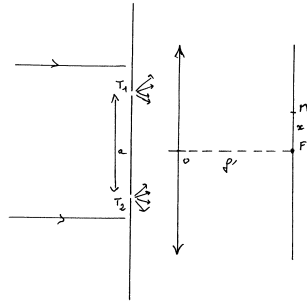


## Fentes d'Young éclairées par un doublet.

(pour répondre à une demande internationale en provenance du Québec.)

Un écran opaque est percé de deux fentes très fines; il est éclairé par une onde plane monochromatique arrivant normalement. On admettra (cf cours sur la diffraction) que dans ce cas la figure d'interférences est la même qu'avec deux trous avec un éclairage identique pour tous les points d'une même droite de l'écran perpendiculaire à la direction qui joint les trous. On peut ainsi ne calculer l'éclairement qu'en un point du plan de figure et se ramener à un problème plan.

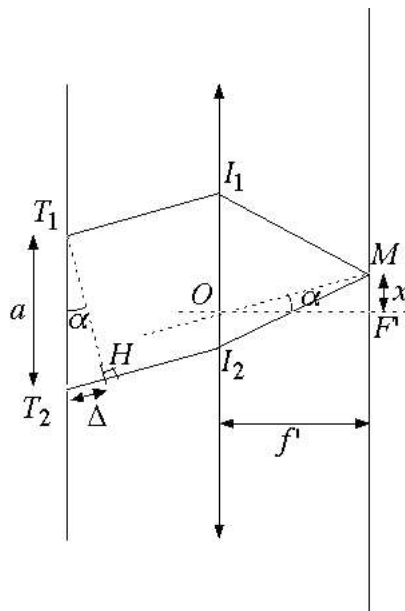
On montre qu'à la sortie des trous, la lumière est émise dans toutes les directions : les trous se comportent comme des sources synchrones. Derrière l'écran on place une lentille convergente dont l'axe lui est normal et l'on place un écran d'observation dans son plan focal (cf figure ci-dessous).



*Question 1 :*

*Calculer la différence de marche en un point quelconque de ce plan focal. Décrire qualitativement et quantitativement la figure d'interférences.*

La première chose à faire est de tracer correctement les rayons issus des trous  $T_1$  et  $T_2$  et arrivant au point  $M$ . Comme  $M$  est dans le plan focal, ces rayons sont, avant la lentille, parallèles. Dans quelle direction? Celle de tout autre rayon, même fictif, qui arriverait en  $M$ , en particulier celui qui passerait par le centre optique  $O$  et qui ne serait pas dévié. Bref les rayons issus des trous et arrivant en  $M$  sont, avant la lentille, parallèles à  $OM$ .



Pour calculer la différence de marche, attention à ne pas se laisser piéger par la schématisation de la lentille :  $I_1$  et  $I_2$  ne sont pas des points mais la schématisation de la traversée de la lentille ; on n'a donc pas, mais pas du tout,  $T_1 I_1 = T_2 I_2$  car les rayons ne traversent pas la lentille à la même distance de l'axe ; l'un d'eux traverse plus de verre que l'autre et cela a une importance capitale. Le calcul des distances parcourues dans le verre est très complexe (deux réfractions successives) et l'on va contourner ce problème en utilisant le théorème de Malus qui affirme que les surfaces équiphasées (surfaces d'onde) sont perpendiculaires aux rayons.

Mais attention au second piège : le théorème n'est valable que tant que l'optique géométrique l'est et est donc en défaut quand il y a diffraction (ici à la traversée des trous). Comment ce sortir de ce guépier ? Par la force de sa pensée et de son imagination. Imaginons qu'une source ponctuelle en  $M$  émette des rayons vers les trous, ce seront les mêmes que ci-dessus au sens près (retour inverse de la lumière). Après la traversée de la lentille (à gauche donc dans cette expérience), les rayons sont parallèles et les surfaces d'onde des plans qui leur sont perpendiculaires ; en particulier celui qui passe par  $T_1$  et coupe l'autre en  $H$ .  $T_1$  et  $H$  sont en phase donc les chemins optiques entre la source  $M$  et  $T_1$  d'une part,  $M$  et  $H$  d'autre part sont égaux. Retournons à l'expérience réelle, le chemin de  $T_2$  à  $M$  est celui de  $T_2$  à  $H$  plus celui de  $H$  à  $M$  égal au chemin de  $T_1$  à  $M$  ; il est donc clair que la différence de marche est  $\Delta = T_2 H$ .

L'angle entre  $T_1 T_2$  (perpendiculaire à  $OF'$ ) et  $T_1 H$  (perpendiculaire à  $OM$ ) est égal à l'angle entre  $OF'$  et  $OM$  ; notons-le  $\alpha$ . En pratique il est petit et l'on a donc

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{F'M}{OF'} = \frac{x}{f'}$$

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{T_2 H}{T_1 T_2} = \frac{\Delta}{a}$$

$$\text{d'où} \quad \Delta = \frac{a x}{f'}$$

La suite relève du cours ; le déphasage est

$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi \frac{a x}{\lambda f'}$$

Si l'amplitude complexe du rayon arrivant en  $M$  en provenance de  $T_1$  est notée  $\underline{s}_1$ , celle qui provient de  $T_2$  est, à son arrivée en  $M$ ,

$$\underline{s}_2 = \underline{s}_1 \exp(-j\varphi)$$

Puisque ces ondes sont cohérentes, leurs amplitudes complexes s'ajoutent

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = \underline{s}_1 (1 + \exp(-j\varphi))$$

L'intensité ou éclairement en est le carré du module, obtenu en multipliant par la quantité conjuguée (notée ici par un<sup>1</sup> astérisque)

$$\mathcal{E} = \underline{s}_{tot} \underline{s}_{tot}^* = \underline{s}_1 \underline{s}_1^* (1 + \exp(-j\varphi)) (1 + \exp(j\varphi)) = \dots = 2 \underline{s}_1 \underline{s}_1^* (1 + \cos \varphi)$$

Soit en reportant la valeur de  $\varphi$  et en remarquant que l'intensité est maximale est pour  $x = 0$  et vaut alors  $4 \underline{s}_1 \underline{s}_1^*$  qu'on notera  $\mathcal{E}_0$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{a x}{\lambda f'} \right) \right]$$

---

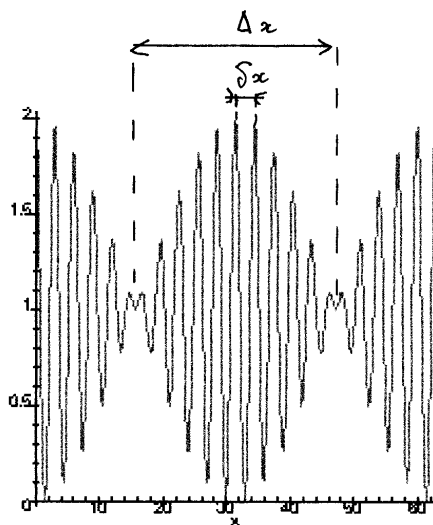
<sup>1</sup>On dit bien UN astérisque !

On voit donc des franges rectilignes (puisque le résultat ne dépend pas de  $y$ ), équidistantes, d'interfrange

$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

**Question 2 :**

*L'interféromètre est éclairé par le doublet du sodium dont les deux composantes ont quasiment la même intensité. La courbe donnant l'éclairement en fonction de l'abscisse du point  $M$  (mesurée expérimentalement par un dispositif non explicité) a l'allure de la figure ci-dessous.  $\delta x$  est l'intervalle entre deux maximums successifs et  $\Delta x$  l'intervalle entre deux points où maximums et minimums sont quasiment égaux. Le rapport entre  $\Delta x$  et  $\delta x$  est quasiment égal à 1000. (Pour une meilleure lisibilité, le schéma ne respecte pas cette proportion.) Que peut-on en déduire ? Définir et calculer un contraste local.*



Il n'y a pas cohérence entre phénomènes de fréquences (donc de longueurs d'onde) différentes et il y a additivité des éclaircissements. Il sera plus aisé de travailler avec les nombres d'onde  $\sigma$ , inverse des longueurs d'onde. En appelant  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_{tot}$  les éclaircissements obtenus avec  $\sigma_1 = 1/\lambda_1$  seul,  $\sigma_2 = 1/\lambda_2$  seul et l'éclaircissement total, on a

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda_1 f'} \right) \right] = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 ax}{f'} \right) \right]$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 ax}{f'} \right) \right]$$

avec la même valeur de  $\mathcal{E}_0$  puisque les deux composantes du doublet ont même intensité ; et enfin

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 ax}{f'} \right) \right] + \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 ax}{f'} \right) \right]$$

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 2 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 ax}{f'} \right) + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 ax}{f'} \right) \right]$$

On peut interpréter le lien entre la courbe et le résultat littéral de deux façons, la première intuitive, la seconde trigonométrique.

Pour la première méthode, bien qu'au sens strict on ne puisse parler de déphasage qu'entre termes de même fréquence, on élargira sans grande difficulté morale cette notion aux deux termes sinusoïdaux de  $\mathcal{E}_{tot}$ , on aura donc un déphasage

$$\Phi = 2\pi \frac{\sigma_2 a x}{f'} - 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} = 2\pi \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) a x}{f'}$$

Ce déphasage varie — lentement — avec  $x$ ; on l'appellera déphasage local, notons donc

$$\Phi(x) = 2\pi \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) a x}{f'}$$

Au voisinage des points d'abscisse  $x_k$  tels que  $\Phi(x_k) = 2k\pi$ , on a  $\Phi(x) \approx 2k\pi$  et les deux cosinus sont en phase, donc égaux, soit en confondant  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  avec une valeur moyenne  $\sigma_m$  (de définition floue, on le concède)

$$\mathcal{E}_{tot} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 2 + 2 \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_m a x}{f'} \right) \right] = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_m a x}{f'} \right) \right]$$

Autour des  $x_k$ , l'éclairement total varie pratiquement de 0 à  $2\mathcal{E}_0$ , le contraste est presque égal à 1 (ce qui correspond à des minimums nuls).

Au voisinage des points d'abscisse  $x'_k$  tels que  $\Phi(x'_k) = (2k+1)\pi$ , on a  $\Phi(x) \approx (2k+1)\pi$  et les deux cosinus sont en opposition de phase, donc opposés et de somme nulle et l'on a

$$\mathcal{E}_{tot} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{2} [2 + 0] = \mathcal{E}_0$$

Autour des  $x'_k$ , l'éclairement total ne varie pratiquement pas, le contraste est presque égal à 0 (ce qui correspond à un éclairement constant).

Sur le graphe  $\Delta x$  est la distance entre deux points de contraste nul soit  $\Delta x = x'_{k+1} - x'_k$ ; or  $\Phi(x'_k) = 2\pi \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) a x'_k}{f'} = (2k+1)\pi$ , d'où  $x'_k = (k + \frac{1}{2}) \frac{f'}{(\sigma_2 - \sigma_1) a}$  et  $\Delta x = \frac{f'}{(\sigma_2 - \sigma_1) a}$

Sur le graphe  $\delta x$  est la périodicité dans les zones de bon contraste, en particulier celles de contraste proches de 1, donc la périodicité du terme  $\cos \left( 2\pi \frac{\sigma_m a x}{f'} \right)$ , soit  $\delta x = \frac{f'}{\sigma_m a}$

Le rapport  $\Delta x / \delta x$  est donc égal à  $\sigma_m / \Delta\sigma$  (où, naturellement,  $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ ) qui est l'écart relatif des deux composantes du doublet. Remarquons qu'en estimant  $\sigma_m$  à  $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)$ , on a

$$\frac{\sigma_m}{\Delta\sigma} = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2(\sigma_2 - \sigma_1)} = \frac{1/\lambda_2 + 1/\lambda_1}{2(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$$

( $\Delta\lambda$  est défini en inversant l'ordre des termes car au plus grand  $\sigma$  correspond le plus petit  $\lambda$ .)

Reprenons cette étude via la trigonométrie en repartant de la formule donnant l'éclairement total :

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 2 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right) + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 a x}{f'} \right) \right]$$

Les formules de trigonométrie transformant les sommes en produits conduisent à

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{tot} &= \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 2 + 2 \cos \left( \pi \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) a x}{f'} \right) \cos \left( \pi \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) a x}{f'} \right) \right] \\ \mathcal{E}_{tot} &= \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{\Delta\sigma a x}{f'} \right) \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_m a x}{f'} \right) \right] \end{aligned}$$

Le facteur  $\cos\left(2\pi\frac{\sigma_m a x}{f'}\right)$  oscille très rapidement entre  $-1$  et  $+1$ , donc l'éclairement oscille rapidement entre deux fonctions «enveloppes» qui s'entrecroisent en dessinant des fuseaux, respectivement

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x}{f'}\right)\right] &= \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\Delta\sigma a x}{2f'}\right)\right] \\ \mathcal{E}_0 \left[1 - \cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x}{f'}\right)\right] &= \mathcal{E}_0 \left[1 - \cos\left(2\pi\frac{\Delta\sigma a x}{2f'}\right)\right]\end{aligned}$$

ce qui correspond bien au graphe proposé.

$\Delta x$  est la largeur d'un fuseau, c'est-à-dire (attention au piège) la demi période de chacune des fonctions enveloppes, d'où

$$\Delta x = \frac{1}{2} \frac{2f'}{\Delta\sigma a} = \frac{f'}{\Delta\sigma a}$$

et  $\delta x$  la période d'oscillation du facteur «haute fréquence»  $\cos\left(2\pi\frac{\sigma_m a x}{f'}\right)$ , soit

$$\delta x = \frac{f'}{\sigma_m a}$$

et l'on retrouve que le rapport  $\Delta x/\delta x$  est donc égal à  $\sigma_m/\Delta\sigma$ , avec cette fois, une définition précise de  $\sigma_m$ .

La littérature donne  $\lambda_1 = 589,0$  nm et  $\lambda_2 = 589,6$  nm d'où  $\lambda_m = 589,3$  nm et  $\Delta\lambda \approx 0,6$  nm (approximativement car il faut lire  $\lambda_1 = 589,0 \pm 0,05$  nm et  $\lambda_2 = 589,6 \pm 0,05$  nm d'où  $\Delta\lambda \approx 0,6 \pm 0,1$  nm) compatible avec  $\Delta x/\delta x \approx 1000$ .

Définissons maintenant un contraste *local*. Sur un intervalle d'une vingtaine de franges autour d'un point de coordonnées  $x_0$ , l'ordre d'interférences  $\frac{\sigma_m a x}{f'}$  varie de  $\pm 10$  autour de sa valeur centrale  $\frac{\sigma_m a x_0}{f'}$ ; et puisque  $\Delta\sigma$  est de l'ordre d'un millième de  $\sigma_m$ , la quantité  $\frac{\Delta\sigma a x}{f'}$  varie de  $\pm 0,01$  autour de sa valeur centrale  $\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'}$ . On peut donc, dans cet intervalle, considérer que la quantité  $\cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x}{f'}\right)$  est quasiment constante et égale à  $\cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'}\right)$  et y faire l'approximation

$$\mathcal{E}_{tot} \approx \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'}\right) \cos\left(2\pi\frac{\sigma_m a x}{f'}\right)\right]$$

qui est une fonction quasi périodique oscillant entre un maximum et un minimum égaux à

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{max} &= \mathcal{E}_0 \left[1 + \left|\cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'}\right)\right|\right] \\ \mathcal{E}_{min} &= \mathcal{E}_0 \left[1 - \left|\cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'}\right)\right|\right]\end{aligned}$$

où l'on a pensé à mettre la valeur absolue du cosinus pour le cas où il serait négatif. La définition du contraste  $\gamma$  (on dit aussi visibilité  $V$ ) donne

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = \dots = \left|\cos\left(\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'}\right)\right|$$

et l'on retrouve que l'on a un contraste maximal et égal à 1 si  $\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'} = k\pi$  ( $k$  entier) et minimal et égal à 0 si  $\pi\frac{\Delta\sigma a x_0}{f'} = (k + \frac{1}{2})\pi$  ( $k$  entier); on a développé plus haut.

*Question 3 :*

*L'interféromètre est éclairé cette fois par le doublet jaune du mercure dont les deux composantes ont des intensités différentes. On retrouve comme dans le cas précédent une alternance de zones de contraste optimal égal à 1 et de contraste minimal, mais celui-ci n'est plus nul et est estimé expérimentalement à 0,1. En déduire le rapport des intensités des deux raies.*

L'essentiel des calculs a été fait dans le question précédente, il ne reste qu'à nous adapter à la situation. Les éclairagements qu'on aurait avec les raies prises isolément seraient

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{m1}}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right) \right]$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{m2}}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 a x}{f'} \right) \right]$$

où  $\mathcal{E}_{m1}$  et  $\mathcal{E}_{m2}$  sont forcément proportionnels à l'intensité des raies; mesurer le rapport de ces intensités revient à mesurer le rapport de  $\mathcal{E}_{m2}$  à  $\mathcal{E}_{m1}$ . L'éclairement total est alors

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m1} \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right) + \mathcal{E}_{m2} + \mathcal{E}_{m2} \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 a x}{f'} \right) \right]$$

Au voisinage de certaines valeurs de  $x$  les deux cosinus sont quasiment en phase et l'on a

$$\cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 a x}{f'} \right) \approx \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right)$$

d'où

$$\mathcal{E}_{tot} \approx \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}) + (\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}) \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right) \right]$$

Dans ces régions, les extremums sont obtenus quand le cosinus vaut 1 et  $-1$  donc

$$\mathcal{E}_{max} = \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}$$

$$\mathcal{E}_{min} = 0$$

$$\gamma = 1$$

Pour d'autres valeurs de  $x$  les deux cosinus sont quasiment en opposition de phase et c'est là que le contraste sera minimum et l'on a

$$\cos \left( 2\pi \frac{\sigma_2 a x}{f'} \right) \approx -\cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right)$$

d'où

$$\mathcal{E}_{tot} \approx \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}) + (\mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_{m2}) \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_1 a x}{f'} \right) \right]$$

Dans ces régions, les extremums sont obtenus quand le cosinus vaut 1 et  $-1$  (en supposant, pour fixer les idées que  $\mathcal{E}_{m1}$  est supérieur à  $\mathcal{E}_{m2}$ ) donc

$$\mathcal{E}_{max} = \frac{1}{2} [(\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}) + (\mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_{m2})] = \mathcal{E}_{m1}$$

$$\mathcal{E}_{min} = \frac{1}{2} [(\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}) - (\mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_{m2})] = \mathcal{E}_{m2}$$

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_{m2}}{\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}}$$

d'où

$$\gamma (\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2}) = \mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_{m2}$$

$$\mathcal{E}_{m2} (1 + \gamma) = \mathcal{E}_{m1} (1 - \gamma)$$

$$\frac{\mathcal{E}_{m2}}{\mathcal{E}_{m1}} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$$

Avec  $\gamma \approx 0,1$ , on trouve

$$\frac{\mathcal{E}_{m2}}{\mathcal{E}_{m1}} \approx \frac{0,9}{1,1} \approx 0,8$$