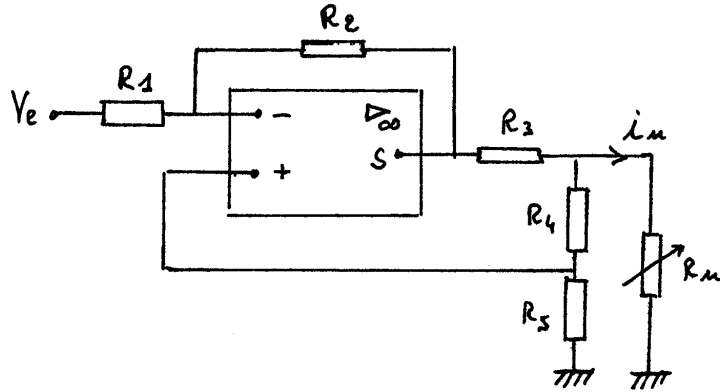


Générateur de courant commandé.

Question 1 :

A quelle condition, dans le montage suivant, le courant i_u est-il indépendant de la valeur de la résistance R_u , modélisant la résistance d'entrée du circuit dans lequel débite le reste du montage ?



Appelons V_+ , V_- , V_s les tensions par rapport à la masse des bornes d'entrée non inverseuse, d'entrée inverseuse et de sortie de l'amplificateur opérationnel et V_u la tension aux bornes de R_u , c'est-à-dire la tension de sortie du montage.

Comme les entrées ne consomment pas de courant, le théorème de Millmann appliqué à ces bornes donne respectivement

$$V_- = \frac{V_e/R_1 + V_s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_2 V_e + R_1 V_s}{R_1 + R_2}$$

$$V_+ = \frac{V_u/R_4 + 0/R_5}{1/R_4 + 1/R_5} = \frac{R_5 V_u}{R_4 + R_5}$$

Sous réserve que l'on travaille sous la limite de la saturation en sortie, la différence de potentiel entre les deux entrées est nulle ($V_+ = V_-$) d'où

$$\frac{R_5}{R_4 + R_5} V_u - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_e \quad (\text{équation 1})$$

Ce qui donne une première équation entre les inconnues V_s et V_u et la donnée V_e ; une seconde suffirait à notre bonheur. On pense donc à appliquer le théorème de Millmann en un autre point. Gardons-nous de l'utiliser à la sortie de l'amplificateur opérationnel car le courant qui en sort n'est pas nul, contrairement aux entrées. On l'utilise donc au nœud reliant R_3 , R_u et non pas R_4 mais, plus astucieusement, l'ensemble $R_4 + R_5$ relié à la masse, ce qui est licite puisque le même courant traverse R_4 et R_5 et que le fil relié à la borne non inverseuse, parcouru par un courant nul, peut être virtuellement escamoté vis à vis des courants. Donc

$$V_u = \frac{V_s/R_3 + 0/(R_4 + R_5) + 0/R_u}{1/R_3 + 1/(R_4 + R_5) + 1/R_u}$$

qu'on peut réécrire

$$V_s/R_3 = [1/R_3 + 1/(R_4 + R_5) + 1/R_u] V_u$$

ou encore

$$V_s = \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} + \frac{R_3}{R_u} \right) V_u \quad (\text{équation 2})$$

Reportons l'équation 2 dans l'équation 1

$$\left[\left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) - \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} + \frac{R_3}{R_u} \right) \right] V_u = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_e$$

ce qui permet de calculer V_u mais aussi i_u car $V_u = R_u i_u$ que l'on reporte dans la dernière équation :

$$\left[\left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) R_u - \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \left(R_u + \frac{R_3 R_u}{R_4 + R_5} + R_3 \right) \right] i_u = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_e \quad (\text{équation 3})$$

On peut affirmer que i_u est indépendant de R_u si son coefficient dans le premier membre n'en dépend pas non plus, donc si le coefficient de R_u dans le coefficient de i_u (tout le monde suit ?) est nul, soit successivement, pour arriver à une formulation minimaliste :

$$\begin{aligned} \frac{R_5}{R_4 + R_5} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} \right) & (\text{équation 4}) \\ \frac{R_5}{R_4 + R_5} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_3 + R_4 + R_5}{R_4 + R_5} \\ R_5 (R_1 + R_2) &= R_1 (R_3 + R_4 + R_5) \\ R_5 R_2 &= R_1 (R_3 + R_4) \end{aligned}$$

Question 2 :

Quel est l'intérêt ? Calculer le courant et montrer qu'il est proportionnel à V_e .

Un dispositif qui délivre un courant constant est un générateur de courant.

Un générateur linéaire de résistance ni nulle ni infinie peut toujours être considéré soit comme un générateur de tension soit comme un générateur de courant car

$$U = E - R I \iff I = \frac{E}{R} - \frac{1}{R} U$$

Un générateur de tension parfait a une résistance nulle et un générateur linéaire de faible résistance peut être assimilé de façon pertinente par un générateur de tension. Un générateur de courant parfait a une résistance infinie et un générateur linéaire de grande résistance peut être assimilé de façon pertinente par un générateur de courant. Les générateurs les plus courants (piles électrochimiques et génératrices électromécaniques : dynamos, alternateurs) ont plutôt de faibles résistances ; on ne dispose pratiquement pas de générateurs de courant (signalons quand même les photopiles et autres générateurs photovoltaïques, mais bon, il faut du soleil).

Si l'on reporte l'équation 4 dans l'équation 3, on tire :

$$\begin{aligned} - \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) R_3 i_u &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_e \\ -R_1 R_3 i_u &= R_2 V_e \end{aligned}$$

ce qui prouve que i_u est proportionnel à V_e : non seulement on a fabriqué un générateur de courant parfait, mais on peut en régler le courant caractéristique par l'intermédiaire de V_e ; il s'agit donc d'un générateur de courant commandé par une tension.

Question 3 :

Vérifier la stabilité du montage.

Le plus dur est ici de ne pas se noyer dans les calculs !

On a toujours

$$V_- = \frac{R_2 V_e + R_1 V_s}{R_1 + R_2}$$

$$V_+ = \frac{R_5 V_u}{R_4 + R_5}$$

$$V_s = \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} + \frac{R_3}{R_u}\right) V_u$$

mais on n'a plus $V_+ = V_-$ qu'on remplace par l'équation phénoménologique *ad hoc*

$$\tau \frac{dV_s}{dt} + V_s = \mu (V_+ - V_-)$$

On ne se lance pas dans les calculs avant d'avoir établi sa stratégie : «Il n'est pas de vent favorable pour celui qui ne sait pas où il va» (Sénèque). Je cherche une équation différentielle vérifiée par V_s ; la quatrième relation me tend les bras. Si j'y reporte la première, j'y injecte V_e , supposé connu et V_s , c'est bien, mais si j'y reporte V_- , j'introduis V_u , ce n'est pas le but recherché. Le problème est identifié, la solution crève alors les yeux : je reporte la troisième relation dans la seconde avant de reporter V_- dans la dernière. Je fais ce que j'ai dit et je réfléchirai à nouveau avant le moindre calcul.

$$\tau \frac{dV_s}{dt} + V_s = \mu \frac{R_5}{R_4 + R_5} \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} + \frac{R_3}{R_u}\right)^{-1} V_s - \mu \frac{R_2 V_e + R_1 V_s}{R_1 + R_2}$$

Quelque compliquée que soit cette expression, elle est de la forme

$$\tau \frac{dV_s}{dt} + \alpha V_s = f(t)$$

dont on sait que la stabilité ne dépend pas du second membre, mais simplement du fait que α soit du même signe que τ , donc positif. Identifions donc cet α , en négligeant le terme issu du premier membre, car μ est très grand.

$$\alpha = \mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \mu \frac{R_5}{R_4 + R_5} \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} + \frac{R_3}{R_u}\right)^{-1}$$

du signe de, puisque μ est positif,

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_3}{R_4 + R_5} + \frac{R_3}{R_u}\right) - \frac{R_5}{R_4 + R_5}$$

c'est-à-dire, si l'on tient compte de l'équation 4, du signe de

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_3}{R_u}$$

qui est bien positif : le dispositif est stable.

Vous voyez : pas besoin de se lancer dans quatre pages de calcul, on visualise l'objectif avant de foncer.

Question 4 :

Pourquoi fallait-il vérifier la stabilité du montage ?

Parce qu'il y a une rétroaction sur la borne non-inverseuse, pardi !