

## Chapitre A-IV

# Ordres de grandeurs et approximations. Solutions approchées.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## *RÉSUMÉ :*

*Ce chapitre a une ambition très modeste. Il est vraisemblable que la plupart des lecteurs de mon cours n'en auront nul besoin. Il est destiné à ceux d'entre eux qui n'auraient plus eu de contact avec la physique depuis un certain temps.*

*On y montre comment évaluer rapidement l'ordre de grandeur d'un terme (ou d'une fonction) pour savoir s'il est négligeable ou non et comment évaluer l'ordre de grandeur d'une fonction dérivée.*

*On donne enfin les méthodes les plus courantes pour obtenir une solution approchée d'une équation algébrique ou différentielle.*

# Table des matières

<b>A-IV Ordres de grandeurs et approximations. Solutions approchées.</b>	<b>1</b>
1 Ordres de grandeurs et approximations. . . . .	4
1.a Opérations algébriques. . . . .	4
1.b Le cas des fonctions. . . . .	5
1.c Le cas des fonctions dérivées. . . . .	5
1.d Conseil de prudence élémentaire . . . . .	6
2 Solutions approchées d'une équation algébrique. . . . .	6
2.a Méthodes graphiques. . . . .	6
2.b Résolution par dichotomie. . . . .	7
2.c Méthode par itération. . . . .	7
3 Solution approchée d'une équation différentielle par approximations successives. . . . .	8

# 1 Ordres de grandeurs et approximations.

Lorsqu'on veut étudier un phénomène réel avec un grand nombre de paramètres susceptibles d'intervenir, l'équation qui le décrit contient beaucoup de termes, ce qui en général la rend ingérable. L'art du physicien consiste à cerner parmi les paramètres ceux qui donneront des termes négligeables, afin de simplifier l'équation. Le physicien est pragmatique : mieux vaut une solution approché que pas de solution.

Ce qui suit ne peut être que flou tant que l'on ne s'appuie pas sur un exemple précis. Le lecteur en rencontrera disséminés dans tout mon cours.

## 1.a Opérations algébriques.

On se place dans le cadre d'une somme de termes, chacun étant produit de plusieurs facteurs.

Si un terme  $A$  est déclaré négligeable devant  $B$ , c'est que le rapport  $\frac{A}{B}$  est négligeable devant l'unité. S'il est voisin de 0, 1, c'est une grossière approximation, voisin de 0,01 une bonne et voisin de 0,001 une excellente. Cela dit si  $B$  est 90 fois plus petit que  $A$  ou 110 fois, ce sera une tout aussi bonne approximation que s'il était 100 fois plus petit. Pour se faire une idée, on remplace donc les différents facteurs de différents termes par la puissance de 10 la plus proche.

L'accélération de la pesanteur sur Terre est  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ; on dira qu'en ordre de grandeur  $g \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (on utilise habituellement le signe  $\sim$ ); par exemple aussi la constante électrique est  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,00 \cdot 10^9 \sim 10^{10} \text{ SI}$ , la constante de gravitation est  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \sim 10^{-10} \text{ SI}$ , etc.

Le point le plus piégeant, c'est de placer la charnière entre approximation à la puissance de 10 supérieure et à la puissance inférieure. Il faut se garder de croire que cette charnière par exemple entre l'approximation à 100 et celle à 1000 est 500. On est en effet clairement dans une logique exponentielle et la charnière est donc  $100\sqrt{10} \approx 316$ ; dans la pratique on remplace  $\sqrt{10}$  par 3, d'où la règle<sup>1</sup> : Si le premier chiffre significatif est 1 ou 2, on prend la puissance de 10 inférieure, sinon la puissance supérieure. On peut résumer ainsi :

Si  $10^n \leq X < 3 \cdot 10^n$ , alors  $X \sim 10^n$  et si  $3 \cdot 10^n \leq X < 10^{n+1}$  alors  $X \sim 10^{n+1}$

La prudence s'impose lorsqu'un terme est produit d'un nombre élevé de facteurs. En effet si par exemple  $a = 2 \cdot 10^n \sim 10^n$ , on a  $a^2 = 4 \cdot 10^{2n} \sim 10^{2n+1}$  et si  $b = 0,5 \cdot 10^n$ , on a  $b^2 = 0,25 \cdot 10^{2n} \sim 10^{2n-1}$ . En conséquence plus un terme contient de facteurs, plus il faudra laisser de marge pour le négliger.

*Il m'arrive de rêver de systèmes un peu plus fins qui, au lieu de progresser par pas de 10, le ferait par pas de  $\sqrt{10}$  (en pratique on noterait 3 mais avec 3 fois 3 égale 10), voire*

1. Profitez-en, on la voit rarement exposée; en tout cas, je ne l'ai personnellement lue nulle part.

$\sqrt[3]{10}$ ; mais c'est quand j'ai trop bu.

## 1.b Le cas des fonctions.

Ici pas de règles universelles mais des réflexes de bon sens.

Si l'on veut comparer deux fonctions (disons du temps) périodiques notées  $f$  et  $g$ , pas forcément de même période et que l'une et l'autre s'annulent périodiquement mais pas en même temps; «  $g$  négligeable devant  $f$  » ne peut pas vouloir dire :

$$\forall t \quad |g(t)| \ll |f(t)|$$

car en certains instants  $f$  est nulle et pas  $g$ , ce qui contredit l'affirmation.

La seule façon de donner du sens à cette expression est de comparer les valeurs maximales de  $|f(t)|$  et de  $|g(t)|$  notées respectivement  $f_m$  et  $g_m$ ; si  $g_m \ll f_m$ , alors on pourra négliger  $g$  devant  $f$ . Le cas le plus fréquent est celui des fonctions sinusoïdales de même période, mais c'est plus général.

Si l'on veut comparer des fonctions qui décroissent en même temps, par exemple exponentiellement, la prudence s'impose. Si les deux fonctions ont la même constante de temps soit  $f(t) = f(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$  et  $g(t) = g(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$ , c'est simple car  $\frac{g(t)}{f(t)}$  est constant de sorte que si  $g(0)$  est négligeable devant  $f(0)$  alors, à tout instant,  $g(t)$  sera négligeable devant  $f(t)$ .

Par contre, si les constantes de temps sont différentes, il se peut que  $g(0)$  soit grand devant  $f(0)$  mais que,  $g$  décroissant plus vite que  $f$ , au bout d'un certain temps,  $g(t)$  devienne négligeable devant  $f(t)$ .

## 1.c Le cas des fonctions dérivées.

On parle ici de fonctions habituellement rencontrées en physique et non de fonctions « pathologiques » dont les mathématiciens ont le secret. Partons de quelques exemples courants.

Soit  $f(t) = f(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$ , on a  $\frac{df}{dt} = -\frac{f(0)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$  et l'on peut donc écrire que :

$$\left| \frac{df}{dt} \right| = \frac{|f|}{\tau}$$

La dérivée est donc ici, à tout instant, le rapport de la fonction à une constante  $\tau$ , appelée *temps caractéristique*, ici le temps pour que la fonction soit divisée par  $e \approx 2,718$ , ou avec le même ordre de grandeur<sup>2</sup> divisée par 2.

---

2. On introduit le facteur  $\ln 2 \approx 0,69 \sim 1$

Pour une fonction sinusoïdale de période  $T$  soit  $f(t) = f_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$  on a par dérivation  $g(t) = \frac{df}{dt} = \frac{2\pi}{T} f_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ . Or on a vu plus haut que ce qui compte dans ce cas ce sont les amplitudes et l'on a donc, en notant  $g_m = \frac{2\pi}{T} f_m$  celle de  $g(t)$ ,  $g_m = \frac{f_m}{\tau}$  avec  $\tau = \frac{T}{2\pi}$  du même ordre de grandeur que  $\frac{T}{4}$ , temps pour passer de la position moyenne à une des positions extrêmes.

De façon générale la dérivée temporelle ou spatiale d'une fonction est de l'ordre de grandeur du rapport de la fonction à un temps ou une distance caractéristique, définis de façon volontairement vague comme le temps ou la distance pour laquelle la fonction a *varié de façon significative*.

Reconnaissons qu'il faut avoir peu d'expérience pour deviner dans une situation expérimentale donnée, le temps ou la distance caractéristique. C'est comme tout : on commence par se fier aux anciens puis on apprend à voler de ses propres ailes.

Pour les dérivées secondes (y compris les dérivées partielles croisées), il suffit de réitérer le processus. Par exemple pour une fonction  $f(t)$  de temps caractéristique  $\tau$ , on a  $\frac{d^2f}{dt^2}$  de l'ordre de  $\frac{f}{\tau^2}$  ou encore pour une fonction  $g(t, x)$  de temps caractéristique  $\tau$  et de longueur caractéristique  $\delta$ , on a  $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$  de l'ordre de  $\frac{f}{\tau \delta}$ . Toutefois la prudence s'impose : une fonction  $f(t)$  polynomiale de degré 1 offre un démenti cinglant à l'assertion précédente.

## 1.d Conseil de prudence élémentaire

Lorsque l'on simplifie un problème en négligeant un ou plusieurs termes et que l'on en trouve une solution approchée, il faut s'imposer de calculer à partir de celle-ci les expressions des termes négligés et des termes non négligés afin de vérifier que l'approximation commise est valable. Si ce n'est pas le cas, il faut reprendre le travail à zéro. C'est logique mais oublier la vérification est si tentant !

## 2 Solutions approchées d'une équation algébrique.

On ne donne ici que les méthodes les plus courantes utilisées par le physicien. Certes, désormais, il existe des logiciels de calcul formel qui font cela à merveille mais il reste bon de savoir se débrouiller sans eux car dans certaines situations atypiques, ils peuvent avoir un comportement aberrant qui ne peut sauter aux yeux que si l'on a l'habitude des méthodes de la haute antiquité qu'est le monde pré-informatique.

### 2.a Méthodes graphiques.

Pour résoudre une équation de la forme  $f(x) = g(x)$ , on peut tracer (ou faire tracer par un « grapheur ») avec soin les graphes de  $f$  et  $g$  et lire l'abscisse du ou des points d'inter-

section. A défaut d'une grande précision, cette méthode a l'avantage de cerner l'intervalle dans lequel se trouve la solution, ce qui facilite l'usage des méthodes suivantes.

Remarque : Résoudre  $f(x) = g(x)$ , c'est aussi en introduisant une fonction  $h$  arbitraire, résoudre  $h[f(x)] = h[g(x)]$ , ce qui permet avec un bon choix de  $h$  d'avoir  $h[f(x)]$  fonction polynomiale de degré 1, dont le graphe est une droite, donc aisé à tracer. Chaque fois que c'est possible sans compliquer  $h[g(x)]$ , on ne s'en prive pas.

## 2.b Résolution par dichotomie.

Supposons que l'on étudie une équation mise sous la forme<sup>3</sup>  $F(x) = 0$  et qu'une étude graphique préalable ait montré que  $F(x)$  est continue et croît de  $x = a_0$  à  $x = b_0$  avec  $F(a_0) < 0$  et  $F(b_0) > 0$  (ou l'inverse); il y a donc une solution unique entre  $a_0$  et  $b_0$ .

On pose  $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$  et l'on calcule  $F(c_0)$ . Si  $F(c_0) < 0$ , la solution est entre  $c_0$  et  $b_0$  et l'on pose  $a_1 = c_0$  et  $b_1 = b_0$ . Si  $F(c_0) > 0$ , la solution est entre  $a_0$  et  $c_0$  et l'on pose  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = c_0$ . On peut reprendre la méthode en remplaçant le couple  $(a_0, b_0)$  par le couple  $(a_1, b_1)$  avec  $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ . A chaque étape, la largeur de l'intervalle contenant la solution est divisée par 2; en pratique une dizaine d'étapes ( $2^{10} = 1024 \sim 1000$ ) donne une valeur approchée très raisonnable de la solution.

La méthode est aisée à programmer et c'est un exercice classique de programmation qui dérouté le novice (la première fois qu'on lit "si  $f(\frac{a+b}{2}) > 0$  alors  $b = \frac{a+b}{2}$  sinon  $a = \frac{a+b}{2}$ " cela fait un choc<sup>4</sup>).

## 2.c Méthode par itération.

Soit une équation mise sous la forme  $X = f(X)$  et considérons la suite définie par un  $X_0$  arbitraire puis  $X_1 = f(X_0)$ ,  $X_2 = f(X_1)$ , etc. Si la suite des  $X_n$  tend vers une limite  $X_\infty$ , la relation de récurrence  $X_{n+1} = f(X_n)$  donne par passage à la limite  $X_\infty = f(X_\infty)$  et donc  $X_\infty$  est solution de l'équation; mais cela ne prouve pas pour autant que la suite tende vers une limite. Explorons donc cela de façon graphique.

Superposons le graphe de  $Y = f(X)$  (voir la figure 1 p. 8, tirée d'un autre chapitre comme exemple) et celui de  $Y = X$  (la bissectrice des axes). Appelons  $M_0$  le point du graphe de  $f$  d'abscisse  $X_0$ , notons son ordonnée  $X_1 = f(X_0)$  (et non  $Y_1$ , on va voir pourquoi); appelons  $N_0$  le point de la bissectrice de même ordonnée que  $M_0$  soit  $X_1$ , son abscisse est égale à son ordonnée donc c'est  $X_1$ . Appelons  $M_1$  le point du graphe de  $f$  de même abscisse que  $N_0$ , soit  $X_1$ , son ordonnée est notée  $X_2 = f(X_1)$ ; appelons  $N_1$  le point de la bissectrice de même ordonnée que  $M_1$  soit  $X_2$ , son abscisse est égale à son ordonnée donc c'est  $X_2$ ; on itère le processus.

3.  $f(x) = g(x)$  se met sous cette forme avec  $F(x) = f(x) - g(x)$  bien sûr!

4. Les langages raisonnables distinguent, dans l'écriture, l'égalité en tant que test de comparaison et l'égalité d'affectation (souvent notée  $:=$ ) qui donne au membre de gauche la valeur calculée du membre de droite et écrivent plutôt : si... alors  $b := \frac{a+b}{2}$  sinon  $a := \frac{a+b}{2}$

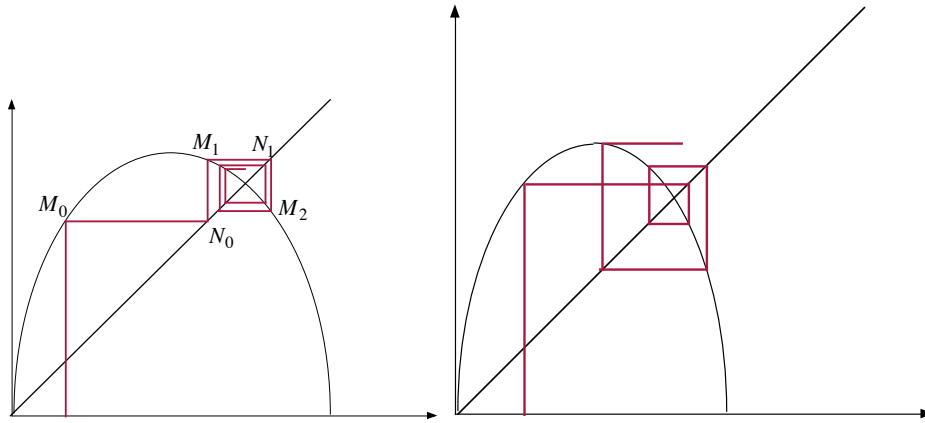


FIGURE 1 – Résolution par itération.

A gauche, on voit la convergence s'amorcer vers l'intersection des deux courbes donc vers la solution de  $X = f(X)$  (notée plus haut  $X_\infty$ ). A droite au contraire, on a plutôt tendance à s'en éloigner. On peut démontrer en analyse qu'une condition nécessaire de convergence est que la dérivée de  $f$  calculée en  $X_\infty$  ait une valeur absolue strictement inférieure à l'unité dans un voisinage de la solution ; cette condition n'est pas suffisante, il faut aussi que  $X_0$  et dans certains cas  $X_1$  soient dans ce voisinage. L'exemple choisi se place dans le cas où la dérivée en  $X_\infty$  est négative ; on laisse le lecteur se dégourdir les doigts en explorant le cas où elle est positive.

Remarque (sur un exemple) : si l'on veut par cette méthode rechercher la solution positive de  $X = f(X)$  avec  $f(X) = \exp(X) - 2$ , on est sûr de l'échec car  $f'(X) = \exp(X)$  supérieur à l'unité pour  $X$  positif. Si l'on transforme  $X = \exp(X) - 2$  en  $X + 2 = \exp(X)$  d'où  $\ln(X + 2) = X$  ou  $X = g(X)$  avec  $g(X) = \ln(X + 2)$ , on est maintenant sûr du succès car  $g'(X) = \frac{1}{X+2}$  inférieur à l'unité pour  $X$  positif. Bref, on peut pratiquement toujours s'arranger pour que ça marche.

### 3 Solution approchée d'une équation différentielle par approximations successives.

La méthode exposée ici s'applique à toute équation différentielle dont un terme est apparemment négligeable devant les autres et qui serait linéaire en l'absence de ce terme. Nous raisonnerons sur un exemple pour fixer les idées.

Soit  $f(t)$  une fonction adimensionnée du temps vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 f}{dt^2} + f(t) = \varepsilon f^2(t)$$



où  $\omega$  est une constante et  $\varepsilon$  une constante petite devant l'unité.

En première approximation négligeons le terme en  $\varepsilon$  et appelons  $f_0(t)$  une solution de l'équation ainsi simplifiée soit :

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{df_0}{dt} + f_0(t) = 0$$

dont la solution est, avec un décalage éventuel de l'origine des temps,  $f_0(t) = A \sin(\omega t)$  où  $A$  est une constante arbitraire.

Revenons à l'équation initiale et cherchons-lui une solution de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + \varepsilon \tilde{f}(t)$$

que l'on reporte dans  $\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2f}{dt^2} + f(t) = \varepsilon f^2(t)$  pour obtenir de façon brute :

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2f_0}{dt^2} + \varepsilon \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + f_0(t) + \varepsilon \tilde{f}(t) = \varepsilon [f_0(t) + \varepsilon \tilde{f}(t)]^2 = \varepsilon [f_0^2(t) + 2\varepsilon f_0(t) \tilde{f}(t) + \varepsilon^2 \tilde{f}^2(t)]$$

Or  $f_0$  est solution de  $\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2f_0}{dt^2} + f_0(t) = 0$ , l'équation se simplifie donc et après simplification par  $\varepsilon$ , on arrive à :

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \tilde{f}(t) = f_0^2(t) + 2\varepsilon f_0(t) \tilde{f}(t) + \varepsilon^2 \tilde{f}^2(t)$$

Si l'on néglige à nouveau les termes en  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$  et en reportant l'expression de  $f_0(t)$ , on arrive à :

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \tilde{f}(t) = f_0^2(t) = A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{A^2}{2} [1 - \cos(2\omega t)]$$

$\tilde{f}(t)$  est somme de la solution générale de  $\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \tilde{f}(t) = 0$  dont il ne faut plus tenir compte car c'est le  $f_0(t)$  de la définition  $f(t) = f_0(t) + \varepsilon \tilde{f}(t)$  et d'une part d'une solution particulière de  $\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \tilde{f}(t) = \frac{A^2}{2}$ , manifestement  $\frac{A^2}{2}$  et d'autre part d'une solution particulière de  $\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\tilde{f}}{dt^2} + \tilde{f}(t) = -\frac{A^2}{2} \cos(2\omega t)$  qu'on trouvera aisément par la méthode des amplitudes complexes. Nous appellerons  $\tilde{f}_1(t)$  cette solution approchée de l'équation en  $\tilde{f}$  et  $f_1(t) = f_0(t) + \varepsilon \tilde{f}_1(t)$  la solution approchée de celle en  $f$ .

Pour une approximation encore plus fine, on pose  $f(t) = f_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{f}(t)$  (en redéfinissant ainsi  $\tilde{f}$ ) et l'on réitère la démarche. On obtient ainsi  $f(t)$  sous forme d'un développement limité en  $\varepsilon$ .

En pratique, on automatise ainsi la démarche : on trouve une première solution, notée  $f_0$ , en négligeant le terme négligeable (c'est son destin, il n'y peut rien) et en résolvant l'équation ainsi simplifiée, puis une seconde solution approchée, notée  $f_1$ , en remplaçant dans le terme négligeable  $f$  par  $f_0$  et en résolvant l'équation ainsi simplifiée, etc. (pour rechercher la solution approchée  $f_n$ , on remplace dans le terme négligeable  $f$  par  $f_{n-1}$ ).

Cela est-il rigoureux et la suite des fonctions  $f_n$  ainsi construites converge-t-elle vers la solution du problème ? Apparemment oui, car c'est par cette méthode (je simplifie bien sûr) que LE VERRIER a prédit l'existence de Neptune à partir des irrégularités de l'orbite d'Uranus. Mathématiquement non, il a été prouvé grâce à quelques contre-exemples cuisants que c'est faux. En général, ça marche mais pas toujours. En pratique, il est presque toujours vrai que la solution ainsi obtenue est valable à court terme ; les divergences n'appaissant qu'à long terme. Dans le système solaire, la « méthode des perturbations » donne de très bons résultats sur quelques millénaires mais qui sont inacceptables quand on passe à l'ordre du milliard d'années<sup>5</sup>.

---

5. le système solaire est âgé de 4 à 5 milliards d'années.