pratique véhiculés par des fils électriques dont la longueur est très grande par rapport à leur diamètre, on adoptera le modèle du circuit filiforme, c'est-à-dire de section négligeable, parcouru par une intensité I .

Nous admettrons donc qu'un circuit électrique Γ , parcouru par une intensité constante I et découpé en petits éléments $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ orientés dans le sens du courant, crée en un point P le champ :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{I \vec{dl} \wedge \overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MM'}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Où μ_0 est une constante liée au choix des unités.

La présence du facteur $\frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$ dénote une certaine analogie avec la formule permettant le calcul du champ électrique.

XVII-B.2 Action du champ magnétique sur une charge en mouvement.

Il peut sembler peu logique de donner une formule permettant de calculer le champ magnétique avant d'en avoir donné ne fût-ce que l'ébauche d'une définition. L'histoire de la magnétostatique n'a conduit à une théorie cohérente qu'après beaucoup de temps ; acceptons donc cette présentation volontairement désordonnée.

L'action d'une ou plusieurs charges en mouvement sur une charge q animée d'une vitesse \vec{v} peut être décrite par la donnée d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} permettant de calculer la force subie par q avec la formule de LORENTZ :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

On peut en déduire que l'action de circuits électriques créant un champ \vec{B} sur une portion $d\vec{l}$ d'un autre circuit parcouru par une intensité I est la force de LAPLACE donnée par la formule suivante :

$$\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Nous détaillerons le passage de la force de LORENTZ à la force de LAPLACE dans le chapitre suivant.

XVII-B.3 Symétries du champ magnétique.

Le champ magnétique calculé à partir de la formule de BIOT et SAVART jouit de propriétés de symétrie anormale (on dit parfois qu'il s'agit d'un pseudo-vecteur ou d'un vecteur axial).

S'il existe en un point M un plan de symétrie Π pour les circuits électriques, tant pour la géométrie que pour les courants, alors le champ magnétique en M est non pas compris dans le plan Π mais orthogonal au plan Π .

Par contre, s'il existe en un point M un plan de symétrie Π pour les circuits électriques mais inversant le sens des courants (on parle d'*antisymétrie*), alors le champ magnétique en M est dans le plan Π .

Enfin s'il existe, passant par M , un axe Δ de symétrie de révolution, le champ est colinéaire à cet axe Δ . Ici, le comportement est normal, c'est dû au fait que contrairement à une symétrie par rapport à un plan, une rotation ne change pas un trièdre direct en un trièdre indirect.

XVII-B.4 Flux conservatif.

On peut déduire de la formule de BIOT et SAVART, de façon compliquée, et l'expérience le confirme, que le flux magnétique à travers une surface fermée est nul. Nous en avons vu les conséquences pratiques dans le chapitre d'analyse vectorielle. On dit aussi que le champ magnétique est à flux conservatif. On en verra une conséquence dans le paragraphe qui suit et une utilisation concrète dans un «grand classique» (calcul du champ au voisinage d'un axe de symétrie de révolution).

XVII-B.5 Topologie des lignes de champs magnétiques.

Une ligne de champ magnétique se définit, bien sûr, comme une courbe tangente en chacun de ses points au champ magnétique. On constate, au

contraire des lignes de champ électrique, qu'elles sont, sauf cas particulier, des courbes fermées.

Sur une carte des lignes de champ, si l'on voit que les lignes divergent, la conservation du flux à travers un tube de champ entraîne que le module du champ diminue.

XVII-B.6 Théorème d'Ampère.

C'est le pendant en magnétostatique du théorème de Gauss en électrostatique.

On peut le déduire de la formule de BIOT et SAVART, de façon compliquée, et l'expérience le confirme.

Considérons une courbe (imaginaire) fermée notée Γ et orientée, limitant une surface Σ orientée elle aussi à partir de l'orientation de Γ par la règle du tire-bouchon. La circulation du champ magnétique le long de Γ est égale à la constante μ_0 multipliée par l'intensité qui traverse Σ et que l'on appelle intensité «enlacée» (par Γ), soit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

Là encore, il faut en faire un usage raisonné. La courbe Γ doit passer par le point M où l'on veut calculer \vec{B} et de même que $d\vec{S}$ doit être parallèle à \vec{E} , $d\vec{l}$ doit être parallèle à \vec{B} . Il en résulte en pratique qu'on applique le théorème d'Ampère à la ligne de champ magnétique passant par M . Encore faut-il que le problème ait une symétrie suffisante pour que le module de \vec{B} soit constant sur cette ligne de champ.

XVII-B.7 Les grands classiques.

Champ créé par un fil rectiligne infini.

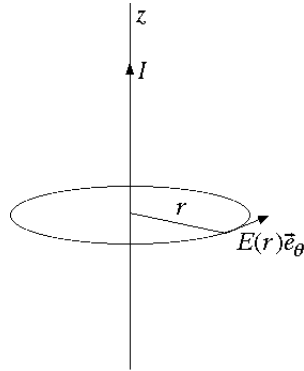
Un circuit filiforme rectiligne infini, confondu avec Oz est parcouru par un courant d'intensité I compté positivement dans le sens de Oz . Soit un point M repéré par ses coordonnées cylindriques r , θ et z . Le plan passant par Oz et le point M est plan de symétrie, donc le champ magnétique en M lui est orthogonal, c'est à dire orthoradial. De plus l'invariance du circuit par translation ou rotation selon Oz permet d'affirmer que le champ est de la forme $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_{\theta}$.

Appliquons donc, selon les principes évoqués plus haut, le théorème d'Ampère à un cercle d'axe Oz et de rayon r :

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r) \vec{e}_{\theta} \cdot dl \vec{e}_{\theta} = \oint B(r) dl = B(r) \oint dl = 2\pi r B(r)$$

d'où

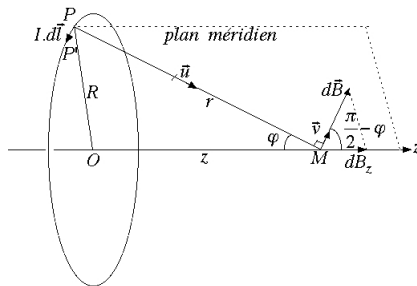
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}$$



Remarquons qu'un fil infini ne peut physiquement exister, non seulement par sa taille, mais aussi par le fait que le circuit électrique n'est pas fermé; nous verrons après le «grand classique» suivant comment redonner du sens à cet exercice.

Champ créé sur l'axe d'une spire circulaire.

Un circuit filiforme, circulaire, de centre O , de rayon R , contenu dans le plan xOy , donc d'axe Oz , est parcouru par un courant I , compté positivement dans le sens trigonométrique. On cherche le champ magnétique créé en un point M de cote z sur l'axe Oz . La symétrie de révolution entraîne que le champ est colinéaire à Oz (sur l'axe Oz uniquement, bien sûr). Par contre, bien que Oz soit donc une ligne de courant, le module du champ y varie avec z et le théorème d'AMPÈRE ne nous sera d'aucun secours; il faut utiliser la formule de BIOT et SAVART.



Considérons donc un élément de courant $I \overrightarrow{PP'} = I d\vec{l} = I dl \vec{e}_\theta$ sur la spire, il crée en M , en notant \vec{u} et r le vecteur unitaire et le module de \overrightarrow{PM} , un champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \vec{e}_\theta \wedge \vec{u}}{r^2}$$

\vec{e}_θ et \vec{u} sont unitaires et orthogonaux, leur produit vectoriel est donc un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{u} dans le plan défini par Oz et P , notons-le \vec{v} . On a donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \vec{v}}{r^2}$$

$d\vec{B}$ se compose d'une composante sur l'axe $dB_z \vec{e}_\theta$ et d'une composante orthogonale à Oz . L'intégration de cette seconde composante donnera un résultat nul, car on sait que le champ total est porté par Oz ; seule nous intéresse donc dB_z . Notons φ l'angle OPM . Par projection, on a :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl \sin \varphi}{4 \pi r^2}$$

et

$$B_z = \frac{\mu_0}{4 \pi} \int \frac{I dl \sin \varphi}{r^2} = \frac{\mu_0 I \sin \varphi}{4 \pi r^2} \int dl = \frac{\mu_0 I \sin \varphi}{2 r^2} R$$

Reste à reporter $\sin \varphi = R/r$ et $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, alors

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

En particulier, au centre de la spire ($z = 0$) :

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

Revenons à la remarque sur le fil infini. Soit à calculer le champ à une distance a d'une portion de circuit AB rectiligne sur une longueur R grande devant a de part et d'autre du point de calcul. Le champ créé par AB diffère de celui créé par un fil infini ($\mu_0 I / 2 \pi a$), par des termes négligeables car la formule de BIOT et SAVART est en $1/r^2$. Si l'on modélise le reste du circuit par un demi cercle de rayon R , il crée un champ moitié de $\mu_0 / 2 R$ qui est négligeable car $R \gg a$.

Champ créé au voisinage de l'axe d'une spire circulaire.

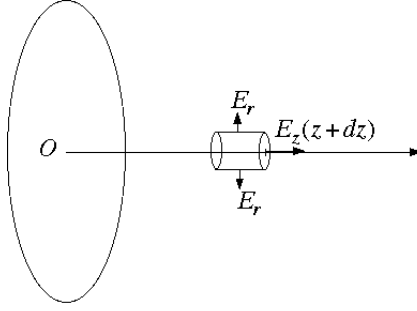
Considérons le même circuit électrique et un point M non plus sur l'axe mais près de l'axe, repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z avec $r \ll R$. Le plan méridien contenant Oz et M est un plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est contenu dans ce plan; il a une composante axiale B_z et une composante radiale B_r qui ne dépendent que de r et z puisqu'il y a invariance par rotation. Considérons deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe; on peut considérer qu'ils ont même z et des valeurs de r opposées. On passe de l'un à l'autre par une rotation de 180° qui conserve la composante axiale et retourne la composante radiale; B_z est donc fonction paire de r et B_r fonction impaire de r . Si r est assez petit, on peut remplacer $B_z(z, r)$ et $B_r(z, r)$ par leur développement de TAYLOR à l'ordre 1 en r , soit :

$$B_z(z, r) = B_z(z, 0)$$

$$B_r(z, r) = r \frac{\partial B_r}{\partial r}(z, 0)$$

$B_z(z, 0)$ est le champ sur l'axe calculé plus haut; on a donc :

$$B_z(z, r) = B_z(z, 0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$



Le développement de $B_r(z, r)$ montre que B_r est proportionnel à r mais ne nous permet pas d'en calculer la valeur puisque nous ne connaissons pas $\frac{\partial B_r}{\partial r}(z, 0)$.

On va utiliser ici le fait que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul. On choisit un cylindre d'axe Oz entre les cotes z et $z + dz$ fermé par deux disques. Le flux à travers le disque de cote $z + dz$ et de vecteur surface parallèle à Oz de même sens est :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B_z(z + dz, r) dS = \iint B_z(z + dz, 0) dS = \\ &= B_z(z + dz, 0) \iint dS = \pi r^2 B_z(z + dz, 0)\end{aligned}$$

De même le flux à travers le disque de cote z est, en notant le changement d'orientation :

$$\Phi_2 = -\pi r^2 B_z(z, 0)$$

Enfin, le flux à travers le cylindre, dont les vecteurs surfaces élémentaires sont radiaux et en prenant dz suffisamment petit pour négliger la variation de B_r avec z , est :

$$\Phi_3 = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B_r(z, r) dS = B_r(z, r) \iint dS = 2\pi r dz B_r(z, r)$$

Le flux total est nul et l'on arrive donc, avec un développement de TAYLOR à :

$$\begin{aligned}0 &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \pi r^2 (B_z(z + dz, 0) - B_z(z, 0)) + 2\pi r dz B_r(z, r) = \\ &= \pi r^2 \frac{dB_z}{dz} dz + 2\pi r dz B_r(z, r)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$B_r(z, r) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$$

soit en reportant l'expression de $B_z(z, 0)$:

$$B_r(z, r) = \frac{3\mu_0 I R^2 z r}{2(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

Bobines de Helmholtz.

Soient deux spires coaxiales d'axe Oz de même rayon R parcourues par la même intensité I dont les centres ont pour cotes $-a$ et $+a$. Appelons $B(z)$ le champ sur l'axe d'une seule spire en fonction de la distance entre le centre de la spire et le point de calcul. On a vu plus haut que :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Compte tenu de la position des centres et aussi de la parité de $B(z)$, le champ créé par les deux spires est :

$$B_{total}(z) = B(z+a) + B(z-a) = B(a+z) + B(a-z)$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 3 autour de a :

$$B(a+z) = B(a) + z B'(a) + \frac{z^2}{2} B''(a) + \frac{z^3}{6} B'''(a) + o(z^3)$$

$$B(a-z) = B(a) - z B'(a) + \frac{z^2}{2} B''(a) - \frac{z^3}{6} B'''(a) + o(z^3)$$

$$B_{total}(z) = 2B(a) + z^2 B''(a) + o(z^3)$$

Si l'on choisit a de sorte que $B''(a) = 0$, alors :

$$B_{total}(z) = 2B(a) + o(z^3)$$

autrement dit, on peut considérer que sur l'axe (et au voisinage, avec la même méthode que dans le «grand classique» précédent) le champ magnétique est quasiment uniforme. Les bobines de HELMHOLTZ sont avec le solénoïde, la façon d'obtenir un champ magnétique uniforme sur un volume assez grand.

Un calcul de routine qu'on vous invite à coucher sur le papier (je ne vais quand même pas tout vous faire!) conduit à :

$$B''(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = R/2$$

c'est-à-dire que l'écartement des spires ($2a$) est égal à leur rayon, ce qui donne une géométrie très compacte et caractéristique pour un œil exercé.

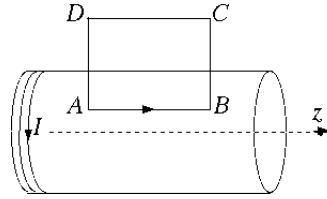
Champ créé par un solénoïde.

Un solénoïde est formé de N spires circulaires de même axe Oz , de même rayon R , parcourues par le même courant I et dont les centres sont régulièrement espacés sur une longueur totale L ; on note n le nombre de spires par unité de longueur (donc $n = N/L$). En pratique, il est réalisé par un fil hélicoïdal d'axe Oz de rayon R et de pas L/N , parcouru par le courant I . On suppose L grand devant R . Si l'on se place en un point éloigné des deux extrémités du solénoïde, c'est-à-dire dont les deux distances aux deux bouts du solénoïde sont grandes devant R , on peut remplacer le vrai solénoïde par un solénoïde

infini de même rayon et de même pas, parce que ce que l'on rajoute se trouve à suffisamment grande distance pour introduire des termes négligeables.

Considérons un point M , sur l'axe ou non d'un solénoïde infini. Le plan passant par M et orthogonal à Oz est un plan de symétrie (enfin presque, car la symétrie peut décaler légèrement la position des spires; l'approximation sera d'autant meilleure que les spires seront plus serrées). Le champ magnétique sera donc orthogonal à ce plan, donc parallèle à Oz . L'invariance par translation (presque, cf *supra*) et par rotation selon Oz prouve que le champ ne dépend que de la distance r à l'axe, donc :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$$



ℓ étant une longueur arbitraire, appliquons le théorème d'AMPÈRE à un rectangle $ABCD$ dans un plan méridien; les coordonnées des quatre points sont : $A(r = r_1, z = 0)$, $B(r = r_1, z = \ell)$, $C(r = r_2, z = \ell)$ et $D(r = r_2, z = 0)$ avec $r_1 < R < r_2$. La circulation du champ magnétique le long de $ABCD$ est, avec \vec{B} orthogonal à BC et DA :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B}(r_1) - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{B}(r_2) = (B(r_1) - B(r_2)) \ell$$

Le rectangle enlace un nombre $n\ell$ spires parcourues par le courant I ; le courant total enlacé est donc $n\ell I$. Le théorème d'AMPÈRE conduit donc à :

$$\forall r_1 < R \quad \forall r_2 > R \quad B(r_1) - B(r_2) = \mu_0 n I$$

On en déduit que $B(r)$ est constant par morceaux, on notera B_{int} sa valeur pour $r < R$ et B_{ext} sa valeur pour $r > R$. Donc $B_{\text{int}} - B_{\text{ext}} = \mu_0 n I$. On termine l'étude en remarquant que si r_2 tend vers l'infini, on se trouve infiniment loin des courants et donc que le champ est nul, d'où :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{ext}} &= \vec{0} \\ \vec{B}_{\text{int}} &= \mu_0 n I \vec{e}_z \end{aligned}$$

L'expérience prouve que ce résultat est correct pour un solénoïde fini, sauf bien sûr près des bords où les lignes de champ commencent à diverger; elles se referment par un long trajet à l'extérieur du solénoïde où le champ ne sera pas nul mais très petit.