

Pouvoir de résolution d'un télescope.

On rend compte ici des propriétés d'un télescope de diamètre D en l'assimilant à un diaphragme rectangulaire (très long dans la direction de Oy et de largeur D dans la direction de Ox) accouplé à une lentille convergente d'axe optique Oz , de distance focale f' et de foyer F' . La lumière est filtrée, on la considère comme monochromatique. Dans le plan focal, la tache de diffraction est concentrée sur l'axe $F'X$ et l'éclairement y dépend de X . On observe une étoile double formée de deux étoiles, supposées ici de même puissance, dans le plan Oxz et faisant avec Oz deux petits angles $\pm\theta/2$.

Question 1 :

Tracer sommairement la courbe donnant l'éclairement $\mathcal{E}(X)$ pour $\theta = 0,8\lambda/D$, pour $\theta = \lambda/D$ et pour $\theta = 1,2\lambda/D$.

On suppose que le lecteur connaît son cours. Avec une source à l'infini dans la direction de l'axe optique, on obtient sur l'axe $F'x$ un éclairement

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{snc}^2\left(\frac{\pi D x}{\lambda f'}\right)$$

où $\operatorname{snc}(u) = \sin(u)/u$. Il sait aussi que si l'on déplace la source, la figure de diffraction est simplement traduite et son centre est au niveau de l'image géométrique de la source qu'on place aisément en utilisant le rayon issu de la source et passant par le centre optique de la lentille; elle se situe donc pour l'étoile dans la direction $\theta/2$ au point d'abscisse $f' \tan(\theta/2) \approx f' \theta/2$. Il sait pour finir qu'il ne reste qu'à additionner les deux éclairissements dus aux deux étoiles-sources puisqu'elles sont incohérentes. Donc, avec deux étoiles de même puissance :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[\operatorname{snc}^2\left(\frac{\pi D (x - f' \theta/2)}{\lambda f'}\right) + \operatorname{snc}^2\left(\frac{\pi D (x + f' \theta/2)}{\lambda f'}\right) \right]$$

Pour alléger l'étude posons $u = \frac{Dx}{\lambda f'}$, rappelons que la demi-largeur de la tache principale de la figure de diffraction centrée en F' correspond à $\operatorname{snc}(\pi)$ soit à un angle $\theta_0 = x_0/f' = \lambda/D$; on peut donc noter $\alpha = D\theta/\lambda$ d'où

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_0 \left[\operatorname{snc}^2 \pi (u - \alpha/2) + \operatorname{snc}^2 \pi (u + \alpha/2) \right]$$

Pour chacune des valeurs proposées de α (0,8, 1 et 1,2), il importe de calculer les valeurs de l'éclairement au centre de chacune des taches soit

$$\mathcal{E}(\alpha/2) = \mathcal{E}(-\alpha/2) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \operatorname{snc}^2(\pi \alpha) \right]$$

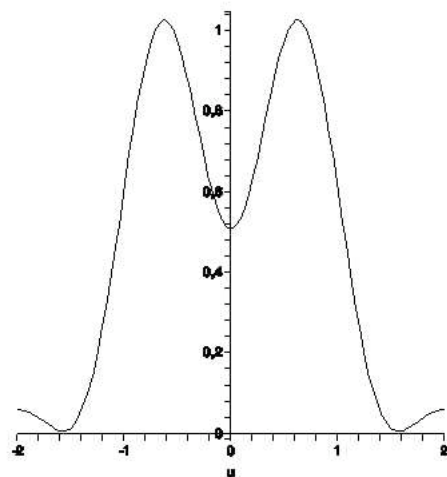
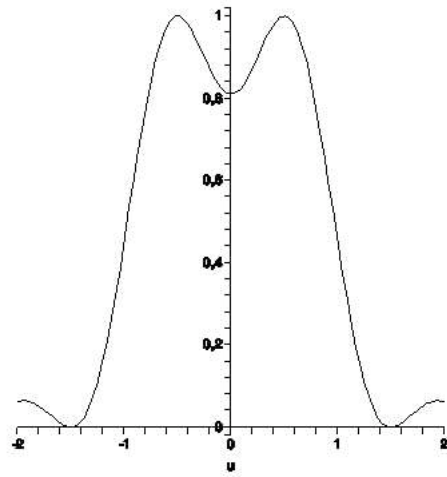
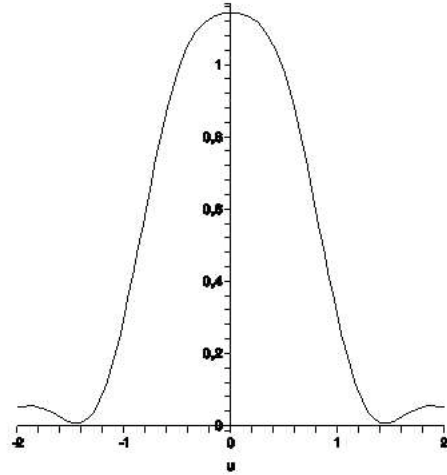
(égalité par symétrie) et au centre de symétrie de la figure soit

$$\mathcal{E}(0) = 2 \mathcal{E}_0 \operatorname{snc}^2(\pi \alpha/2)$$

Prenons $\mathcal{E}(0)$ comme unité (formellement $\mathcal{E}(0) = 1$)

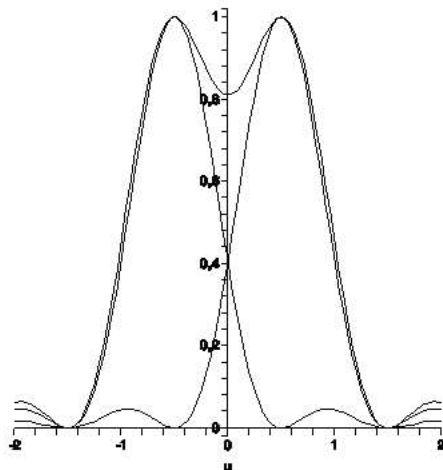
- pour $\alpha = 0,8$, on a
 - en $u = \alpha/2$, $\mathcal{E} = 1 + \operatorname{snc}^2(0,8\pi) = 1,055$
 - en $u = 0$, $\mathcal{E} = 2 \operatorname{snc}^2(0,4\pi) = 1,146$
- pour $\alpha = 1$, on a
 - en $u = \alpha/2$, $\mathcal{E} = 1 + \operatorname{snc}^2(\pi) = 1,000$
 - en $u = 0$, $\mathcal{E} = 2 \operatorname{snc}^2(0,5\pi) = 0,811$
- pour $\alpha = 1,2$, on a
 - en $u = \alpha/2$, $\mathcal{E} = 1 + \operatorname{snc}^2(1,2\pi) = 1,024$
 - en $u = 0$, $\mathcal{E} = 2 \operatorname{snc}^2(0,6\pi) = 0,510$

On devine que dans le premier cas, on ne voit qu'une seule bosse et dans les deux autres deux bosses, tout juste dans le second et nettement dans le dernier. Vérifions le grâce à un grapheur. Dans l'ordre précédent pour les valeurs de α , on a tracé le graphe de $\mathcal{E}(u)$ entre -2 et 2

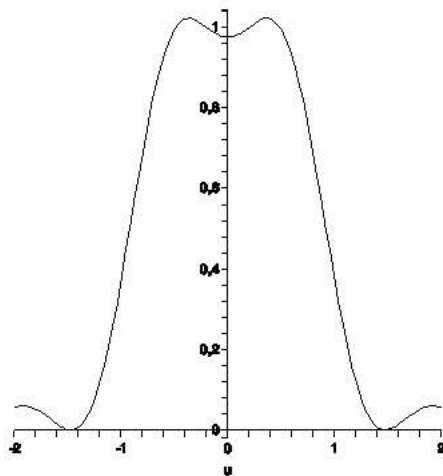


La courbe centrale fait office de frontière entre les courbes «chameau» à une bosse et où l'on ne prend pas conscience qu'il y a deux étoiles et les courbes «dromadaire» où l'étoile double est «résolue». La frontière est aisée à formuler et est connue sous le nom de critère de Rayleigh : le sommet de la première

tache est confondu (c'est-à-dire obtenu pour la même valeur de u que) avec le premier minimum nul de la seconde, comme le montre le graphe suivant où figurent les deux termes de la somme.



En fait la charnière serait plus près de $\alpha = 0,9$ comme le montre la figure ci-dessous mais il s'agit d'un critère qui se veut simple à retenir, la réalité expérimentale variant d'un observateur à l'autre.



Question 2 :

Conclure en introduisant la notion de pouvoir séparateur. Donner des ordres de grandeur.

L'angle minimum en dessous duquel une étoile double est perçue comme une étoile simple est donc

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{D}$$

Avec $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ (jaune, là où l'œil est le plus sensible en vision nocturne) et pour une petite lunette de diamètre $D = 10 \text{ cm}$, on trouve

$$\theta_{min} = 0,55 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

qui est de l'ordre de la seconde d'angle (π radians sont 180° donc une minute vaut $\pi/(18 \times 60 \times 60) = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$) ce qui permettrait de distinguer deux étoiles distantes d'une unité astronomique

(la distance Soleil-Terre) placée à un parsec (c'est la définition du parsec) qui vaut, comme chacun sait, 3,25 années-lumière. Un télescope géant (10 m de diamètre pour l'américain d'Hawaï) a un pouvoir de résolution d'un centième de seconde d'angle.

En radio-astronomie, on utilise $\lambda = 21$ cm émise par l'hydrogène. La longueur d'onde est 400 000 fois plus grande donc, à taille égale, l'angle minimum aussi : avec un radiotélescope de 10 m de diamètre il serait de l'ordre de 400 secondes soit environ 6 minutes ou un dixième de degré, c'est médiocre.