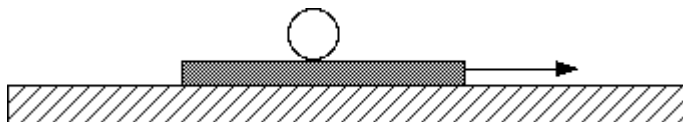


Une table, un cahier, une craie.

Sur une table horizontale (verticale ascendante Oz) on pose à plat un cahier et sur le cahier, une craie cylindrique d'axe Oy . On tire horizontalement sur le cahier dans une direction perpendiculaire à l'axe de la craie, donc avec une force $F \vec{e}_x$ ($F > 0$) (cf figure).

On admettra que les coefficients de frottement table/cahier et cahier/table sont égaux et on ne fera pas la distinction entre coefficient statique et dynamique. Le moment d'inertie d'un cylindre, de masse M et de rayon R , par rapport son axe est $J = (1/2) M R^2$.



Il peut se passer différentes choses, classées ci-dessous selon les valeurs croissantes de F

1. rien ne bouge.
2. le cahier avance et la craie reste immobile par rapport au cahier.
3. le cahier avance et la craie roule sans glisser sur le cahier.
4. le cahier avance et la craie glisse sur le cahier vers l'arrière (dans le référentiel lié au cahier).

Question 1 :

Expliquer les comportements 1, 3 et 4 (pas le 2) en fixant à chaque fois l'intervalle des valeurs de F compatible avec le comportement étudié.

Bien entendu, vous avez réalisé l'expérience avant même de vous lancer dans les calculs. Sinon, vous vous interdisez de vous-même la lecture de ce qui suit. Ben oui, c'est comme ça.

Paramétrons le problème. On laisse le soin au lecteur de compléter la figure (on ne va pas tout vous faire).

On note $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ l'intensité de la pesanteur.

On appelle M_0 la masse du cahier et G son centre de gravité d'abscisse x_G ; notons que le cahier a un mouvement de translation. On n'oublie pas qu'on lui exerce la force \vec{F}

On appelle M la masse de la craie et C son centre de gravité d'abscisse x_C et l'on note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$ son vecteur rotation. On note I le point de la craie en contact avec le cahier (dans le plan de figure d'équation $y = y_C$)

On note $\vec{N}_0 + \vec{T}_0 = N_0 \vec{e}_z + T_0 \vec{e}_y$ la force qu'exerce la table sur le cahier.

On note $\vec{N} + \vec{T} = N \vec{e}_z + T \vec{e}_y$ la force qu'exerce le cahier sur la craie. On n'oublie pas que la craie exerce sur le cahier la force opposée.

On note f le coefficient de frottement commun aux deux contacts.

Ecrivons maintenant des équations du mouvement valables dans tous les cas.

On applique le théorème du centre de gravité au cahier et à la craie

$$M_0 \ddot{x}_G = M_0 \vec{g} + \vec{N}_0 + \vec{T}_0 - \vec{N} - \vec{T} + \vec{F} \quad (\text{équation 1})$$

$$M \ddot{x}_C = M \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \quad (\text{équation 2})$$

et le théorème du moment cinétique par rapport à Cy à la craie

$$\frac{d\vec{\sigma}_{Cy}}{dt} = [\vec{CI} \wedge (\vec{N} + \vec{T})] \cdot \vec{e}_y$$

Projetons sur Oy

$$J \frac{d\omega}{dt} = (\vec{CI} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_y \quad \text{car } \vec{N} \text{ et } \vec{CI} \text{ sont parallèles}$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \frac{d\omega}{dt} = (-R \vec{e}_z \wedge T \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_y$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -RT \quad (\text{équation 3})$$

On projette l'équation 1 et l'équation 2 sur Oz , on tire

$$0 = -M_0 g + N_0 - N$$

$$0 = -M g + N$$

d'où

$$N = M g \quad (\text{équation 4})$$

$$N_0 = (M_0 + M) g \quad (\text{équation 5})$$

Ces deux relations restent valables dans toute la suite du problème et dans toutes les situations, nous ne les répéterons plus. On projette ensuite l'équation 1 et l'équation 2 sur Ox et, en reportant l'équation 3, on arrive au système fondamental suivant

$$\begin{cases} M_0 \ddot{x}_G = T_0 - T + F \\ M \ddot{x}_C = T \\ \frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -RT \end{cases} \quad (\text{système 6})$$

Etudions le premier cas : tout est immobile (translations et rotation), le système 6 devient

$$\begin{cases} 0 = T_0 - T + F \\ 0 = T \\ 0 = -RT \end{cases} \quad (\text{système 7})$$

soit encore

$$\begin{cases} T_0 = -F \\ T = 0 \end{cases} \quad (\text{système 8})$$

Comme il n'y a pas glissement, les lois de Coulomb imposent les contraintes $|T| < f N$, ce qui est sans problème puisque $N = 0$ et $|T_0| < f N_0$, ce qui donne comme condition

$$\boxed{F < f (M_0 + M) g}$$

Etudions le troisième cas : Le cahier glisse vers l'avant et la craie roule sans glisser vers l'arrière. Le cahier glisse vers l'avant, donc les lois de Coulomb affirment que

$$T_0 = -f N_0 = -f (M_0 + M) g \quad (\text{équation 9})$$

Le roulement sans glissement entraîne que le point I de la craie a la même vitesse que le cahier soit $\dot{x}_G \vec{e}_x$. La formule fondamentale du champ des vitesses de la craie donne

$$\begin{aligned} \vec{v}(C) &= \vec{v}(I) + \vec{CI} \wedge \vec{\omega} \\ \dot{x}_C \vec{e}_x &= \dot{x}_G \vec{e}_x + (-R \vec{e}_z) \wedge (\omega \vec{e}_y) \end{aligned}$$

d'où, en projection sur Ox ,

$$\dot{x}_C = \dot{x}_G + R\omega$$

soit après dérivation par rapport au temps

$$\ddot{x}_C = \ddot{x}_G + R\dot{\omega} \quad (\text{équation 10})$$

On reporte l'équation 9 et l'équation 10 dans le système 6 et l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \ddot{x}_G = -f (M_0 + M) g - T + F \\ M (\ddot{x}_G + R\dot{\omega}) = T \\ \frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -RT \end{array} \right. \quad (\text{système 11})$$

On remplace la deuxième équation du système 11 par la combinaison linéaire «deuxième moins troisième multipliée par $2/R$ ». On reporte pour mémoire la valeur de T_0

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = -f (M_0 + M) g \\ M_0 \ddot{x}_G = -f (M_0 + M) g - T + F \\ M \ddot{x}_G = 3T \\ \frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -RT \end{array} \right. \quad (\text{système 12})$$

Enfin on reporte T tiré de la troisième équation du système 12 dans la deuxième et la quatrième.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = -f (M_0 + M) g \\ \left(M_0 + \frac{M}{3} \right) \ddot{x}_G = -f (M_0 + M) g + F \\ M \ddot{x}_G = 3T \\ R\dot{\omega} = -\frac{2}{3} \ddot{x}_G \end{array} \right. \quad (\text{système 13})$$

soit finalement les résultats suivants (où \ddot{x}_C a été calculé par $\ddot{x}_C = \ddot{x}_G + R\dot{\omega}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = -f(M_0 + M)g \\ T = \frac{M[F - f(M_0 + M)g]}{3M_0 + M} \\ \ddot{x}_G = \frac{3[F - f(M_0 + M)g]}{3M_0 + M} \\ \dot{\omega} = -\frac{2[F - f(M_0 + M)g]}{R(3M_0 + M)} \\ \ddot{x}_C = \frac{F - f(M_0 + M)g}{3M_0 + M} \end{array} \right. \quad (\text{système 14})$$

Tous les mouvements sont uniformément accélérés.

Les contraintes pour ce type de mouvement sont d'une part que le cahier glisse vers l'avant, soit, puisqu'on part d'une vitesse nulle, $\ddot{x}_G > 0$ ou encore $F > f(M_0 + M)g$ et d'autre part, puisqu'il n'y a pas glissement en I , $|T| < fN$, soit

$$\begin{aligned} \frac{M[F - f(M_0 + M)g]}{3M_0 + M} &< fMg \\ F - f(M_0 + M)g &< f(3M_0 + M)g \\ F &< f(4M_0 + 2M)g \end{aligned}$$

Finalement ce mouvement est possible pour

$$\boxed{f(M_0 + M)g < F < f(4M_0 + 2M)g}$$

On remarque que puisque $\dot{\omega}$ est négatif que $\ddot{x}_C < \ddot{x}_G$ et puisqu'on part de vitesses nulles $\dot{x}_c < \dot{x}_G$: la craie roule donc vers l'arrière, ce que vérifie l'expérience.

Etudions le quatrième cas : le cahier avance et la craie glisse sur le cahier vers l'arrière.

Le cahier glisse vers l'avant, donc les lois de Coulomb affirment que

$$T_0 = -fN_0 = -f(M_0 + M)g \quad (\text{équation 15})$$

La craie glisse vers l'arrière, donc les lois de Coulomb affirment que

$$T = fN = fMg \quad (\text{équation 16})$$

On reporte l'équation 15 et l'équation 16 dans le système 6 et l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \ddot{x}_G = -f(M_0 + 2M)g + F \\ M \ddot{x}_C = fMg \\ \frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -RfMg \end{array} \right. \quad (\text{système 17})$$

et après simplifications et report pour mémoire des valeurs de T_0 et T

$$\begin{cases} T_0 = -f (M_0 + M) g \\ T = f M g \\ \ddot{x}_G = \frac{F - f (M_0 + 2 M) g}{M_0} \\ \ddot{x}_C = f g \\ \dot{\omega} = -\frac{2 f g}{R} \end{cases} \quad (\text{système 18})$$

Remarquons que le glissement n'empêche pas la craie de rouler ; elle glisse et roule, vers l'arrière aussi (car $\dot{\omega} < 0$).

Les contraintes pour ce type de mouvement sont d'une part que le cahier glisse vers l'avant, soit, puisqu'on part d'une vitesse nulle, $\ddot{x}_G > 0$ ou encore $F > f (M_0 + 2 M) g$ et d'autre part, que la vitesse de glissement de la craie sur le cahier soit vers l'arrière, détaillons :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{gliss.} = \vec{v}_{I \in \text{craie}} - \vec{v}_{I \in \text{cahier}} &= [\vec{v}_C + \vec{IC} \wedge \vec{\omega}] - \vec{v}_G = \\ &= [\dot{x}_C \vec{e}_x + R \vec{e}_z \wedge \omega \vec{e}_y] - \dot{x}_G \vec{e}_x = [\dot{x}_C - R \omega - \dot{x}_G] \vec{e}_x \end{aligned}$$

Pour que ce vecteur soit vers l'arrière après l'instant initial, il faut que l'expression ente crochets soit négative et puisqu'elle est nulle à l'instant initial et que les mouvements sont uniformément accélérés ; il faut que la dérivée de cette expression soit négative, soit :

$$\ddot{x}_C - R \dot{\omega} - \ddot{x}_G < 0$$

en reportant les résultats précédents, mis au même dénominateur :

$$\frac{f g M_0}{M_0} + \frac{2 f g M_0}{M_0} - \frac{F - f (M_0 + 2 M) g}{M_0} = \frac{f g (4 M_0 + 2 M) - F}{M_0} < 0$$

$$\text{d'où} \quad F > f g (4 M_0 + 2 M)$$

Concluons : F doit être à la fois supérieur à $f (M_0 + 2 M) g$ et à $f g (4 M_0 + 2 M)$ mais s'il est supérieur à la seconde valeur, il l'est à la première. Ce type de mouvement est donc possible si

$$\boxed{f (4 M_0 + 2 M) g < F}$$

On vérifie que les domaines de validité des trois cas étudiés sont disjoints et couvrent toutes les valeurs possibles de F .

Le second comportement ne peut être expliqué avec les lois de Coulomb telles qu'elles proposées par le programme. En pratique le contact n'est jamais rigoureusement ponctuel : le sol ou la craie s'écrasent très légèrement, il y a une petite surface de contact et l'interaction de contact ne se résume plus en une force localisée au point de contact. Voici donc un modèle plus élaboré :

L'interaction de contact est la somme d'une force $\vec{N} + \vec{T}$ localisée au point de contact idéal, force vérifiant les lois de Coulomb et d'un couple horizontal (ici parallèle à Oy par symétrie) $\vec{\Gamma}$ de résistance au roulement.

Il existe une constante h , homogène à une longueur, dépendant de la nature du sol et de la craie telle que :

— S'il n'y a pas roulement $\|\vec{\Gamma}\| < h \|\vec{N}\|$

— S'il y a roulement, $\vec{\Gamma}$ a la direction de $\vec{\omega}$, le sens contraire et $\|\vec{\Gamma}\| = h \|\vec{N}\|$

Bien sûr, on a constaté que c'est le même type de loi que pour \vec{T} .

Question 2 :

Expliquer le comportement 2 en fixant l'intervalle des valeurs de F compatible avec ce comportement. On s'estimera trop fatigué pour reprendre l'étude des cas 1, 3 et 4.

On note $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$. Si l'on reprend l'étude initiale, il suffit d'ajouter le couple de résistance au roulement au théorème du moment appliqué à la craie. On arrive donc à

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \ddot{x}_G = T_0 - T + F \\ M \ddot{x}_C = T \\ \frac{1}{2} M R^2 \dot{\omega} = -RT + \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{système 19})$$

Pour le mouvement proposé, la craie est fixe par rapport au cahier, donc $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\ddot{x}_C = \ddot{x}_G$ (on note \ddot{x} sans indice et puisqu'il y a glissement vers l'avant du cahier sur la table, on a

$$T_0 = -f N_0 = -f (M_0 + M) g$$

On reporte tout cela dans le système précédent et l'on arrive à :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = -f (M_0 + M) g \\ M_0 \ddot{x} = -f (M_0 + M) g - T + F \\ M \ddot{x} = T \\ 0 = -RT + \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{système 20})$$

La somme des deuxième et troisième équations du système 20 élimine T et conduit à

$$(M_0 + M) \ddot{x} = F - f (M_0 + M) g$$

On en déduit T avec l'avant dernière équation puis Γ avec la dernière, finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = -f (M_0 + M) g \\ T = \frac{M [F - f (M_0 + M) g]}{M_0 + M} \\ \ddot{x}_C = \ddot{x}_G = \frac{F - f (M_0 + M) g}{M_0 + M} \\ \Gamma = \frac{R M [F - f (M_0 + M) g]}{M_0 + M} \end{array} \right. \quad (\text{système 21})$$

Les contraintes du mouvement sont que le cahier doit glisser vers l'avant, donc $\ddot{x} > 0$ soit encore $F > f(M_0 + M)g$ et qu'il n'y ait pas roulement soit $|\Gamma| < hN$, d'où

$$\frac{RM[F - f(M_0 + M)g]}{M_0 + M} < h(M_0 + M)g$$

$$F < f(M_0 + M)g + \frac{h(M_0 + M)^2g}{RM}$$

$$F < \left[f + \frac{h}{R} \frac{(M_0 + M)}{M} \right] (M_0 + M)g$$

par Ce type de mouvement est donc possible si

$$f(M_0 + M)g < F < \left[f + \frac{h}{R} \frac{(M_0 + M)}{M} \right] (M_0 + M)g$$

Le réexamen des cas 1, 3 et 4 se mènerait comme plus haut en rajoutant le couple $\vec{\Gamma}$. L'enchaînement des calculs et des contraintes imposées par les hypothèses reste le même et les calculs sont à peine plus lourds.