

Chambre à bulles.

Question 1 :

Dans une chambre à bulles règne un champ magnétique uniforme et stationnaire de module B et parallèle à Oz (le champ électrique \mathbf{y} est nul). Une réaction nucléaire en O crée une particule élémentaire de masse m et de charge q avec une vitesse initiale contenue par le choix des axes dans le plan xOz , de composante v_0 sur Ox et v_1 sur Oz . On rend compte des pertes énergétiques par rayonnement et interaction avec la matière grâce à une force phénoménologique de frottement fluide $-\lambda \vec{v}$. Mettre en équation le mouvement de la particule et en déduire sa trajectoire. On pourra poser $\xi = x + jy$. Trouver le point asymptote où s'arrêtera la charge.

Mettons en équation le mouvement de la charge soumise à la seule force magnétique

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v}$$

$$m (\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z) = q (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z) \wedge B \vec{e}_z - \lambda (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z)$$

soit en projection sur les trois axes

$$\begin{cases} m \ddot{x} = q B \dot{y} - \lambda \dot{x} \\ m \ddot{y} = -q B \dot{x} - \lambda \dot{y} \\ m \ddot{z} = -\lambda \dot{z} \end{cases}$$

Posons $\omega_c = q B/m$ (la classique pulsation cyclotron) et $\tau = m/\lambda$ (constante de temps caractéristique des pertes énergétiques), on arrive à

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} - \frac{1}{\tau} \dot{x} \quad (\text{équation 1})$$

$$\ddot{y} = -\omega_c \dot{x} - \frac{1}{\tau} \dot{y} \quad (\text{équation 2})$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{\tau} \dot{z} \quad (\text{équation 3})$$

L'équation 3 (en \dot{z}) se résout aisément et donne avec pour conditions initiales $\dot{z} = v_1$ et $z = 0$ à $t = 0$

$$\dot{z} = v_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{d'où} \quad z = \tau v_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On utilise la méthode¹ classique pour résoudre conjointement l'équation 1 et l'équation 2 : on introduit une variable complexe (attention, elle n'a rien à voir avec une amplitude complexe) $\xi = x + jy$ et l'on effectue la combinaison des équations suscitées avec comme coefficients respectivement 1 et j , d'où

$$(\ddot{x} + j\ddot{y}) = \omega_c (\dot{y} - j\dot{x}) - \frac{1}{\tau} (\dot{x} + j\dot{y})$$

$$(\ddot{x} + j\ddot{y}) = -j\omega_c (\dot{x} + j\dot{y}) - \frac{1}{\tau} (\dot{x} + j\dot{y})$$

$$\ddot{\xi} = -j\omega_c \dot{\xi} - \frac{1}{\tau} \dot{\xi}$$

$$\ddot{\xi} = -\left(\frac{1}{\tau} + j\omega_c\right) \dot{\xi}$$

Pour cette équation, en fait en $\dot{\xi}$, les conditions initiales à $t = 0$ sont $x = y = 0$ donc $\xi = 0$ et $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$ donc $\dot{\xi} = v_0$, doù

$$\dot{\xi} = v_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega_c\right)t}$$

¹Une méthode est une astuce que l'on utilise plus d'une fois

$$\xi = \frac{v_0}{\frac{1}{\tau} + j\omega_c} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega_c\right)t} \right)$$

Notons $\frac{1}{\tau} + j\omega_c = \frac{1}{\tau^*} e^{j\varphi}$ avec $\frac{1}{\tau^*2} = \frac{1}{\tau^2} + \omega_c^2$ et $\tan \varphi = \tau \omega_c$, alors

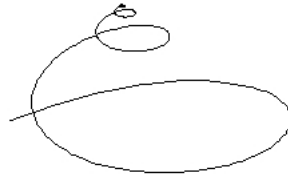
$$\xi = \tau^* v_0 e^{-j\varphi} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega_c\right)t} \right) = \tau^* v_0 \left(e^{-j\varphi} - e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j(\omega_c t + \varphi)} \right)$$

$$x = \Re \xi = \tau^* v_0 \left[\cos \varphi - e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_c t + \varphi) \right]$$

$$y = \Im \xi = \tau^* v_0 \left[-\sin \varphi + e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_c t + \varphi) \right]$$

$$\text{Et rappelons : } z = \tau v_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Voici en perspective l'allure de la trajectoire, pour des valeurs arbitraires des constantes :



Au bout d'environ 7τ , la limite est atteinte et la charge s'est arrêtée au point de coordonnées $x_\infty = \tau^* v_0 \cos \varphi$, $y_\infty = -\tau^* v_0 \sin \varphi$, $z_\infty = \tau v_1$

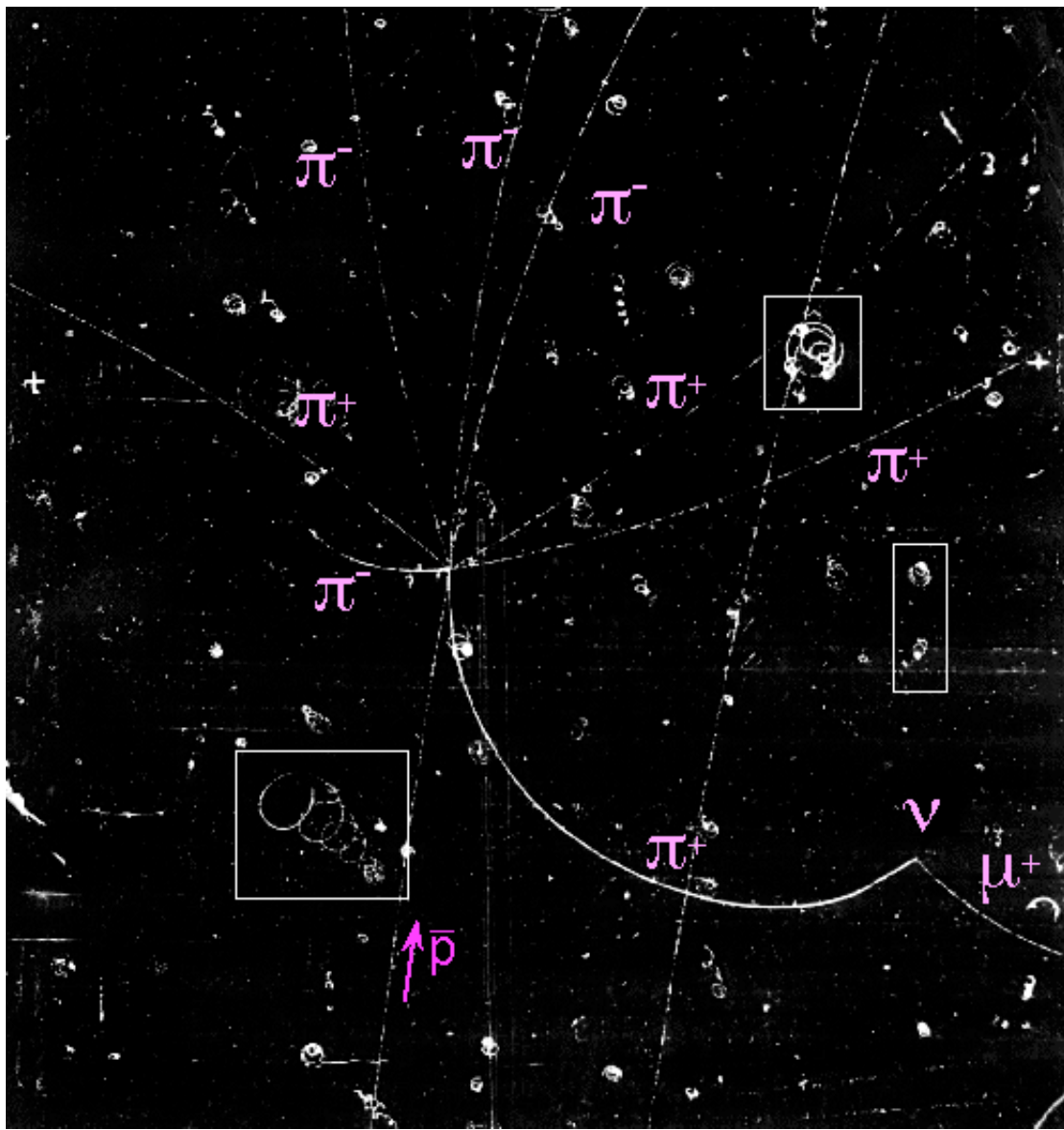
Question 2 :

Montrer que l'allure de la trajectoire dépend essentiellement de la quantité de mouvement initiale de la particule.

Dans le plan Oxy , en l'absence de dissipation et en bonne approximation en cas de dissipation faible, la trajectoire est un cercle de rayon $R = \tau^* v_0$ et l'on aurait $\tau^* \approx (1/\omega_c) = m/qB$ donc $R \approx \frac{m v_0}{qB}$. Pour des particules élémentaires de charge $\pm e$ et dans un même champ uniforme, le rayon de courbure permet donc de mesurer la quantité de mouvement $p_0 = m v_0$, ou plus exactement sa projection dans le plan Oxy . Le signe de R correspond au sens de rotation et dépend de signe de la charge.

Question 3 :

Dans une chambre à bulles le passage d'une particule chargée provoque la vaporisation d'un liquide placé dans une situation thermodynamique de retard à l'ébullition et la trajectoire de la particule est matérialisée par un chapelet de bulles. Sur la magnifique photographie ci-dessous, l'axe optique de l'appareil étant parallèle au champ magnétique, on observe le choc d'un anti-proton injecté dans la chambre sur un proton (noyau d'hydrogène) du liquide qu'elle contient et donc au repos. Il y a formation de huit pions, quatre positifs et quatre négatifs. On y observe aussi le mouvement de nombreux électrons dont quelques-uns ont été encadrés. Commentez cette photo.



Le choc d'un anti-proton \bar{p} de grande quantité de mouvement (donc trajectoire quasi-rectiligne) sur un proton au repos (donc sans trajectoire visible) donne naissance à quatre pions positifs π^+ qui tournent dans un sens et quatre pions négatifs π^- qui tournent dans l'autre. Ils se partagent la quantité de mouvement initiale donc ont chacun une quantité de mouvement plus faible que celle de l'anti-proton incident : les rayons de courbure de leurs trajectoires sont plus petits que pour l'anti-proton. L'un des pions se transforme en muon μ^+ avec changement de direction, il ne peut y avoir conservation vectorielle de la quantité de mouvement avec un tel changement de direction : le pion s'est transformé en muon plus une autre particule invisible, un neutrino en l'occurrence. Enfin tout ce beau monde, de grande énergie arrache des électrons à tous les atomes du milieu lorsqu'ils les frôlent sans perdre beaucoup de leur énergie : les électrons ainsi formés ont une faible quantité de mouvement et des trajectoires de petit rayon, de plus ils perdent rapidement leur énergie par rayonnement. Ceci explique la multitude de petites spirales que l'on observe sur le cliché et l'on a encadré les deux plus superbes plus un couple de plus petites.

Bien que photographié dans l'axe du champ, la trajectoire en bas à gauche présente un effet de perspective. C'est tout simplement que l'appareil photo à grande profondeur de champ ne réalise pas une projection orthogonale. L'électron s'éloigne de l'appareil et la parallaxe donne l'illusion qu'il se rapproche du centre.