

Chapitre A-V

Analyse dimensionnelle.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On montrera dans ce chapitre que les choses ne sont pas si simples qu'il ne semble. La façon dont on écrit les formules de physique, particulièrement les constantes qui y apparaissent, influe sur le nombre de dimensions d'un système d'unités. Quand le besoin s'en fait sentir, on peut créer une nouvelle dimension, par exemple la quantité de matière pour les chimistes et a contrario inventer un système totalement adimensionné.

On en profitera pour montrer que l'étude dimensionnelle est un bon outil pour les changements de systèmes d'unités.

On montrera ensuite en quoi l'analyse dimensionnelle peut aider à la recherche des lois physiques et quelle en est la limite.

Enfin le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM ira un peu plus loin dans cette démarche en permettant une écriture adimensionnée des lois physiques. On montrera son intérêt sur l'exemple de la force de traînée d'une sphère solide dans un écoulement de fluide.

Table des matières

A-V Analyse dimensionnelle.	1
1 Dimension d'une grandeur physique.	4
1.a Systèmes d'unités.	4
1.b Dimension et changement de système d'unités.	5
1.c Le système international.	7
1.d Système adimensionné d'unités.	8
2 L'analyse dimensionnelle.	9
2.a Force et faiblesse de l'analyse dimensionnelle.	9
2.b Ecriture adimensionnée des lois physiques.	10
2.c Exemple d'application : étude de la traînée d'une sphère.	13

1 Dimension d'une grandeur physique.

1.a Systèmes d'unités.

- Unités de base et unités dérivées.

Contentons-nous pour l'instant de faire de la mécanique, nous avons besoin pour la cinématique d'une unité de longueur, par exemple le mètre, et d'une unité de temps, par exemple la seconde, et pour la dynamique, d'une unité de masse, par exemple le kilogramme. Ces trois unités sont des *unités de base* à partir desquelles on peut définir des *unités dérivées*, par exemple l'unité de surface, le mètre carré, et l'unité de vitesse, le mètre par seconde.

- Les constantes dans les formules.

La définition des unités dérivées semble ne pas poser de problème et pourtant ce n'est pas si simple qu'il n'y paraît. Reprenons l'exemple de l'un de mes professeurs que nous appelions VDL.

La civilisation occidentale est née en Grèce et les Grecs construisaient des temples carrés ou rectangulaires, c'est pourquoi l'unité de surface est la surface d'un carré ayant pour côté l'unité de longueur, le mètre de nos jours. Il s'ensuit que la surface en mètres carrés d'un carré de côté a est $S = a^2$ et celle d'un cercle de rayon R est $S = \pi R^2$.

Mais si la civilisation était née chez les Inuits qui construisent des igloos ronds, l'unité de surface aurait été le « mètre rond », surface d'un cercle ayant pour rayon l'unité de longueur. Dès lors, la surface en mètres ronds d'un carré de côté a est $S = \frac{1}{\pi} a^2$ et celle d'un cercle de rayon R est $S = R^2$.

Il nous faut en conclure que la présence d'une constante dans une formule est une façon cachée de définir les unités dérivées. Parfois même, écrire ou non une constante dans une formule définit ou non une nouvelle unité de base.

Par exemple, dans l'histoire de l'électrostatique, il y a eu plusieurs façons de noter la force de COULOMB, soit $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (système CGS électrostatique), soit $F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 r^2}$ (système CGS électromagnétique), soit $F = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$ (système CGS électromagnétique rationalisé), avec chaque fois une définition différente de l'unité de charge électrique. A partir de la première formulation l'unité de charge est une unité dérivée des seules unités mécaniques, celle de force et celle de longueur. A partir des deux autres, on peut choisir arbitrairement une unité de charge et en déduire la valeur de la constante ou à l'inverse, choisir arbitrairement la valeur de la constante et en déduire l'unité de charge. De facto, d'une part l'unité de charge devient une nouvelle unité de base et donne ainsi à l'électromagnétisme un lot d'unités spécifiques et d'autre part la constante ϵ_0 devient dimensionnée, passe du statut de constante mathématique à celui de constante physique (comme c , vitesse de la lumière)

et est présentée comme une caractéristique de vide (sa *permittivité*) du vide. Signalons enfin que, pour des raisons pratiques, on a choisi comme unité de base, non celle de charge, mais celle d'intensité en imposant la valeur non de ϵ_0 mais celle de μ_0 .

La définition de la mole est elle aussi significative. Initialement, les travaux de LAVOISIER ont conduit à l'hypothèse atomique sans que l'on sache quelle était la taille des atomes et l'on ne pouvait donc pas compter les atomes mais seulement mesurer le rapport entre deux nombres d'atomes dans une réaction chimique. D'où le choix d'une unité pratique, la mole, égale, dans sa définition historique, au nombre d'atomes dans un gramme d'hydrogène, nombre connu sous le nom de nombre d'AVOGADRO. A partir de là, on a le choix entre deux possibilités, considérer que le nombre d'AVOGADRO est, comme tout résultat d'un comptage, un nombre sans dimension et la mole est alors une fausse unité comme le radian, ou prendre la mole comme unité de base pour doter la chimie d'unités spécifiques, auquel cas le nombre d'AVOGADRO a une unité la mol^{-1} .

1.b Dimension et changement de système d'unités.

• Une définition possible de la dimension.

Il est assez aisé de manipuler les dimensions des grandeurs physiques mais pas très simple d'en donner une définition qui ait un sens. Je ne résiste pas au plaisir de vous donner celle qui suit, que l'on rencontre de moins en moins souvent et qui offre l'avantage de donner en outre une façon aisée de changer de système d'unités pour répondre à ce genre de question saugrenue : l'unité CGS de pression est la barye, combien de pascals vaut-elle ?

Définissons dans un premier temps la dimension de la longueur dans la conversion CGS (centimètre-gramme-seconde) vers MKS (mètre-kilogramme-seconde). Soit une longueur ℓ mesurée dans les deux systèmes ; sa longueur $\tilde{\ell}_{CGS}$ mesurée dans le système CGS est le rapport de ℓ à l'unité de longueur dans le système CGS, notée ici U_{CGS} (le centimètre en fait) donc :

$$\tilde{\ell}_{CGS} = \frac{\ell}{U_{CGS}}$$

où ℓ et U_{CGS} sont des grandeurs physiques et $\tilde{\ell}_{CGS}$ un nombre qui est la mesure de la grandeur ℓ dans le système CGS. De la même façon, sa longueur $\tilde{\ell}_{MKS}$ mesurée dans le système MKS est le rapport de ℓ à l'unité de longueur dans le système MKS, notée ici U_{MKS} (le mètre en fait) donc :

$$\tilde{\ell}_{MKS} = \frac{\ell}{U_{MKS}}$$

On a :

$$\ell = \tilde{\ell}_{CGS} U_{CGS} = \tilde{\ell}_{MKS} U_{MKS}$$

Par définition, la dimension des longueurs, notée $[L]_{CGS \rightarrow MKS}$ dans le changement

CGS vers MKS est l'un des deux rapports que la relation précédente rend égaux :

$$[L]_{CGS \rightarrow MKS} = \frac{U_{CGS}}{U_{MKS}} = \frac{\tilde{\ell}_{MKS}}{\tilde{\ell}_{CGS}}$$

soit, dans notre exemple :

$$[L]_{CGS \rightarrow MKS} = \frac{U_{CGS}}{U_{MKS}} = \frac{1\text{cm}}{1\text{m}} = 10^{-2}$$

Que l'on peut exploiter en disant que la longueur $\tilde{\ell}_{MKS}$ en mètre d'un pas de $\tilde{\ell}_{CGS} = 80\text{ cm}$ est :

$$\tilde{\ell}_{MKS} = [L]_{CGS \rightarrow MKS} \tilde{\ell}_{CGS} = 10^{-2} \cdot 80 = 0,80\text{ m}$$

Laissons tomber désormais les indices pour alléger l'écriture. De la même façon, la dimension des temps et celle des masses sont :

$$[T] = \frac{U_{CGS}}{U_{MKS}} = \frac{1\text{s}}{1\text{s}} = 1$$

$$[M] = \frac{U_{CGS}}{U_{MKS}} = \frac{1\text{g}}{1\text{kg}} = 10^{-3}$$

• Equation aux dimensions des unités dérivées.

Considérons la vitesse constante v d'un corps parcourant la longueur ℓ pendant le temps τ , ces grandeurs physiques sont liées par :

$$v = \frac{\ell}{\tau}$$

et leurs mesures dans les deux systèmes d'unités, qui définissent¹ ainsi leurs deux unités de vitesse, sont liées respectivement par :

$$\tilde{v}_{CGS} = \frac{\tilde{\ell}_{CGS}}{\tilde{\tau}_{CGS}}$$

$$\tilde{v}_{MKS} = \frac{\tilde{\ell}_{MKS}}{\tilde{\tau}_{MKS}}$$

d'où la dimension d'une vitesse est :

$$[V] = \frac{\tilde{v}_{MKS}}{\tilde{v}_{CGS}} = \frac{\frac{\tilde{\ell}_{MKS}}{\tilde{\tau}_{MKS}}}{\frac{\tilde{\ell}_{CGS}}{\tilde{\tau}_{CGS}}} = \frac{\tilde{\ell}_{MKS}}{\tilde{\ell}_{CGS}} \frac{\tilde{\tau}_{CGS}}{\tilde{\tau}_{MKS}} = \frac{[L]}{[T]} = [L] [T]^{-1}$$

1. Il faut donc que les deux systèmes définissent les grandeurs à partir de formules qui notent de la même façon les constantes, on dit que les systèmes sont compatibles ; sinon, on gère la situation en introduisant le rapport des termes supplémentaires, par exemple le 4π entre système électromagnétique rationalisé et non rationalisé.

En fait, on comprend très vite qu'il est inutile de faire tout ce raisonnement et que si une formule entre grandeurs physique est $v = \frac{\ell}{\tau}$, alors on a $[V] = \frac{[L]}{[T]}$; par exemple de $F = m \frac{dv}{dt}$, on déduit $[F] = [M] [V] [T]^{-1} = [M] [L] [T]^{-2}$ et de $p = \frac{F}{S}$, on déduit :

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[M] [L] [T]^{-2}}{[L]^2} = [M] [L]^{-1} [T]^{-2} = 10^{-3} (10^{-2})^{-1} 1^{-2} = 10^{-1}$$

d'où, pour répondre à la question-quizz initiale :

$$[P] = \frac{U_{CGS}}{U_{MKS}} = \frac{1 \text{ barye}}{1 \text{ pascal}} = 10^{-1}$$

Donc une barye vaut 0,1 pascal. Ce genre de calcul reste à l'ordre du jour puisque l'essentiel des thèses publiées utilise non pas le système légal mais le CGS.

Remarque : Attention au piège de la notation des dérivées secondes; la dimension de $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ N'EST PAS $[L]^2 [T]^{-2}$ car la notation d^2x ne désigne pas un carré de longueur mais provient du raccourci graphique de $\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)$; on a en fait :

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2} \right] = \left[\frac{d \left(\frac{dx}{dt} \right)}{dt} \right] = \frac{\left[\frac{dx}{dt} \right]}{[T]} = \frac{\frac{[L]}{[T]}}{[T]} = \frac{[L]}{[T]^2}$$

1.c Le système international.

Les unités de base du système international sont

- les unités nécessaires à la mécanique
 - l'unité de temps : la seconde (symbole s) dont la définition actuelle est liée à la technologie des horloges atomiques. Ses multiples restent sexagésimaux, la minute (min), l'heure (h) et le jour (d comme day),
 - l'unité de longueur : le mètre (m) défini à partir de la seconde de sorte que la vitesse de la lumière soit définitivement et exactement 299 792 458 m/s,
 - l'unité de masse : le kilogramme (kg) toujours défini à partir d'un étalon construit en 1889,
- pour l'électromagnétisme, l'unité d'intensité électrique : l'ampère (A), dont la définition fixe la valeur de la constante μ_0 à $4 \pi 10^{-7}$,
- pour la thermodynamique, l'unité de température : le kelvin (K) dont la définition fixe la température du point triple de l'eau à 273,16 K ,
- pour la chimie, l'unité de quantité de matière : la mole (mol) dont la définition fixe la masse d'une mole d'atomes de l'isotope 12 du carbone³ à 12 grammes,

2. car $\frac{dv}{dt}$ est le rapport limite entre une différence élémentaire de vitesse et une durée élémentaire et qu'une différence de vitesses a la même dimension qu'une vitesse.

3. On a remplacé, dans la définition historique, l'hydrogène par le carbone car dans les spectrographes de masse, il traîne toujours des traces de carbone à cause de l'huile des pompes à vide.

- pour la photométrie (à l'interface physique/physiologie pour les mesures de lumière visible), l'unité d'intensité lumineuse, le candela (cd).

Remarque : Le radian, unité pour les angles, est une « fausse unité » ; en effet l'angle sous lequel on voit un arc de cercle depuis le centre est le rapport de la longueur de l'arc au rayon, donc le rapport de deux longueurs, c'est donc un nombre sans dimension. On a introduit le radian pour préciser qu'on ne mesure pas en degrés.

1.d Système adimensionné d'unités.

On peut aisément défaire ce qui a été fait en créant le système international.

Les grandeurs photométriques sont des grandeurs énergétiques pondérées par la courbe de réponse de l'œil humain (en gros), on pourrait s'en passer en parlant par exemple de « puissance visible » en watts; il en est de même pour la mole, n'en déplaie aux chimistes, car on pourrait parler de concentrations en entités par mètre cube avec de grandes puissances de dix.

La thermodynamique a permis de comprendre que la température est la manifestation de l'agitation thermique et que l'énergie cinétique moyenne d'un atome de gaz monoatomique parfait est $E = \frac{3}{2} k_B T$ ou k_B est la constante de BOLTZMANN. Or, on a vu plus haut que c'est le choix de l'écriture avec ou sans constante qui détermine les unités de base et non l'inverse; on pourrait donc imposer l'écriture $E = \frac{3}{2} T$, la température serait homogène à une énergie et l'on n'aurait pas besoin de nouvelle unité.

Même remarque pour l'électromagnétisme; du reste historiquement, on l'a vu plus haut, la force de Coulomb s'écrivait initialement sans constante $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$, d'où la dimension d'une charge est, dans un tel système, telle que :

$$[F] = \frac{[Q]^2}{[L]^2}$$

$$[M] [L] [T]^{-2} = \frac{[Q]^2}{[L]^2}$$

$$[Q] = [M]^{\frac{1}{2}} [L]^{\frac{3}{2}} [T]^{-1}$$

Nous voici revenus aux trois unités de base de la mécanique. On peut aller plus loin encore dans le détricotage en s'appuyant sur les constantes universelles.

On peut convenir que la vitesse de la lumière soit égale à l'unité et soit sans dimension, la formule-culte $E = m c^2$ devenant $E = m$; du reste l'école russe avec LANDAU et LIFCHITZ ne s'en prive pas. Dans un tel système longueurs et durées sont homogènes ($[L] = [T]$) et l'unité de temps sert d'unité de longueur, il n'y a plus que deux unités de base l'une pour le « temps-longueur », l'autre pour la masse. Certes, dans la vie courante, ça deviendra compliqué car « rendez-vous dans une heure » voudra-t-il dire après une durée d'une heure ou à une distance d'une heure? Mais en astronomie, ça redevient pertinent : une étoile

située à un million d'années-lumière est vue dans l'état où elle était il y a un million d'années.

On peut en outre convenir

- ou bien que la constante de gravitation soit égale à l'unité et soit sans dimension, alors $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ conduit à $[M][L][T]^{-2} = [M]^2[L]^{-2}$, soit $[M] = [L]^3[T]^{-2}$ et puisque $[L] = [T]$, on aurait enfin $[M] = [T]$ et donc une seule unité de base.
- ou bien que la constante de PLANCK soit égale à l'unité et soit sans dimension, alors $E = \nu$ conduit à $[M][L]^2[T]^{-2} = [T]^{-1}$, soit $[M] = [L]^{-2}[T]$ et puisque $[L] = [T]$, on aurait enfin $[M] = [T]^{-1}$ et donc une seule unité de base.
- ou bien les deux à la fois, ce qui impose d'avoir à la fois $[M] = [T]$ et $[M] = [T]^{-1}$, d'où $[M] = [L] = [T] = 1$ le « 1 » signifiant que tout est désormais adimensionné.

Bien sûr, un tel système est parfaitement inutilisable. Dimensionner les grandeurs physiques, c'est imposer un cadre de réflexion pour chaque discipline (chimie, électromagnétisme, thermodynamique, photométrie) ce qui permet à la physique d'aller de l'avant en évitant les confusions entre grandeurs. Mais imposer un cadre de réflexion peut aussi empêcher de voir une vérité un peu à côté de la route que l'on vous a tracée. Dans la quête de réduire la physique à une théorie du tout, il n'est du reste pas impossible que ce type d'approche adimensionnée puisse contribuer à progresser vers le but ultime.

2 L'analyse dimensionnelle.

2.a Force et faiblesse de l'analyse dimensionnelle.

Prenons un exemple : la fréquence f du son émis par une corde de guitare dépend de sa longueur ℓ (variable selon la position des doigts sur le manche), de sa tension T (force avec laquelle elle est tendue) et de sa masse ou ce qui revient au même, sa masse linéaire μ (masse par unité de longueur). On espère une loi simple avec uniquement des multiplications et des exposants, quelque chose comme :

$$f = \ell^\alpha T^\beta \mu^\gamma$$

Remplaçons les grandeurs physiques par leurs dimensions :

$$[T]^{-1} = [L]^\alpha ([M][L][T]^{-2})^\beta ([M][L]^{-1})^\gamma$$

Détaillons l'égalité dans les deux membres des exposants de $[L]$, $[M]$ et $[T]$:

$$\begin{cases} [L] : & 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ [M] : & 0 = \beta + \gamma \\ [T] : & -1 = -2\beta \end{cases}$$

D'où l'on tire aisément $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$ et $\gamma = -1/2$ soit $f = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Ce résultat est obtenu en quelques lignes or un raisonnement mécanique conduit en plusieurs pages au même résultat mais à une constante adimensionnée près soit $f = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ qui est le résultat correct.

Que conclure? Ceci :

- L'analyse dimensionnelle n'a pas valeur de preuve car elle n'appuie pas son résultat sur les axiomes de la physique (dans l'exemple, les lois de la mécanique appliquée à la corde).
- Elle ne donne pas le bon résultat, il s'en faut d'une constante multiplicative adimensionnée qu'elle ne peut pas trouver par sa nature même.
- Mais elle donne des pistes pour l'étude expérimentale (vérifier, par exemple, qu'à tension et masse linéique égales, la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur) et c'est plus facile de mener une expérience quand on sait ce que l'on cherche.
- L'expérience prouve, même si ce n'est pas démontrable, que la constante adimensionnée reste toujours de l'ordre de grandeur de l'unité (comprenez comprise généralement entre 0,3 et 3, exceptionnellement entre 0,1 et 10) et donc donne toujours le bon ordre de grandeur pour le résultat.
- En conclusion, il est bon, pour se donner des pistes, de toujours commencer une nouvelle étude théorique ou expérimentale par une analyse dimensionnelle (ce qui ne prendra que peu de temps) mais il ne faut jamais prendre son résultat pour argent comptant.

2.b Ecriture adimensionnée des lois physiques.

Une loi physique, la plupart du temps, exprime une grandeur physique g comme fonction de différents k paramètres p_1, p_2, \dots, p_k , soit :

$$g = F(p_1, p_2, \dots, p_k)$$

mais cette fonction n'est pas toujours explicite, elle peut être implicite quand g est solution d'une équation faisant intervenir les paramètres, quelque chose comme :

$$\phi(g, p_1, p_2, \dots, p_k) = 0$$

(ce qui du reste, en posant $\phi(g, p_1, p_2, \dots, p_k) = g - F(p_1, p_2, \dots, p_k)$, inclut le cas explicite.)

Rien n'empêche ensuite de noter $p_0 = g$, puis de décaler tous les indices d'un cran en posant $q_i = p_{i-1}$ et de noter $n = k + 1$, on arrive ainsi à :

$$\phi(p_0, p_1, p_2, \dots, p_k) = 0$$

$$\phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

Toute loi physique peut donc être formulée sous cette forme de relation entre grandeurs physiques.

Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM ou « théorème π » affirme que toute loi physique peut être formulée en terme de relation entre grandeurs adimensionnées construites à partir des paramètres, soit

$$\Phi(\pi_1, \dots, \pi_m) = 0$$

avec des π_i de la forme :

$$\pi_i = \prod_{j=1}^{j=n} q_j^{\alpha_{ij}} = q_1^{\alpha_{i1}} q_2^{\alpha_{i2}} \dots q_n^{\alpha_{in}}$$

où les α_{ij} sont des constantes telles que les π_i soient adimensionnés.

C'est le genre de théorème que l'on énonce presque partout et que l'on démontre presque nulle part. Pourtant ce n'est pas si difficile, non de donner une démonstration parfaitement rigoureuse, mais de fournir des explications convaincantes.

Une fonction quelconque est un mélange d'additions-soustractions, de multiplications-divisions-puissances et de fonctions élémentaires ; voici un exemple (surréaliste) pour me faire comprendre :

$$\phi(x, y, z, t, u, v) = \frac{\sin(xu)}{y^2} - zch^3(yz^3 \cos^2(tv^2)) + 17xz^2 = 0$$

Première assertion : deux grandeurs que l'on additionne ou soustrait ont la même dimension. Supposons en effet que la fonction s'écrive $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = X - Y$ (donc $X = Y$ car $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$) où X et Y sont des fonctions des q_i et supposons que X et Y n'aient pas la même dimension, c'est à dire qu'elles diffèrent par au moins un exposant d'au moins une unité de base, disons pour fixer les idées :

$$[X] = [M] [L]^2 [T]^{-1} \quad \text{et} \quad [Y] = [M]^2 [L]^2 [T]^{-1}$$

Changeons de système d'unités en prenant une unité de masse dix fois plus petite et toutes les autres inchangées, la mesure de X serait alors dix fois plus grande et celle de Y cent fois plus, X et Y ne seraient plus égales avec ces unités, ce qui est absurde : l'égalité de deux grandeurs ne dépend pas des unités.

C'est l'occasion de rappeler que deux grandeurs de même dimension sont dites *homogènes*.

Seconde assertion : l'argument d'une fonction est sans dimension⁴ et sa valeur aussi, sauf dans le cas d'une fonction monôme. L'idée est de dire qu'une fonction raisonnable a

4. Même si l'on ne comprend rien à toute cette démonstration, il faudra se souvenir que l'argument d'une fonction, exception faite des monômes, est sans dimension.

un développement limité, par exemple :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ce qui suppose, au vu de la première assertion, que x , x^3 , x^5 , etc. ont même dimension, ce qui n'est possible que si x est sans dimension, sinon les exposants des unités de base seraient multipliés par trois dans x^3 dont la dimension serait alors différente. Ensuite, si x et ses puissances sont sans dimension, il en est de même pour la valeur de la fonction ($x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ par ex.). Le seul cas où ce serait faux, c'est celui où le développement limité ne contient qu'un seul terme (on parle de fonction *monôme*) mais alors on se ramène au cas des multiplications-divisions-puissances.

Les fonctions non-monômes de mon exemple sont donc sans dimension : $y z^3 \cos^2(t v^2)$ est homogène à $y z^3$ et $\frac{\sin(x u)}{y^2}$ à $\frac{1}{y^2}$, etc. donc

$$\phi(x, y, z, t, u, v) = \frac{\sin(x u)}{y^2} - z \operatorname{ch}^3(y z^3 \cos^2(t v^2)) + 17 x z^2 = 0$$

à

$$\tilde{\phi}(x, y, z, t) = \frac{1}{y^2} - z + 17 x z^2$$

La loi $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ est donc homogène à une somme de monômes (seconde assertion) qui ont tous la même dimension (première assertion) ; il suffit alors de diviser le tout par l'un des monômes pour arriver à une somme de nouveaux monômes sans dimension. Reprenons mon exemple et divisons la loi $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ par le dernier terme, à la constante adimensionnée près pour alléger :

$$\phi(x, y, z, t, u, v) = \frac{\sin(x u)}{y^2} - z \operatorname{ch}^3(y z^3 \cos^2(t v^2)) + 17 x z^2 = 0$$

$$\psi(x, y, z, t, u, v) = \frac{1}{x z^2} \phi(x, y, z, t, u, v) = \frac{\sin(x u)}{x y^2 z^2} - \frac{1}{x z} \operatorname{ch}^3(y z^3 \cos^2(t v^2)) + 17 = 0$$

Au vu de la seconde assertion, $\pi_1 = x u$, $\pi_2 = t v^2$ puis dans une seconde étape $\pi_3 = y z^3$ sont sans dimension ; puis en remarquant que les fonctions non-monômes (\sin , \cos et ch) sont sans dimension et que l'on donc a donc les mêmes dimensions que dans

$$\tilde{\psi}(x, y, z, t) = \frac{1}{x y^2 z^2} - \frac{1}{x z} + 17 = 0$$

où 17 est sans dimension et l'on affirme donc enfin que $\pi_4 = x y^2 z^2$ et $\pi_5 = x z$ sont sans dimension et la loi s'écrit donc :

$$\frac{\sin \pi_1}{\pi_4} - \frac{\operatorname{ch}^3(\pi_3 \cos^2(\pi_2))}{\pi_5} + 17 = 0$$

Attention toutefois, mettre une loi physique sous la forme décrite dans le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM n'est, en général, ni pertinent ni parlant, par contre ce pourra être une étape utile dans la recherche de cette loi comme le montrera l'exemple du paragraphe suivant.

Remarque : là où l'on trouve énoncé le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM, on trouve aussi affirmé, toujours sans démonstration, que le nombre de variables adimensionnées (les π_i) est égal au nombre de variables du départ (les q_i) diminué du nombre d'unités de base utilisées par ces variables. On ne trouve pas la démonstration parce que ce n'est pas toujours vrai et donc c'est sans grand intérêt.

La voici toutefois pour les curieux :

L'idée est la suivante : supposons pour fixer les idées qu'il y ait cinq variables « tournant » sur les seules unités de longueur, de temps et de masse. On peut écrire, pour $i \in [1, 5]$, $[Q_i] = [L]^{m_{i1}} [T]^{m_{i2}} [M]^{m_{i3}}$. Trouver un π adimensionné, c'est trouver cinq exposants x_i tels que $q_1^{x_1} q_2^{x_2} q_3^{x_3} q_4^{x_4} q_5^{x_5}$ soit adimensionné, c'est à dire :

$$[\Pi] = [Q_1]^{x_1} [Q_2]^{x_2} [Q_3]^{x_3} [Q_4]^{x_4} [Q_5]^{x_5} = 1 = [L]^0 [T]^0 [M]^0$$

On reporte les dimensions de q_i et l'on annule les trois exposants des trois unités de base ; on arrive au système :

$$\begin{cases} m_{1,1} x_1 + m_{2,1} x_2 + m_{3,1} x_3 + m_{4,1} x_4 + m_{5,1} x_5 = 0 \\ m_{1,2} x_1 + m_{2,2} x_2 + m_{3,2} x_3 + m_{4,2} x_4 + m_{5,2} x_5 = 0 \\ m_{1,3} x_1 + m_{2,3} x_2 + m_{3,3} x_3 + m_{4,3} x_4 + m_{5,3} x_5 = 0 \end{cases}$$

Si la matrice des $m_{i,j}$ est de rang trois (c'est à dire que l'on peut trouver, comme c'est le plus souvent le cas, trois colonnes formant un déterminant non nul, disons les trois premières), on peut alors fixer arbitrairement les valeurs des x des deux autres colonnes (x_4 et x_5 dans mon exemple) et en déduire les trois autres de façon unique car c'est un système de CRAMER ; c'est dire que l'ensemble des solutions est de dimension deux (cinq variables de départ, les q_i , moins trois unités de base) donc il n'y a que deux solutions linéairement indépendantes par exemple celle obtenue avec $(x_4, x_5) = (1, 0)$ et celle pour $(x_4, x_5) = (0, 1)$. Si l'on trouve trois π adimensionnés, le troisième est forcément lié aux deux premiers par une relation du type $\pi_3 = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2}$, ce qui fait que l'on peut tout exprimer en fonction uniquement de π_1 et π_2 . La seconde partie du théorème est alors valable. Mais si la matrice est de rang deux, voire un, ce qui peut bien sûr arriver, ce résultat n'est plus valable !

2.c Exemple d'application : étude de la traînée d'une sphère.

Considérons un solide se déplaçant à vitesse constante dans un fluide qui est au repos loin de lui (ou ce qui revient au même à un changement de référentiel près, immobile dans un fluide qui, loin de lui, a une vitesse uniforme). Quelle force (appelée force de *traînée* ou traînée tout court) s'exerce sur le solide ? Cherchons à deviner les facteurs pertinents :

- la vitesse relative V , bien sûr,
- la forme et la taille du solide, mais pas du tout son intérieur car le fluide ne peut interagir que par des forces surfaciques ; limitons nous à une forme sphérique, la taille sera donnée par le rayon R ,
- la nature du fluide, mais là on hésite entre deux idées :

- comme le solide doit repousser le fluide et donc le mettre en mouvement, c'est la masse volumique μ du fluide qui importe,
- comme la viscosité gère les inhomogénéités de vitesses et qu'il y a vitesse relative, c'est la viscosité η qui importe.

On hésitera donc entre deux formules donnant la force F en fonction soit de R, V et μ , soit de R, V et η . Tentons donc de trouver une loi *monôme*, soit $F = R^\alpha.V^\beta.\mu^\gamma$ soit $F = R^\alpha.V^\beta.\eta^\gamma$ à une constante multiplicative non dimensionnée près et raisonnons par analyse dimensionnelle, on a :

- $[F] = M.L.T^{-2}$
- $[R] = L$
- $[V] = L.T^{-1}$
- $[\mu] = M.L^{-3}$
- pour η , c'est moins immédiat ; on part d'une définition possible de la viscosité de la forme $F = \eta \frac{\partial v}{\partial z} dS$ d'où $M.L.T^{-2} = [\eta].\frac{L.T^{-1}}{L}.L^2$ d'où $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$

La première hypothèse donne $M.L.T^{-2} = L^\alpha.(L.T^{-1})^\beta.(M.L^{-3})^\gamma$ d'où, en identifiant les exposants, $1 = \gamma$, $1 = \alpha + \beta - 3\gamma$ et $-2 = -\beta$ d'où $\alpha = 2$, $\beta = 2$ et $\gamma = 1$ et une loi en $\mu.R^2.V^2$

La seconde hypothèse donne $M.L.T^{-2} = L^\alpha.(L.T^{-1})^\beta.(M.L^{-1}.T^{-1})^\gamma$ d'où, en identifiant les exposants, $1 = \gamma$, $1 = \alpha + \beta - \gamma$ et $-2 = -\beta - \gamma$ d'où $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$ et une loi en $\eta.R.V$

Laquelle est valable ? Le suspense est insoutenable !

REYNOLDS a eu l'idée de faire apparaître les résultats expérimentaux sous forme de relation entre deux nombres sans dimensions et d'en tracer le graphe (Voir figure 1 p.15) sous forme logarithmique avec :

- en abscisse le rapport des deux lois de force, sans les constantes soit :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu R^2 V^2}{\eta R V} = \frac{\mu R V}{\eta} = \frac{R V}{\nu}$$

appelé depuis nombre⁵ de REYNOLDS ; en fait c'est son logarithme décimal qui sert d'abscisse,

- en ordonnée la force divisée par la loi aux grandes vitesses sans constante soit

$$\frac{F}{\mu R^2 V^2}$$

en fait c'en est son logarithme décimal qui sert d'abscisse

Toutes les expériences avec toutes sortes de fluides, de rayons et de vitesses confirment alors une courbe unique⁶ tracée en échelle logarithmique :

5. Une grandeur adimensionnée créée en application du théorème de VASCHY-BUCKINGHAM est traditionnellement appelée « nombre de » suivi du nom du premier à l'avoir utilisée.

6. sauf complication quand, par exemple, la vitesse V s'approche de la vitesse du son c_{son} dans le fluide, auquel cas on introduit une nouvelle grandeur adimensionnée V/c_{son} appelée nombre de MACH.

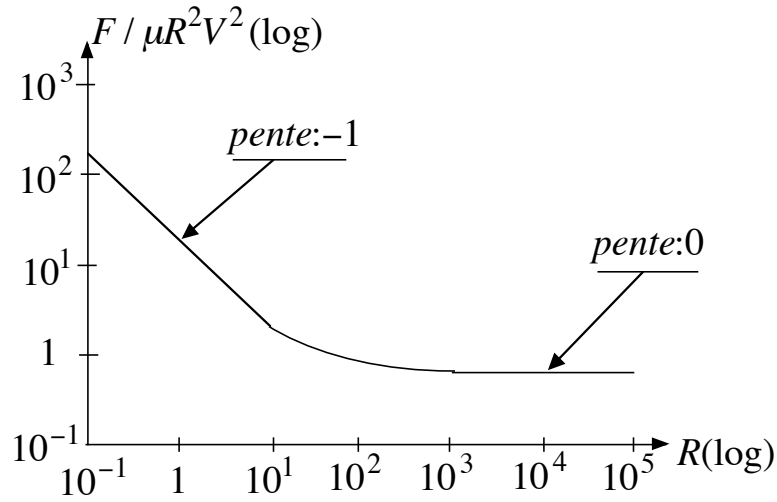


FIGURE 1 – Traînée d'une sphère.

– pour \mathcal{R} inférieur à 10, la pente -1 conduit à :

$$\log\left(\frac{F}{\mu R^2 V^2}\right) = Cte - \log\left(\frac{\mu R^2 V^2}{\eta R V}\right)$$

$$\frac{F}{\mu R^2 V^2} = Cte \left(\frac{\mu R^2 V^2}{\eta R V}\right)^{-1} = Cte \frac{\eta R V}{\mu R^2 V^2}$$

$$F = Cte \eta R V$$

Une étude théorique a été possible qui a permis de calculer la constante dont la valeur a été validée par l'expérience; on a $F = 6 \pi \eta . R . V$, formule connue sous le nom de loi de STOKES.

– pour \mathcal{R} supérieur à 1000, la pente nulle conduit à :

$$\log\left(\frac{F}{\mu R^2 V^2}\right) = Cte$$

$$\frac{F}{\mu R^2 V^2} = Cte$$

$$F = Cte \mu R^2 V^2$$

L'usage est de noter $F = C_x \mu S v^2 / 2$ où $S = \pi R^2$ est la surface de la sphère projetée sur un plan (orthogonal à la vitesse si l'on veut étendre la notation à autre chose qu'une sphère); ici, la constante n'a pu être déterminée qu'expérimentalement et vaut $C_x = 0,44$. On note parfois aussi $F = C \mu R^2 v^2$ où $C = \pi C_x / 2 = 0,69$.

- pour \mathcal{R} compris entre 10 et 1000, on observe une zone de raccordement. Aux vitesses moyennes, ni l'une ni l'autre des formules ne convient donc et c'est là qu'une écriture adimensionnée a permis de progresser, en résolvant en outre l'épineux problème de trouver le domaine de validité des deux formules précédentes.

Mais, même si le passage par les grandeurs adimensionnées a permis de bien comprendre les choses, il reste plus simple, plus naturel et plus parlant pour les petits ou grands nombres de REYNOLDS d'écrire de façon dimensionnée $F = 6 \pi \eta R V$ ou $F = C_x \mu S v^2 / 2$