

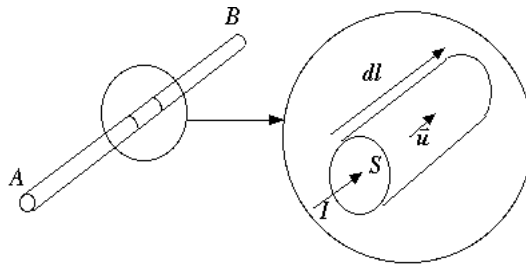
Chapitre XXIII

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

L'induction électromagnétique recouvre tout les phénomènes qui résultent de la loi de MAXWELL-FARADAY. Bien sûr tout ce qui a été dit à propos des ondes électromagnétiques en relève. Nous nous attacherons ici plutôt aux conséquences technologiques de l'induction. Le XIXème siècle a été celui de la machine à vapeur et de la thermodynamique; le XXème celui de l'électricité et de l'induction. Deux aspects essentiels seront abordés ici : les transformateurs et les couplages électromécaniques, sans lesquels n'existeraient ni les moteurs électriques, ni les génératrices de courant alternatif.

XXIII-1 Rappel d'électrocinétique.



Soit une portion élémentaire de circuit filiforme de section S négligeable, de longueur $d\vec{l} = dl \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire, vérifiant la loi d'OHM locale, à savoir $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ou $\vec{E} = (1/\gamma) \vec{j}$. La densité de courant \vec{j} est canalisée par le fil donc $\vec{j} = j \vec{u}$. Considérons la section du fil de vecteur

surface $\vec{S} = S \vec{u}$; l'intensité est $I = \vec{j} \cdot \vec{S} = j S$ et donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} = \frac{1}{\gamma} j \vec{u} = \frac{1}{\gamma} \frac{I}{S} \vec{u}$$

Multiplions scalairement par $\vec{dl} = dl \vec{u}$ et intégrons entre deux points A et B du circuit filiforme, on tire :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \frac{1}{\gamma} \frac{I}{S} dl = I \int_A^B \frac{dl}{\gamma S}$$

On reconnaît dans $dl/\gamma S$ la résistance de l'élément dl et dans l'intégrale la somme des résistance en série, d'où :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = I \int_A^B dR = R_{AB} I$$

En régime permanent, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ et $\vec{E} \cdot \vec{dl} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{dl} = -dV$ d'où :

$$\int_A^B -dV = V_A - V_B = R_{AB} I$$

où l'on reconnaît l'autre formulation de la loi d'OHM.

En particulier pour un circuit filiforme fermé (c'est-à-dire où $A = B$), on en déduit $V_A - V_B = V_A - V_A = 0$ d'où $I = 0$. Il en résulte que, pour qu'existe un courant dans un circuit fermé, il faut que $\vec{E} \neq -\overrightarrow{\text{grad}}V$.

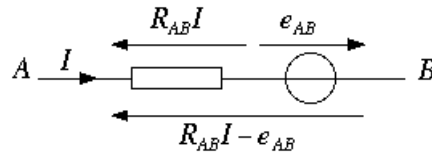
Dans ce cas, on note pour un circuit ouvert :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = V_A - V_B + e_{AB}$$

soit :

$$V_A - V_B = R_{AB} I - e_{AB}$$

d'où le schéma électrique :



et dans le cas d'un circuit fermé :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = e$$

et donc :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = e = R_{tot} I$$

La suite de ce chapitre vise à calculer la circulation du champ électrique dans deux situations-types.

On rappelle que e_{AB} ou e s'appelle *force électromotrice* ou *f.e.m.*¹

XXIII-2 Circuit fixe dans un champ magnétique variable.

XXIII-2.a Loi de Faraday.

Soit \mathcal{C} un circuit filiforme orienté limitant une surface Σ , orientée par la règle du tire-bouchon. Rappelons une démonstration faite dans le chapitre sur l'axiomatique de l'électromagnétisme. Le force électromotrice dans le circuit est :

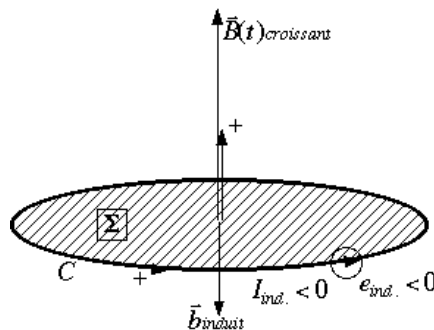
$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

où Φ_m est le flux magnétique à travers Σ . Retenons donc la loi de FARADAY :

$$e = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Rappelons que le champ magnétique est à flux conservatif donc que Φ_m ne dépend pas du choix de la surface qui s'appuie sur \mathcal{C} .

Loi de Lenz.



L'interprétation physique du signe moins de la loi de FARADAY s'appelle loi de LENZ. Supposons que le champ magnétique «extérieur» traversant le circuit \mathcal{C} soit croissant ; alors le flux magnétique est croissant donc la force électromagnétique $-d\Phi_m/dt$ est négative, ainsi que le *courant induit* dans le circuit \mathcal{C} . Ce courant induit crée à son tour un champ magnétique appelé

¹Bien sûr, ça n'a rien à voir avec une force puisque c'est homogène à une différence de potentiel ; on remplace de plus en plus souvent cette appellation fallacieuse par *tension électromotrice*.

champ induit et la règle du tire-bouchon indique qu'il est dans le sens négatif. Donc ce champ induit s'oppose à l'augmentation du champ «extérieur»; la loi de LENZ est une *loi de modération*, du même style que les lois de LE CHÂTELIER et de VAN'T HOFF en thermochimie des équilibres .

Champ électromoteur de Neumann.

Une autre présentation possible, non exigible au concours, est la suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint dV - \frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = [V]_{\text{un point}}^{\text{même point}} - \frac{d}{dt} \iint \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \dots$$

$$\dots 0 - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Il est d'usage d'appeler $-\partial \vec{A} / \partial t$ *champ électromoteur* de NEUMANN.

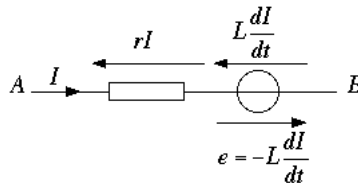
XXIII-2.b Auto-induction.

Considérons un circuit traversé par un courant I . Il crée en tout point un champ magnétique orienté par la règle du tire-bouchon et proportionnel (cf formule de BIOT et SAVART) à I . Ce champ crée à son tour à travers une surface appuyée sur le circuit et orientée par la même règle du tire-bouchon un flux magnétique, appelé *flux propre* forcément positif et forcément proportionnel à I . On définit donc un coefficient positif appelé *coefficient d'auto-induction* ou *auto-inductance* ou *inductance*, voire en français moderne *self*, noté L tel que $\Phi_{\text{propre}} = LI$.

La f.e.m. associée est :

$$e = -\frac{d\Phi_{\text{propre}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

d'où le schéma équivalent, en tenant compte de la résistance r du circuit :



Exemple du solénoïde long.

Pour un solénoïde contenant N spires de surface S sur une longueur ℓ , on sait qu'il crée un champ quasiment uniforme à l'intérieur de module $B = \mu_0 n I = \mu_0 N I / \ell$. Le flux total est N fois le flux à travers une seule spire soit :

$$\Phi_{\text{propre}} = N \varphi = N S B = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I$$

d'où :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

le plus important étant la dépendance en N^2 .

XXIII-2.c Circuits électriques couplés par mutuelle induction.

Considérons maintenant deux circuits (en pratique deux bobines), l'un parcouru par un courant I_1 , l'autre par I_2 . En tout point le champ magnétique est somme du champ créé par le premier circuit et de celui créé par le second, donc est somme d'un terme proportionnel à I_1 et d'un terme en I_2 . Il en est donc de même pour le flux magnétique à travers l'un ou l'autre des circuits. On peut donc écrire de façon matricielle :

$$\begin{cases} \Phi_1 = M_{11} I_1 + M_{12} I_2 \\ \Phi_2 = M_{21} I_1 + M_{22} I_2 \end{cases}$$

Il suffit mentalement de faire $I_2 = 0$ pour retrouver un circuit unique et se convaincre que M_{11} s'identifie à l'inductance L_1 du premier circuit, et de même M_{22} à L_2 . De plus, on démontre et nous admettrons que la matrice est symétrique et l'on notera M la valeur commune de M_{12} et M_{21} , appelé *coefficient de mutuelle induction* ou *mutuelle inductance*, voire *mutuelle* tout court. On note donc :

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 = M I_1 + L_2 I_2 \end{cases}$$

Contrairement à L_1 et L_2 qui, on l'a vu, sont positifs, le signe de M dépend des conventions d'orientation des deux circuits et n'a donc pas de signification physique. On démontre et nous admettrons l'inégalité suivante :

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

et on appelle parfois *coefficient de couplage* le rapport, de valeur absolue inférieure ou égale à 1, $M/\sqrt{L_1 L_2}$.

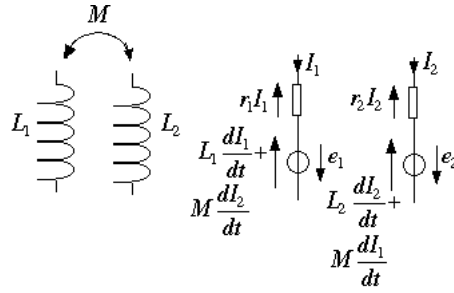
On prendra garde que les f.e.m. d'induction sont :

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

D'où le schéma électrique et le schéma équivalent tenant compte des résistances des bobines.

Circuit soumis à un champ extérieur.

Soit un circuit soumis à un champ extérieur \vec{B}_{ext} donné, ce qui permet d'en calculer le flux Φ_{ext} à travers le circuit. Il faut bien comprendre que ce



champ est forcément créé par un second circuit électrique non mentionné par l'énoncé et donc que Φ_{ext} se substitue à $M I_2$. Le flux à travers le premier circuit parcouru par le courant I est donc :

$$\Phi_{tot} = L I + \Phi_{ext}$$

$$e = -L \frac{dI}{dt} - \frac{d\Phi_{ext}}{dt}$$

Il y a souvent ambiguïté dans les problèmes et l'on se pose souvent la question de tenir compte ou non du terme $L I$. En fait, il est aisé de trancher si l'on se souvient que L varie en N^2 où N est le nombre de spires (cf XXIII-2.b). Si le circuit n'est pas une bobine et ne comporte qu'une spire, on peut sans hésitation négliger $L I$; si c'est une bobine, on doit en tenir compte.

XXIII-2.d Bilan énergétique.

Considérons les circuits de la figure précédente. La puissance totale apportée par les courants est :

$$\mathcal{P} = U_1 I_1 + U_2 I_2 = \left(r_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \right) I_1 + \left(r_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \right) I_2$$

$$\mathcal{P} = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + M \left(I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} \right)$$

qu'on réécrit, en reconnaissant l'effet JOULE :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \right) = \mathcal{P} - \mathcal{P}_{Joule}$$

Puisqu'on reconnaît la même formulation que le théorème de l'énergie cinétique, on va définir l'énergie magnétique des circuits couplés par :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Application au solénoïde.

Dans le cas d'un circuit unique, la même étude conduit à $\mathcal{E} = (1/2) L I^2$, soit dans la cas du solénoïde (cf XXIII-2.b) $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{2\ell}$. Si l'on divise par

le volume $S \ell$ de solénoïde, on trouve une énergie volumique :

$$u = \frac{\mathcal{E}}{S \ell} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2 \ell^2} = \frac{1}{2 \mu_0} \left(\frac{\mu_0 N I}{\ell} \right)^2$$

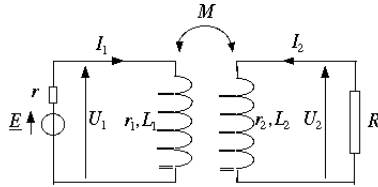
où l'on reconnaît le champ $B = \mu_0 N I / \ell$ créé. On retrouve donc la formule de l'énergie magnétique déduite des équations de MAXWELL, à savoir :

$$u = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

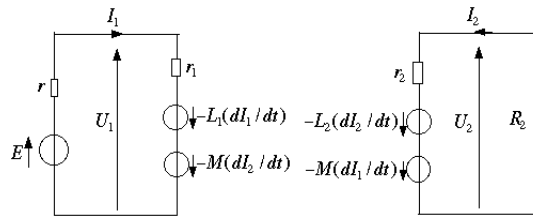
ce qui assure de la cohérence entre les deux approches.

XXIII-2.e Exemple d'utilisation : le transformateur.

Considérons le circuit ci-dessous, où deux bobines couplées sont branchées l'une à un générateur alternatif (modèle de THEVENIN) et l'autre à une résistance modélisant un circuit d'utilisation.



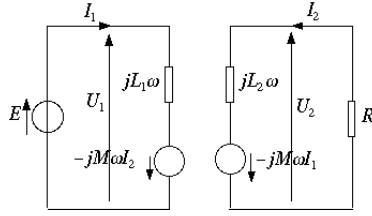
Le schéma équivalent est le suivant où en convention générateur la f.e.m. d'induction dans le premier circuit est $e_1 = -d\Phi_1/dt = -L_1 dI_1/dt - M dI_2/dt$ (pour aérer, on a dessiné deux générateurs correspondant aux deux termes) et de même pour le second circuit.



En courant sinusoïdal, on remplace les dérivées temporelles par $j\omega$, ce qui permet de remplacer par exemple le générateur $-L_1 dI_1/dt$ par un dipôle $jL_1\omega$, avec un changement de signe pour repasser en convention récepteur, d'où le nouveau schéma équivalent, simplifié dans le cas où r , r_1 et r_2 sont négligeables devant $L_1\omega$, $L_2\omega$ et $M\omega$, ce qui est le cas pour un transformateur bien conçu.

La loi des mailles appliquée à chacun des circuits conduit au système :

$$\begin{cases} \underline{E} = j L_1 \omega \underline{I}_1 + j M \omega \underline{I}_2 \\ 0 = j M \omega \underline{I}_1 + (R_2 + j L_2 \omega) \underline{I}_2 \end{cases}$$



On en déduit aisément :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = -\frac{R_2 + jL_2\omega}{(L_1L_2 - M^2)\omega^2 - jL_1\omega R_2} \underline{E} \\ \underline{I}_2 = \frac{jM\omega}{(L_1L_2 - M^2)\omega^2 - jL_1\omega R_2} \underline{E} \end{cases}$$

par ailleurs, il est clair que $\underline{U}_1 = \underline{E}$ et $\underline{U}_2 = -R_2 \underline{I}_2$.

Pour un transformateur bien conçu, le coefficient de couplage défini au XXIII-2.c vaut ± 1 d'où $L_1L_2 - M^2 = 0$ et dans une utilisation normale R_2 est négligeable devant $L_2\omega$; les résultats précédents se simplifient alors en :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{L_2}{L_1 R_2} \underline{E} \\ \underline{I}_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} \underline{E} \\ \underline{U}_1 = \underline{E} \\ \underline{U}_2 = \frac{M}{L_1} \underline{E} \end{cases}$$

Dans le cas très fréquent où les deux bobines ont même surface S et même longueur ℓ , on a (cf XXIII-2.b) $L_1 = \mu_0 N_1^2 S/\ell$, $L_2 = \mu_0 N_2^2 S/\ell$ et donc $M = \pm\sqrt{L_1L_2} = \pm\mu_0 N_1 N_2 S/\ell$ (on prendra le signe plus pour fixer les idées) et :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{N_2^2}{N_1^2 R_2} \underline{E} \\ \underline{I}_2 = -\frac{N_2}{N_1 R_2} \underline{E} \\ \underline{U}_1 = \underline{E} \\ \underline{U}_2 = \frac{N_2}{N_1} \underline{E} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} &= \frac{N_1}{N_2} \\ \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{N_2}{N_1} \end{aligned}$$

Finalement, ainsi conçu le transformateur multiplie la tension par N_2/N_1 et l'intensité par le rapport inverse, ce qui assure un rendement parfait avec ces approximations; dans la réalité, il dépasse les 95 %. A noter que pour assurer un fort coefficient de couplage et de fortes valeurs de $L_1\omega$, $L_2\omega$ et $M\omega$, les bobines enserrant un noyau ferromagnétique qui multiplie ces valeurs par un facteur de l'ordre de mille.

XXIII-3 Circuit mobile dans un champ stationnaire.**XXIII-3.a Champ électromoteur.**

Les lois de l'induction dans le cas du circuit fixe dans un champ variable ont été montrées, entre autres, à partir de la loi d'OHM ; or celle-ci n'est valable que dans un référentiel où le conducteur est fixe. Dans le cas où le circuit est mobile, il faut adapter notre raisonnement.

Première approche : changement de référentiel et champ électromagnétique.

Soit une charge ponctuelle q . Dans le référentiel mobile elle subit la force :

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{rel} + \vec{v}_{rel} \wedge \vec{B}_{rel})$$

et dans le référentiel fixe :

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{abs} + \vec{v}_{abs} \wedge \vec{B}_{abs})$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{abs} + \vec{v}_{entr} \wedge \vec{B}_{abs} + \vec{v}_{rel} \wedge \vec{B}_{abs})$$

Comme les forces sont invariantes par changement de référentiel, ces deux formules doivent donner le même résultat quelle que soit la vitesse relative ; on en déduit d'une part $\vec{B}_{rel} = \vec{B}_{abs}$ et d'autre part $\vec{E}_{rel} = \vec{E}_{abs} + \vec{v}_{entr} \wedge \vec{B}_{abs}$. Il n'est plus besoin d'indice pour le champ magnétique qui s'avère invariant et la loi d'OHM $\vec{j} = \gamma \vec{E}_{rel}$ donne $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{abs} + \vec{v}_{entr} \wedge \vec{B})$. Dans la pratique, on ne fait plus mention du référentiel mobile et l'on écrit de façon abrégée :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

Seconde approche : modèle de conduction.

Pour un circuit fixe, on écrit $\vec{j} = -ne\vec{v}$ pour n électrons par unité de volume car les ions sont immobiles et la vitesse des électrons vérifie, en régime permanent :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \lambda \vec{v}$$

où le dernier terme modélise la dissipation d'énergie par les chocs avec les ions fixes et où l'on peut négliger la force magnétique car la vitesse des électrons est extrêmement petite. On en déduit donc $\vec{v} = -(e/\lambda)\vec{E}$ et donc $\vec{j} = (ne^2/\lambda)\vec{E} = \gamma\vec{E}$.

Dans le cas du circuit mobile, il faut bien sûr écrire $\vec{j} = -ne\vec{v}_{rel}$ car les intensités sont mesurées à travers le conducteur mobile et dans l'équation électrique la force dissipatrice est en $-\lambda\vec{v}_{rel}$ car c'est la vitesse relative des électrons par rapport à la matière qui provoque les chocs ; enfin la vitesse des électrons dans la force magnétique est la vitesse absolue qui se confond avec la vitesse d'entraînement car la vitesse relative est extrêmement petite, on a donc :

$$\vec{0} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) - \lambda \vec{v}_{rel}$$

d'où :

$$\vec{v}_{rel} = -(e/\lambda)(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

et :

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{\lambda}(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

Calcul de la f.e.m. pour un circuit mobile dans un champ stationnaire.

La définition du XXIII-1 s'adapte donc ici en :

$$\int_A^B (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = V_A - V_B + e_{AB}$$

Or en régime stationnaire $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ et :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_A^B -dV = V_A - V_B$$

d'où par soustraction :

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

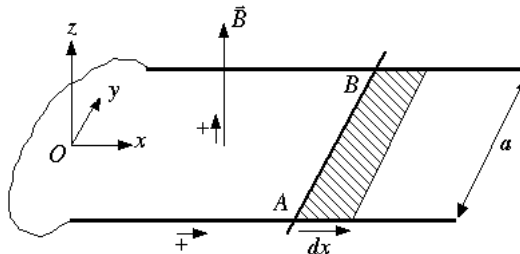
et pour un circuit fermé :

$$e = \oint (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

XXIII-3.b Loi de Faraday

Considérons le dispositif des «rails de LAPLACE» constitué de deux rails fixes

parallèles à Oy , sur lesquels se déplace en translation selon Ox une tige AB de longueur a avec la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$, le circuit est fermé de façon quelconque. Le tout est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$. On choisit pour le circuit un sens positif tel que la règle du tire-bouchon oriente la surface dans le même sens que le champ.



On a :

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (v \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z) \cdot dy \vec{e}_y = \int_A^B -v B \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y = - \int_A^B v B dy = -v B a$$

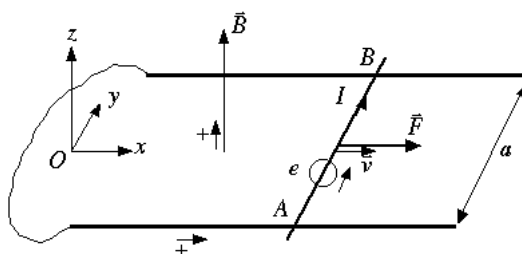
D'autre part, quand la tige se déplace de dx , la surface du circuit augmente de $dS = a dx$ et de flux de $d\Phi = B a dx = B a v dt$, d'où :

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -B a v = e_{AB}$$

La formule de LAPLACE s'avère encore valable dans ce contexte et l'on peut montrer qu'il en est toujours de même. En fait c'est physiquement raisonnable, car si l'on se place dans le référentiel du circuit, celui-ci y est fixe ; par contre, il «voit» un champ variable. L'égalité entre les deux formules traduit la relativité des points de vue.

Il serait cependant déraisonnable de n'apprendre que la formule de FARADAY, car il est souvent plus aisé de calculer la circulation de $\vec{v} \wedge \vec{B}$ que de calculer le flux magnétique.

On a donc le schéma électrique équivalent :



Remarque énergétique.

Supposons que le circuit précédent soit parcouru par un courant I , que celui-ci soit créé par les phénomènes d'induction ou par un générateur non représenté. La tige est soumise à la force de LAPLACE :

$$\vec{F} = \int_A^B I d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_A^B I dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = \int_A^B I B dy \vec{e}_x = I B a \vec{e}_x$$

La puissance de cette force est :

$$\mathcal{P}_{méca} = \vec{F} \cdot \vec{v} = I B a \vec{e}_x \cdot v \vec{e}_x = I v B a$$

Par ailleurs, la puissance électrique délivrée par la f.e.m. d'induction est :

$$\mathcal{P}_{élec} = e I = -(B a v) I = -I v B a$$

et donc :

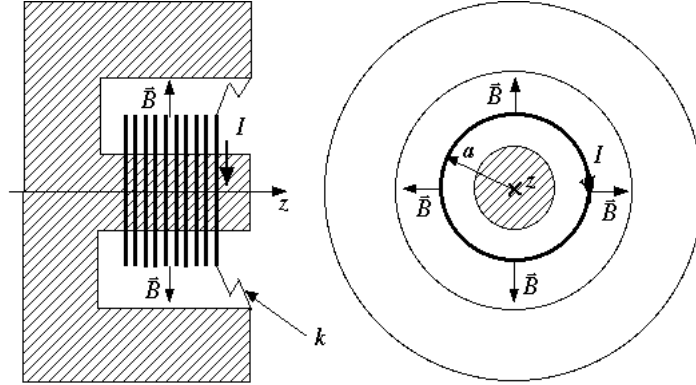
$$\boxed{\mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{élec} = 0}$$

Dans un champ magnétique stationnaire, le couplage entre électricité et mécanique est parfait, le bilan énergétique est nul.

XXIII-3.c Couplages électromécaniques.

Reprenons cette étude de couplage électromécanique sur un exemple plus technologique, le haut-parleur électrodynamique.

Description.



Une bobine de masse m composée de N spires circulaires coaxiales d'axe Oz et de rayon a est mobile en translation selon l'axe Oz horizontal; une membrane exerce sur la bobine une force de rappel de raideur k et l'onde sonore qu'elle génère provoque un amortissement modélisé par une force de frottement fluide de coefficient λ . Elle est plongée dans l'entrefer d'un aimant permanent qui crée un champ magnétique radial vers l'extérieur soit $B \vec{e}_r$. On note z le déplacement de la bobine et I l'intensité électrique qui la traverse, le sens positif du courant est le sens orthoradial défini par la règle du tire-bouchon appliquée à Oz . Dans ce genre d'étude, il est essentiel de préciser les sens positifs du courant et du déplacement, faute de quoi on s'expose à de graves déboires.

Equation mécanique.

La force de LAPLACE est :

$$\vec{F}_L = \int I dl \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_r = -IB \int dl \vec{e}_z = -2N\pi a BI \vec{e}_z$$

En projection sur l'axe Oz , l'équation du mouvement est donc :

$$m \ddot{z} = -kz - \lambda \dot{z} - 2N\pi a BI$$

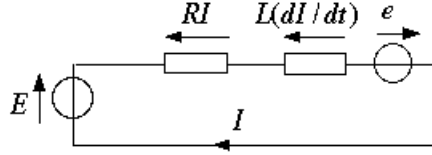
soit :

$$\boxed{m \ddot{z} + \lambda \dot{z} + kz = F_L = -2N\pi a BI}$$

Equation électrique.

Appelons R et L la résistance et l'inductance de la bobine, supposée alimentée par un générateur de force électromotrice E ; en notant e la force

électromotrice d'induction, le schéma électrique équivalent est celui de la figure suivante.



d'où $E = RI + L(dI/dt) - e$. Or on calcule e par :

$$e = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int (\dot{z} \vec{e}_z \cdot B \vec{e}_r) \cdot dl \vec{e}_\theta = \dot{z} B \int \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = \dot{z} B \int dl = 2N\pi a B \dot{z}$$

Remarquons au passage qu'on retrouve la condition de couplage parfait :

$$\mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{élec} = eI + F_L \dot{z} = 2N\pi a B \dot{z} I - 2N\pi a B I \dot{z} = 0$$

L'équation électrique est donc :

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} - 2N\pi a B \dot{z}$$

Fonction de transfert et impédance motionnelle.

Notons $\alpha = 2N\pi a B$ qui est un coefficient de couplage. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = -\alpha I \\ E(t) = RI + L \frac{dI}{dt} - \alpha \dot{z} \end{cases}$$

En régime sinusoïdal, on en déduit pour les valeurs complexes :

$$\begin{cases} (k + j\lambda\omega - m\omega^2) \underline{z} = -\alpha \underline{I} \\ \underline{E} = (R + jL\omega) \underline{I} - j\alpha\omega \underline{z} \end{cases}$$

On en déduit aisément une relation donnant l'intensité :

$$\underline{E} = Z \underline{I}$$

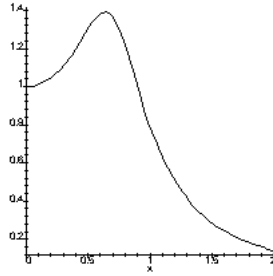
avec :

$$Z = R + jL\omega + \frac{j\alpha^2\omega}{(k + j\lambda\omega - m\omega^2)}$$

On voit que l'impédance classique est corrigée par un terme provenant du couplage et appelé *impédance motionnelle*.

On en tire une équation donnant le mouvement :

$$\underline{z} = \mathcal{H}(j\omega) \underline{E}$$



avec :

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{-\alpha}{(k + j\lambda\omega - m\omega^2)(R + jL\omega) - j\alpha^2\omega}$$

Voici un exemple de tracé de $G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|$ en fonction de ω avec des valeurs arbitraires.

Cette courbe n'est pas très bonne, on aimerait une courbe la plus plate possible jusqu'à la fréquence maximale audible par l'oreille humaine et ça c'est tout un art.

Transducteurs électromécaniques : moteurs et génératrices.

De façon tout à fait générale, les phénomènes d'induction permettent toutes sortes de couplages électromécaniques ; dès qu'un circuit a un degré de liberté dans un champ magnétique, le passage d'un courant crée des forces de LAPLACE qui provoquent ou modifient le mouvement et inversement le mouvement crée une force électromotrice qui provoque ou modifie le passage d'un courant. D'un point de vue théorique, il y a deux inconnues, le mouvement et le courant et il faudra deux équations tirées d'une étude électrique et d'une étude mécanique. D'un point de vue technologique, il y a transformation d'énergie électrique en énergie mécanique (on a affaire à un moteur) ou l'inverse (il s'agit alors d'une génératrice). Il n'est pas de notre ressort d'étudier le riche bestiaire des moteurs et génératrices ; quelques exemples seront donnés en exercice.

XXIII-4 Indications sur les courants de Foucault.

L'induction a été étudiée en détail pour des circuits filiformes. Elle existe aussi pour des masses métalliques conductrices, qu'elles soient fixes dans un champ variable ou mobiles dans un champ stationnaire. Apparaissent alors des champs électromoteurs et des courants volumiques, donc des effets JOULE et des forces de LAPLACE. Tantôt c'est un défaut qu'il faudra minimiser (échauffement des noyaux de fer d'un transformateur), tantôt c'est un effet recherché (four à induction, ralentisseur de camions et d'autocars). Comme pour les moteurs et génératrices, on verra quelques exemples en exercice.