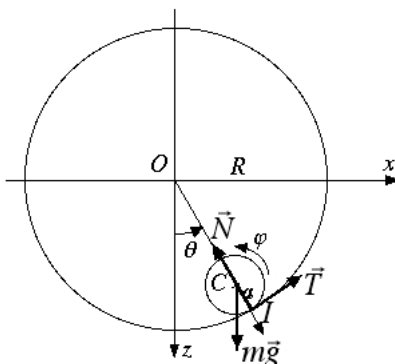


Roulement d'un cylindre dans un autre.

Un cylindre plein, homogène, de masse m , de rayon a , de centre C d'axe Cy horizontal, de moment d'inertie $J = (1/2) m a^2$ par rapport à cet axe roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre fixe creux de rayon R , de centre O et d'axe Oy . Oz est la verticale descendante et Ox horizontal et orthogonal à l'axe. On note θ l'angle orienté entre Oz et OC et φ l'angle dont tourne le cylindre mobile dans le repère barycentrique $Cxyz$. On appelle I le point de contact entre les deux cylindres, $\vec{N} = -N \vec{e}_r$ et $\vec{T} = T \vec{e}_\theta$ les composantes normale et tangentielle de la force exercée par le cylindre fixe sur le cylindre mobile (cf figure).



Question 1 :

Quelle relation lie φ et θ ?

Attention, dans cet exercice, si l'on se fie à son intuition, on se trompe aisément en considérant tacitement et fautivement que φ est compté à partir de CI et non de Cz .

Le vecteur rotation est identique dans le référentiel barycentrique et dans le référentiel du laboratoire. Par définition, dans le premier donc aussi dans le second, il vaut $\omega = \dot{\varphi} \vec{e}_y$

Il n'y a pas de glissement en I , donc par définition du non-glissement, $\vec{v}_I = \vec{0}$

Le point C décrit un cercle de centre O , de rayon $(R - a)$ et sa position est repérée par l'angle θ , donc classiquement, en introduisant la base locale formée de \vec{e}_r , vecteur unitaire de OC , radial et \vec{e}_θ orthoradial, $\vec{v}_C = (R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

La formule de changement de point, pour le champ des vitesses du cylindre mobile, donne

$$\vec{v}_C = \vec{v}_I + \vec{CI} \wedge \vec{\omega} \quad \text{soit}$$

$$(R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0} + a \vec{e}_r \wedge \dot{\varphi} \vec{e}_y \quad \text{soit}$$

$$(R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0} - a \dot{\varphi} \vec{e}_\theta$$

$$\text{d'où} \quad \dot{\varphi} = -\frac{R - a}{a} \dot{\theta}$$

Question 2 :

En déduire en fonction de θ , de ses dérivées et des constantes du problème l'énergie cinétique du cylindre mobile. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ .

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans son référentiel barycentrique, on a

$$E_C = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_C^* = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Ici $\omega = \dot{\varphi} = -\frac{R-a}{a} \dot{\theta}$, G est le point C et $\vec{v}_C = (R-a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et enfin $J = (1/2) m a^2$ d'où

$$E_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (R-a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R-a)^2 \dot{\theta}^2$$

par ailleurs, avec un axe vertical *descendant*, l'énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_P = -m g z_G = -m g (R-a) \cos \theta$$

La seule autre force subie par le cylindre mobile est la force de contact $\vec{N} + \vec{T}$, appliquée au point I de vitesse nulle puisqu'il n'y a pas glissement ; sa puissance est donc nulle et il y a conservation de l'énergie mécanique, soit

$$\frac{3}{4} m (R-a)^2 \dot{\theta}^2 - m g (R-a) \cos \theta = Cte$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\frac{3}{2} m (R-a)^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + m g (R-a) \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

Soit après simplifications par $\dot{\theta}$, m , $(R-a)$,

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R-a)} \sin \theta$$

Question 3 :

Trouver la période des petites oscillations.

Si au cours du mouvement θ reste petit alors $\sin \theta \approx \theta$ et

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R-a)} \theta$$

qui donne un mouvement sinusoïdal de pulsation $\Omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$ et de période

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}}$$

Question 4 :

Alors que $\theta = 0$, on communique au cylindre une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0$. A quelle condition le cylindre peut-il faire un tour complet ? On utilisera une première approche énergétique et une seconde concernant la réaction normale du support. Lorsque le tour complet est impossible, que se passe-t-il selon les valeurs de ω_0 ?

La conservation de l'énergie et les conditions initiales conduisent à

$$\frac{3}{4} m (R-a)^2 \dot{\theta}^2 - m g (R-a) \cos \theta = \frac{3}{4} m (R-a)^2 \omega_0^2 - m g (R-a) \quad (\text{équation 1})$$

soit après dérivation et simplification par $\dot{\theta}$

$$\frac{3}{2} m (R-a)^2 \ddot{\theta} + m g (R-a) \sin \theta = 0 \quad (\text{équation 2})$$

Aucune de ces équations ne peut être résolues explicitement ; par contre elles donnent respectivement une relation entre l'accélération angulaire et la position angulaire et entre la vitesse angulaire et la position angulaire :

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 - \frac{4g}{3(R-a)} (1 - \cos \theta) \quad (\text{équation 3})$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R-a)} \sin \theta \quad (\text{équation 4})$$

La première condition pour que le cylindre arrive en haut (et fasse donc un tour complet) est qu'il ait l'énergie suffisante pour le faire. Quand il monte, son énergie potentielle augmente et son énergie cinétique diminue. Si cette dernière s'annule avant d'arriver en haut, le cylindre s'arrête puis redescend et amorce un mouvement pendulaire périodique ; par contre, si elle reste positive jusqu'en haut, le cylindre tourne toujours dans le même sens.

La charnière entre les deux comportements est obtenue quand l'énergie cinétique, donc $\dot{\theta}^2$, s'annule exactement pour $\theta = \pi$ soit $\cos \theta = -1$, c'est à dire, selon l'équation 3, pour une valeur ω_1 de ω_0 égale à

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8g}{3(R-a)}}$$

En deça de cette valeur, le cylindre s'arrête pour l'angle θ_1 qui annule $\dot{\theta}^2$, soit

$$0 = \omega_0^2 - \frac{4g}{3(R-a)} (1 - \cos \theta_1)$$

$$1 - \cos \theta_1 = \frac{3(R-a)\omega_0^2}{4g}$$

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{4g - 3(R-a)\omega_0^2}{4g} \right)$$

La seconde condition est que le cylindre ne décolle pas, pour cela il faut la composante normale de la réaction du support ne s'annule pas ; on la calcule à partir du théorème du centre de gravité appliqué au cylindre.

$$m \vec{a}_C = \vec{N} + \vec{T} + m \vec{g}$$

soit en projection sur les directions radiales et orthoradiales :

$$-m(R-a)\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta$$

$$m(R-a)\ddot{\theta} = T - mg \sin \theta$$

On en déduit, en reportant les résultats de l'équation 3 et de l'équation 4

$$N = mg \cos \theta + m(R-a) \left[\omega_0^2 - \frac{4g}{3(R-a)} (1 - \cos \theta) \right]$$

$$N = mg \frac{7 \cos \theta - 4}{3} + m(R-a)\omega_0^2 \quad (\text{équation 5})$$

$$T = mg \sin \theta - m(R-a) \frac{2g}{3(R-a)} \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{3} m g \sin \theta \quad (\text{équation 6})$$

L'équation 5 montre que la valeur de N décroît de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$. Si elle ne s'annule jamais le cylindre ne décolle pas et les conclusions de l'étude énergétique restent valables; sinon le cylindre décolle et quitte la piste, on assiste alors à une chute libre.

La charnière entre les deux comportements est obtenue quand N s'annule exactement pour $\theta = \pi$ soit $\cos \theta = -1$, c'est à dire, selon l'équation 5, pour une valeur ω_2 de ω_0 égale à

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{11g}{3(R-a)}}$$

En deça de cette valeur, le cylindre s'arrête pour l'angle θ_2 qui annule N , soit

$$\begin{aligned} 0 &= m g \frac{7 \cos \theta_2 - 4}{3} + m (R - a) \omega_0^2 \\ 4 - 7 \cos \theta_2 &= \frac{3(R-a)\omega_0^2}{g} \\ \theta_2 &= \arccos \left(\frac{4g - 3(R-a)\omega_0^2}{7g} \right) \end{aligned}$$

Pour que le cylindre puisse arriver en haut sans décoller, il faut $\omega_0 > \omega_1$ et $\omega_0 > \omega_2$; or $\omega_2 > \omega_1$, la condition pour que le mouvement puisse être toujours dans le même sens est donc $\omega_0 > \omega_2$.

Pour $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, le cylindre a l'énergie suffisante pour arriver en haut mais il décolle avant.

Pour $\omega_0 < \omega_1$, le cylindre n'a l'énergie que pour aller en θ_1 mais il peut décoller en θ_2 ; reste à savoir si θ_2 peut être atteint c'est à dire s'il est inférieur à θ_1

L'étude est facilitée si l'on remarque que $\cos \theta_2 = \frac{4}{7} \cos \theta_1$.

Ou bien $\cos \theta_1 > 0$ (soit $\theta_1 < \pi/2$) alors $\cos \theta_2 = \frac{4}{7} \cos \theta_1 < \cos \theta_1$ et $\theta_2 > \theta_1$ et le point de décollage n'est pas atteint : le mouvement est alternatif périodique.

Ou bien $\cos \theta_1 < 0$ (soit $\theta_1 > \pi/2$) alors $\cos \theta_2 = \frac{4}{7} \cos \theta_1 > \cos \theta_1$ et $\theta_2 < \theta_1$ et le point de décollage est atteint : le cylindre quitte la piste.

La charnière entre les deux comportements est obtenue quand $\cos \theta_1$ s'annule c'est à dire pour une valeur ω_3 de ω_0 égale à

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4g}{3(R-a)}}$$

En résumé

- pour $\omega_0 < \omega_3$, le mouvement est alternatif périodique.
- pour $\omega_3 < \omega_0 < \omega_2$, le cylindre décolle et tombe en chute libre parabolique.
- pour $\omega_0 > \omega_2$, le cylindre tourne toujours dans le même sens.

Question 5 :

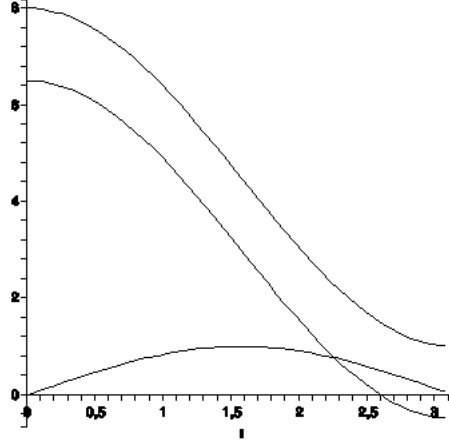
L'étude ci-dessus suppose qu'il n'y a pas glissement. Est-ce le cas ?

Si f est le coefficient de frottement, la condition de non-glissement est $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$, soit $|T| < f N$ soit en reportant les résultats de l'équation 5 et de l'équation 6 et pour $0 < \theta < \pi$

$$\frac{1}{3} m g \sin \theta < f m \left(g \frac{7 \cos \theta - 4}{3} + (R - a) \omega_0^2 \right)$$

$$\text{soit } \sin \theta < f(7 \cos \theta - 4 + \alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{3(R-a)\omega_0^2}{g}$$

Un résolution graphique s'impose : on trace le graphe des deux membres en fonction de θ



On a ici tracé le graphe de $\sin \theta$ et deux graphes pour le second membre, tous deux avec $f = 0,5$, le premier (celui du haut) avec $\alpha = 13$ et le second (celui du bas) avec $\alpha = 10$. Dans le premier cas, pas d'intersection et le mouvement et celui qui a été prévu plus haut. Dans le second, il y a une intersection et à un moment donné le cylindre commence à glisser ; à partir de ce moment l'étude cesse d'être valable.

Remarque : On peut résoudre explicitement l'équation réécrite

$$k \cos \theta - \sin \theta = \beta \quad \text{avec } k = 7f \quad \text{et} \quad \beta = f(4 - \alpha)$$

Successivement

$$\sqrt{k^2 + 1} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \sin \theta \right) = \beta$$

Soit φ l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos \varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$ et $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$ donc $\tan \varphi = \frac{1}{k}$ ou $\varphi = \arctan(\frac{1}{k})$. On a

$$\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\theta + \varphi = \pm \arccos \frac{\beta}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Cette équation a des solutions, donc le glissement s'amorce, si $|\beta| < \sqrt{k^2 + 1}$ soit $|4 - \alpha| < \frac{\sqrt{49f^2 + 1}}{f}$ soit enfin

$$-\frac{\sqrt{49f^2 + 1}}{f} < \frac{3(R-a)\omega_0^2}{g} - 4 < \frac{\sqrt{49f^2 + 1}}{f}$$

puisque $\frac{\sqrt{49f^2+1}}{f} > 7$, on se convainc aisément que la borne inférieure ne peut pas être atteinte et que la condition est donc

$$\frac{3(R-a)\omega_0^2}{g} < 4 + \frac{\sqrt{49f^2+1}}{f} \approx 11$$

Ça donnera certes, après le report des expressions de φ , β puis de k et α une expression littérale monstrueuse mais le calcul numérique précis est possible. On n'oubliera pas d'en déduire la valeur de $\dot{\theta}$ grâce à l'équation 3 car les valeurs de θ et de $\dot{\theta}$ serviront éventuellement à raccorder la solution valable jusqu'au début du glissement avec la solution qu'on peut rêver trouver pour le mouvement avec glissement.

Question 6 :

Mettre en équation le mouvement dans le cas du glissement.

Comme plus haut, le théorème du centre de gravité donne

$$-m(R-a)\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta$$

$$m(R-a)\ddot{\theta} = T - mg \sin \theta$$

Ici puisqu'il y a glissement $T = \pm f N$, l'étude précédente montre que la limite du non-glissement est atteinte avec le signe positif. On a donc

$$-m(R-a)\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \quad (\text{équation 7})$$

$$m(R-a)\ddot{\theta} = f N - mg \sin \theta \quad (\text{équation 8})$$

On multiplie l'équation 7 par f et on lui ajoute l'équation 8, d'où

$$m(R-a)\ddot{\theta} - f m(R-a)\dot{\theta}^2 = mg(f \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\ddot{\theta} - f \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R-a}(f \cos \theta - \sin \theta)$$

Question 7 :

Pour les sportifs : faute de pouvoir résoudre explicitement cette équation, on cherche un lien entre vitesse et position. A cet effet, on pose $\dot{\theta}^2 = F(\theta)$. En déduire une expression de $\ddot{\theta}$ et donner la méthode de résolution.

Remarquons que l'idée provient de l'étude précédente où l'on avait trouvé un lien entre $\dot{\theta}^2$ et θ .

Dérivons $\dot{\theta}^2 = F(\theta)$ par rapport au temps : on en tire $2\dot{\theta}\ddot{\theta} = F'(\theta)\dot{\theta}$ soit $\ddot{\theta} = F'(\theta)/2$ et l'équation devient

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\theta} - f F = \frac{g}{R-a}(f \cos \theta - \sin \theta)$$

qui est linéaire à coefficients constants. L'équation homogène a des solutions en $Cte \exp(2f\theta)$ et l'on cherche une solution particulière par la méthode des amplitudes complexes : $F = \Re(\underline{F} \exp i\theta)$ d'où

$$\left(\frac{i}{2} + f\right) \underline{F} = \frac{g}{R-a}(f + i)$$

On en tire l'expression de la solution particulière comme d'habitude et la constante multiplicative de la solution de l'équation homogène sera calculée à partir des conditions initiales calculées en fin de question 5. Bien sûr, pour cette phase, on prendra l'origine des temps au début du glissement. Qu'on me permette de ne pas pousser plus loin les calculs ; l'essentiel a été dit. Acta est fabula.