

Chapitre A-VI

Bilans dans un volume de contrôle.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Après avoir introduit la notion de système ouvert ou volume de contrôle, on montre, sur l'exemple du turbo-réacteur, comment lui lier un système fermé auquel on pourra appliquer les théorèmes de la physique en introduisant des débits ou flux entrant et sortant.

On systématise cette approche pour aboutir à la formule de Reynolds. On en profite pour montrer que tout terme surfacique fait intervenir un vecteur densité de flux s'il est scalaire, une matrice s'il est vectoriel, matrice équivalente à un scalaire dans des cas d'isotropie.

On montre enfin comment passer de la formulation intégrale d'une loi physique à une formulation locale en terme de champ. Enfin la conservation de la masse permet de transformer toute autre formulation locale volumique en une formulation locale massique où l'on retrouve la dérivée particulière de la mécanique des fluides.

On termine par une remarque sur le second principe de la thermodynamique, atypique car formulé par une inégalité.

Table des matières

A-VI Bilans dans un volume de contrôle.	1
1 Premières notions.	4
1.a Exemple introductif : le turboréacteur.	4
1.b Système et volume de contrôle.	7
1.c Problèmes unidirectionnels et assimilés en régime permanent.	8
2 Formulation intégrale des lois physiques.	11
2.a Calcul de débits.	11
2.b Formule de Reynolds.	14
2.c Formule de Reynolds avec source surfacique.	15
2.d Formule de Reynolds vectorielle.	17
3 Formulation locale des lois physiques.	19
3.a Cas d'une loi scalaire.	19
3.b Conservation de la masse	21
3.c Formulation locale massique.	21
3.d Cas d'une loi vectorielle.	22
4 Remarque sur le second principe de la thermodynamique.	23

1 Premières notions.

1.a Exemple introductif : le turbo-réacteur.

- **Poussée d'un réacteur.**

Avant d'aborder une étude générale, rien ne vaut un petit exemple.

Considérons donc un turbo-réacteur, supposé unique pour alléger l'exposé, propulsant un avion en vol horizontal parallèlement à Ox . Le compresseur, entraîné par la turbine, aspire par unité de temps une masse D_e , appelée débit massique, d'air frais, à une vitesse relative notée $\vec{v}_e = -v_e \vec{e}_x$; cet air sert à la combustion d'un débit massique D_0 de combustible provenant des réservoirs (grâce à une pompe); les gaz brûlés, après avoir mis en mouvement la turbine, sortent avec le débit massique $D_s = D_e + D_c$ et une vitesse relative notée $\vec{v}_s = -v_s \vec{e}_x$, rendue énorme par la tuyère d'éjection. La figure 1 p. 4 en est le schéma de principe.

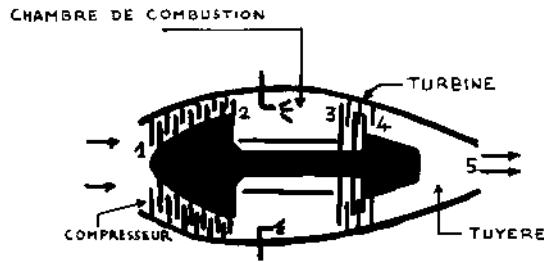


FIGURE 1 – Turbo-réacteur.

L'idée de choisir comme système l'avion est mauvaise car ce n'en est pas un pour la bonne raison que sa composition varie avec le temps. On dit traditionnellement que c'est un *système ouvert* (un oxymore donc) et de façon plus raisonnable que c'est un *volume de contrôle*. Les lois de la physique ne s'appliquent qu'aux systèmes de composition fixe traditionnellement appelés *systèmes fermés* (un pléonasme donc).

Une meilleure idée consiste à définir un système fermé à partir de l'avion à un instant initial t et de voir comment il évolue. Le meilleur choix est ici de définir le système comme réunion à l'instant t de l'avion et tout ce qu'il contient, carburant compris et de l'air qui y entrera entre t et $t + dt$. A l'instant $t + dt$, le système est devenu ceci : la réunion de l'avion à $t + dt$ (donc air aspiré compris et carburant utilisé exclu) et des gaz brûlés éjectés entre t et $t + dt$. On peut désormais appliquer à ce système toute loi physique qu'on voudra, la plus pertinente est le principe fondamental de la dynamique en projection sur Ox . Allons-y!

La quantité de mouvement (selon Ox) du système à l'instant t est somme de celle de l'avion de masse notée $M(t)$ et de vitesse selon Ox notée $V(t)$ et celle de l'air entrant de

masse $\delta_e(t) = D_e dt$ et de vitesse relative $-v_e$ donc de vitesse absolue $V(t) - v_e(t)$, d'où :

$$p_x(t) = M(t)V(t) + D_e [V(t) - v_e] dt$$

A l'instant $t + dt$, elle est somme de celle de l'avion de masse

$$M(t + dt) = M(t) + D_e dt - D_s dt = M(t) + (D_e - D_s) dt$$

et de vitesse (à l'ordre 1)

$$V(t + dt) = V(t) + \frac{dV}{dt} dt$$

et de celle des gaz brûlés de masse $D_s dt$, de vitesse relative $-v_s$ (selon Ox) et absolue $V(t) - v_s$, d'où :

$$p_x(t + dt) = M(t + dt)V(t + dt) + D_s [V(t) - v_s] dt$$

$$p_x(t + dt) = [M(t) + (D_e - D_s) dt] \left[V(t) + \frac{dV}{dt} dt \right] + D_s [V(t) - v_s] dt$$

soit, en négligeant le terme d'ordre 2 :

$$p_x(t + dt) = M(t)V(t) + (D_e - D_s)V(t) dt + M(t) \frac{dV}{dt} dt + D_s [V(t) - v_s] dt$$

$$p_x(t + dt) = M(t)V(t) + D_e V(t) dt + M(t) \frac{dV}{dt} dt - D_s v_s dt$$

On en tire :

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{p_x(t + dt) - p_x(t)}{dt} = M(t) \frac{dV}{dt} + D_e v_e - D_s v_s$$

Remarque : La vitesse absolue de l'air entrant entre t et $t + dt$ évolue en fait entre $V(t) - v_e(t)$ et $V(t + dt) - v_e(t)$; la confondre avec $V(t) - v_e(t)$ à tout instant génère une erreur dans le calcul de $\frac{dp_x}{dt}$ mais celle-ci est d'ordre 2, ordre qui devient négligeable dans le passage à la limite de dt infiniment petit. Il en va de même pour la vitesse absolue des gaz éjectés.

Les forces qui s'appliquent sur l'avion sont son poids, vertical, et la force exercée par l'air essentiellement au niveau des ailes et dont la composante verticale est appelée portance (elle équilibre le poids en vol horizontal) et dont la composante horizontale (vers l'arrière) est appelée traînée et est proportionnelle au carré de la vitesse (cf mécanique des fluides ; on la note $-k V^2$).

Projetons le principe fondamental sur l'axe Ox , on en déduit :

$$M(t) \frac{dV}{dt} + D_e v_e - D_s v_s = -k V^2$$

qu'on réécrit :

$$M(t) \frac{dV}{dt} = D_s v_s - D_e v_e - k V^2$$

Formellement $D_s v_s - D_e v_e$ se comporte comme une force fictive, on l'appelle poussée du réacteur. On ne saurait trop fustiger l'erreur classique qui consiste à dire que le réacteur s'appuie sur l'air ; la poussée existe par le seul fait qu'il y a éjection de matière vers l'arrière ; la preuve évidente en est qu'une fusée continue à fonctionner même sortie de l'atmosphère.

Insistons aussi sur le piège que présente cette formulation : la masse qui apparaît devant l'accélération n'est pas constante ; si les débits massiques sont constants, on a :

$$M(t) = M(0) + D_e t - D_s t$$

jusqu'à, bien évidemment, épuisement du carburant. L'exemple qui suit montre comment gérer la situation.

• Equation du mouvement.

Simplifions l'équation en prenant le cas d'une fusée (pas d'air entrant, le comburant est dans la fusée) et d'une résistance de l'air négligeable devant l'énorme valeur de la poussée ; par contre nous choisirons un mouvement vertical ascendant, donc tiendrons compte du poids. L'équation du mouvement est, en notant D pour D_s et u pour v_s :

$$M(t) \frac{dV}{dt} = D u - M(t) g$$

Puisque les gaz éjectés proviennent de réservoirs dans la fusée, on a $M(t) = M_0 - D t$ où M_0 est la masse initiale. En divisant les deux membres par la masse, on tire :

$$\frac{dV}{dt} = -g + \frac{D u}{M_0 - D t}$$

d'où par intégration à partir d'une vitesse nulle :

$$V(t) = -g t - u \ln(M_0 - D t) + u \ln M_0$$

En particulier, au bout d'une durée T , les combustibles et comburants sont épuisés et l'on atteint une vitesse finale V_1 pour une masse finale $M_1 = M_0 - D T$ avec :

$$V_1 = u \ln \left(\frac{M_0}{M_1} \right) - g T$$

Remarque : à masse $D T$ de combustibles et comburants donnée, donc à M_1 donnée, on a intérêt à travailler avec le débit D le plus élevé possible donc T le plus petit possible pour diminuer le terme défavorable $-g T$.

1.b Système et volume de contrôle.

- Définir un système fermé à partir d'un volume de contrôle.

Soit un volume de contrôle auquel on veuille appliquer une loi physique concernant la dérivée temporelle d'une grandeur physique X ; pendant une durée élémentaire dt , l'écoulement d'un fluide fait entrer, par certaines régions de la surface du volume de contrôle, une quantité δX_e de cette grandeur, proportionnelle à dt si cet intervalle est suffisamment petit pour négliger les termes d'ordre supérieur et que l'on notera donc $\delta X_e = D_{X_e} dt$ et, par d'autres régions, en fait sortir une quantité $D_{X_s} dt$, l'un de ces deux termes pouvant être nul dans certaines situations (pas de débit entrant dans une fusée, par exemple). On appelle $X_{VdC}(t)$ la quantité de cette grandeur contenue dans le volume de contrôle à l'instant t .

On définit comme système l'ensemble du volume de contrôle à l'instant t contenant donc $X_{VdC}(t)$ et de ce qui va y entrer entre t et $t + dt$ et qui contient $\delta X_e = D_{X_e} dt$; le système contient donc, à l'instant t :

$$X_{système}(t) = X_{VdC}(t) + \delta X_e = X_{VdC}(t) + D_{X_e} dt$$

Par construction, à l'instant $t + dt$, le système se compose du volume de contrôle et de ce qui en est sorti, on a donc, de façon analogue :

$$X_{système}(t + dt) = X_{VdC}(t + dt) + \delta X_s = X_{VdC}(t) + D_{X_s} dt$$

La dérivée temporelle de $X_{système}$ est donc :

$$\frac{X_{système}(t + dt) - X_{système}(t)}{dt} = \frac{X_{VdC}(t + dt) - X_{VdC}(t) + \delta X_s - \delta X_e}{dt}$$

soit :

$$\frac{dX_{système}}{dt} = \frac{dX_{VdC}}{dt} + \frac{\delta X_s}{dt} - \frac{\delta X_e}{dt} = \frac{dX_{VdC}}{dt} + D_{X_s} - D_{X_e}$$

Il est bon de savoir refaire, rapidement et au cas par cas, ce type de raisonnement.

Remarque 1 : Les quantités D_{X_e} et D_{X_s} sont appelées respectivement *débit entrant* et *débit sortant* de grandeur X ou encore *flux entrant et sortant*.

Remarque 2 : On peut, bien sûr, adopter une convention algébrique remplaçant un débit entrant en débit sortant négatif (ou l'inverse).

- Retournement de la présentation.

La plupart des lois physiques sont de la forme $dX/dt = Y$, où l'on peut appeler Y la *source* de X , éventuellement nulle (si X se conserve, comme la masse) ; par exemple

la force est source de quantité de mouvement, la puissance est source d'énergie cinétique, etc. La quantité $Y dt$ peut être appelée quantité *fournie* de X , soit $dX_{fournie} = Y dt$. Bien sûr ce type de loi n'est valable que pour un système fermé et l'on doit écrire en fait $dX_{système} = dX_{fournie} = Y dt$.

Or le formalisme précédent a conduit à :

$$dX_{système} = dX_{VdC} + \delta X_s - \delta X_e = dX_{fournie}$$

soit :

$$dX_{VdC} = dX_{fournie} + \delta X_e - \delta X_s = Y dt + D_{X_e} dt - D_{X_s} dt$$

ce qui, somme toute, est assez naturel.

1.c Problèmes unidirectionnels et assimilés en régime permanent.

Il s'agit ici d'une situation simple étudiée à titre d'échauffement.

- La situation

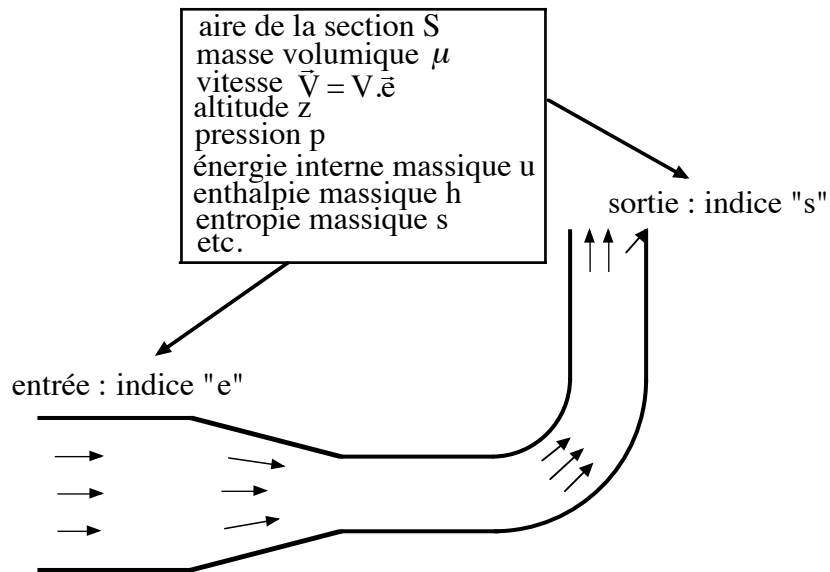


FIGURE 2 – Ecoulement unidirectionnel.

Soit une canalisation dans laquelle s'écoule un fluide selon un régime permanent ; la section est suffisamment petite par rapport à la longueur pour que les vitesses soient

canalisées¹ par les parois ; on suppose en outre qu'à travers une section donnée, le module de la vitesse est uniforme (on néglige ainsi l'influence de la viscosité). On privilégie deux sections appelées section d'entrée (indice e) et section de sortie (indice s). On suppose qu'entre ces deux sections, la canalisation change de direction et que l'aire de sa section varie. La figure 1 p. 4 résume la situation. Il est souvent judicieux d'inclure la canalisation dans le système.

• Conservation du débit massique

Avec l'un des formalismes ci-dessus, gérons la masse.

En régime permanent, par définition, $dM_{VdC} = 0$ et comme la masse se conserve, $dM_{fournie} = 0$ avec la notation du paragraphe précédent, d'où $\delta M_e = \delta M_s$ et $D_{me} = D_{ms}$ que l'on appelle *débit massique* ; on notera, en régime permanent, D_m leur valeur commune. On parle de conservation du débit massique et l'on notera sans indice la valeur commune des deux débits, soit D_m .

Au niveau de la surface d'entrée, le fluide se déplace de $v_e dt$ pendant dt . La masse entrée est donc la masse d'un volume cylindrique d'aire S_e et de longueur $v_e dt$ situé, à l'instant initial, juste en amont de la surface d'entrée, d'où, en appelant μ_e la masse volumique du fluide à cet endroit, $\delta M_e = \mu_e S_e v_e dt$ et $D_{me} = \mu_e S_e v_e$. De même le débit massique sortant est $D_{ms} = \mu_s S_s v_s$. La conservation du débit massique se traduit donc par :

$$D_m = \mu_e S_e v_e = \mu_s S_s v_s$$

• Bilan de quantité de mouvement.

En régime permanent, que la canalisation soit prise ou non dans le système, on a $d\vec{P}_{VdC} = 0$ par définition du régime permanent ; on en déduit en raisonnant selon le modèle exposé plus haut :

$$\vec{0} = \delta \vec{P}_e - \delta \vec{P}_s + \vec{F}_{ext} dt$$

Or la masse δM_e a la vitesse \vec{v}_e d'où $\delta \vec{P}_e = dM_e \vec{V}_e$ et de même pour la quantité de mouvement sortante. On en déduit aisément la relation :

$$\vec{F}_{ext} = D_m \vec{V}_s - D_m \vec{V}_e = D_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

parfois appelée *théorème d'EULER*, mais il y a tant de formules et théorèmes d'EULER en mathématique et en physique que le risque de confusion est grand.

Si l'on a considéré que la canalisation fait partie du système, \vec{F}_{ext} se compose de plusieurs termes :

1. On entend par là l'absence de tourbillons.

- La force \vec{f} exercée par le système d'ancrage de la canalisation sur son support, ou par le pompier musclé qui maintient la lance d'incendie.
- La force \vec{f}_{al} exercée par la pression atmosphérique p_a sur les parois latérales de la canalisation.
- La force de pression $p_e S_e \vec{e}_e$ sur la section d'entrée, que l'on décompose astucieusement en $\vec{f}_{ae} = p_a S_e \vec{e}_e$ et $(p_e - p_a) S_e \vec{e}_e$.
- La force de pression $-p_s S_s \vec{e}_s$ sur la section de sortie, que l'on décompose tout aussi astucieusement en $\vec{f}_{as} = -p_a S_s \vec{e}_s$ et $-(p_s - p_a) S_s \vec{e}_s$.

L'astuce est que $\vec{f}_{al} + \vec{f}_{ae} + \vec{f}_{as} = \vec{0}$ qu'on justifie soit en disant que la pression atmosphérique est uniforme et alors le théorème du gradient assure que le bilan des forces de pression atmosphérique sur une surface fermée est nulle, soit, plus finement, que ce bilan est la poussée d'ARCHIMÈDE due à l'air, négligeable car la masse d'air « déplacé » l'est.

De tout cela on déduit que :

$$\vec{f} + (p_e - p_a) S_e \vec{e}_e - (p_s - p_a) S_s \vec{e}_s = D_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

La mécanique des fluides (chapitre B-XIV) établit des théorèmes qui permettent de calculer les pressions dans ce type d'écoulement, cette formule permettra alors de calculer \vec{f} .

• Bilan d'énergie cinétique et d'énergie interne.

On utilisera la variante du théorème de l'énergie mécanique : on tiendra compte de l'énergie potentielle de pesanteur et en contrepartie, on ne comptera pas la puissance des forces de pesanteur.

Toujours de la même façon, on a ici :

$$0 = \delta E_e - \delta E_s + (\mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}) dt$$

d'où

$$0 = D_m (V_e^2/2 + g z_e) - D_m (V_s^2/2 + g z_s) + \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

Hormis les forces de pesanteur, les seules forces extérieures sont les forces de pression

- La force \vec{f}_{al} , définie plus haut, ne travaille pas car la canalisation est immobile.
- La puissance de $p_e S_e \vec{e}_e$ est $p_e S_e \vec{e}_e \cdot \vec{V}_e = p_e S_e V_e = D_m p_e / \mu_e$
- La puissance de $-p_s S_s \vec{e}_s$ est

$$-p_s S_s \vec{e}_s \cdot \vec{V}_s = -p_s S_s V_s = -D_m p_s / \mu_s$$

On en déduit :

$$D_m [(V_s^2/2 + g z_s + p_s/\mu_s) - (V_e^2/2 + g z_e + p_e/\mu_e)] = \mathcal{P}_{int}$$

Mais on ne peut aller plus loin à ce stade, car rien ne permet d'affirmer quoi que ce soit sur \mathcal{P}_{int} puisqu'un fluide, par nature, n'est pas indéformable ; en fait, c'est cette étude qui permettra parfois d'évaluer la puissance des forces intérieures. Par exemple on démontre² dans le cas d'un fluide incompressible et non visqueux, que le premier membre est nul, ce qui permet, dans ces conditions, d'affirmer que les forces intérieures ne dissipent pas d'énergie.

Dans tous les autres cas, le théorème de l'énergie cinétique s'avère impuissant et il vaut bien mieux le remplacer par sa conséquence thermodynamique, à savoir le premier principe. En régime permanent, il donnera, en notant u l'énergie interne massique et toujours de la même façon :

$$0 = \delta u_e + \delta E_e - \delta u_s - \delta E_s + \delta W + \delta Q$$

soit, après division par dt et en reprenant les résultats ci-dessus :

$$D_m [(u_s + V_s^2/2 + g z_s + p_s/\mu_s) - (u_e + V_e^2/2 + g z_e + p_e/\mu_e)] = \delta Q/dt$$

Comme l'inverse de la masse volumique est le volume massique, on reconnaît dans $u + p/\mu$, l'enthalpie massique h , d'où :

$$D_m [(h_s + V_s^2/2 + g z_s) - (h_e + V_e^2/2 + g z_e)] = \delta Q/dt$$

Une étude (ou une modélisation) de la puissance thermique et la donnée de la fonction u permettront de déduire bien des choses. Par exemple, une détente de JOULE-THOMSON (adiabatique et à vitesse négligeable, on le rappelle) dans un tuyau horizontal est isenthalpique³ car on en tire $h_s = h_e$; si de plus, le fluide est un gaz parfait (h n'est fonction que de T), alors $T_s = T_e$.

2 Formulation intégrale des lois physiques.

Il s'agit ici de traduire sous formes d'intégrales le bilan, établi comme précédemment, d'une grandeur physique quelconque dans un volume de contrôle.

2.a Calcul de débits.

- **Débit volumique et débit massique.**

Supposons une petite région de l'espace où un fluide de masse volumique μ a une vitesse \vec{v} de module v . Soit une petite surface élémentaire orientée dS de vecteur surface \vec{dS} (rappelons qu'il est orthogonal à la surface, orienté dans le sens choisi et de module égal à l'aire de la surface).

2. Les initiés reconnaîtront le théorème de Bernoulli (chapitre B-XIV).

3. Un résultat incontournable de thermodynamique (chapitre E-III).

Cherchons à calculer la masse δm qui traverse dS entre les instants t et $t + dt$. Pour cela localisons les particules concernées à l'instant initial t . Leurs trajectoires doivent traverser dS , elles doivent être en amont de la surface à une distance inférieure à $v dt$. Elles sont donc contenues dans un cylindre oblique de base dS et de hauteur $v dt \cos \theta$ (cf figure 3 p. 12). On a donc :

$$\delta m = \mu dS v dt \cos \theta = \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} dt$$

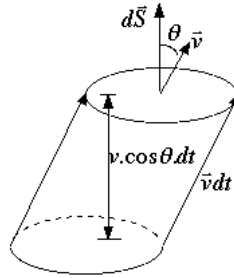


FIGURE 3 – Débit élémentaire.

On appelle *débit massique* ou *flux massique* élémentaire à travers \vec{dS} le rapport

$$dD_m = \delta m / dt = \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

Si l'on s'intéresse au débit massique à travers une surface Σ orientée, on la découpe en surfaces élémentaires \vec{dS} et l'on somme les débits élémentaires, d'où :

$$D_m = \iint_{\Sigma} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

On définit aussi le débit volumique comme le volume traversant la surface de référence par unité de temps ; bien évidemment on a :

$$D_v = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

Cela dit, cette notion n'est pertinente que si μ est constante, c'est-à-dire pour un liquide, car il n'existe pas de loi de conservation du volume pour un gaz. Dans ce cas, on a $D_v = D_m / \mu$.

Remarque : si l'on s'intéresse à la charge électrique, on peut faire le même raisonnement en remplaçant la masse volumique μ par la charge volumique ρ . Toutefois, s'il y a plusieurs types de *porteurs de charges* de signes opposés (des ions chlorure et des ions sodium par exemple), il vaut mieux calculer séparément les débits de charges par type de porteurs et les sommer ensuite pour obtenir le débit total, appelé *intensité électrique*, soit :

$$I = \iint_{\Sigma} \left(\sum \rho_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{dS}$$

où $\vec{j} = \sum \rho_i \vec{v}_i$ s'appelle la *densité de courant*. Cette précaution permet de gérer correctement le cas fréquent où \vec{j} est non nul bien que $\rho = \sum \rho_i$ soit nul, auquel cas l'écriture globale $\vec{j} = \rho \vec{v}$ devient totalement déraisonnable.

• Débits convectifs.

Le fluide, dans son mouvement, appelé mouvement de *convection*, transporte avec lui toutes sortes de grandeurs physiques. Pour les grandeurs extensives, au sens thermodynamique du terme, il est pertinent de parler de leur débit. Par leur nature même, ces grandeurs sont, en général, le produit de la masse par une grandeur intensive et, par conséquent, pour calculer leur débit élémentaire (entendons à travers une surface élémentaire), il suffira de multiplier le débit massique élémentaire par la grandeur intensive. Par exemple :

- l'énergie cinétique est $E_{cin} = (1/2)mv^2$, donc $dD_{cin} = \mu (v^2/2) \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}$ est le débit cinétique, ou encore, puisqu'il est homogène à une puissance, puissance cinétique.
- en introduisant l'enthalpie massique h (égale, dans certaines plages de température et pour un gaz parfait mono- ou bi-atomique, à $c_p T$), le débit élémentaire d'enthalpie est $dD_H = \mu h \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}$
- de même avec s , entropie massique, $dD_S = \mu s \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}$
- pour une grandeur vectorielle, on a un débit vectoriel ; par exemple le débit élémentaire de quantité de mouvement est $d\vec{D}_P = (\mu \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}) \vec{v}$. Attention à la position des parenthèses ! On ne se trompera pas si l'on pense $d\vec{D}_P = dD_m \vec{v}$
- etc. selon les besoins du problème étudié.

Pour le débit à travers une surface quelconque, on intègre le débit élémentaire.

Tous ces débits ou flux élémentaires, scalaires ou projections de débits vectoriels, sont de la forme $\vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$ où $\vec{j} = x \vec{v}$, x étant une densité volumique de la grandeur physique étudiée. Le vecteur \vec{j} est traditionnellement appelé *densité (surfaccique) de flux*, le qualificatif « surfaccique » étant souvent sous-entendu.

• Débits diffusifs.

Sans prétendre ici tout expliquer de la diffusion (voir chapitre E-X), rappelons que la vitesse \vec{v} introduite jusqu'ici est une moyenne des vitesses d'agitation thermique sur un grand nombre de particules entourant un point donné. En cas d'inhomogénéités, cette agitation thermique, masquée par la moyenne effectuée, peut créer un transport invisible de grandeur physique qui se superpose au transport convectif visible. La preuve en est que l'on observe cette diffusion en l'absence de convection ou dans une direction différente de celle de la convection. Citons :

- la diffusion thermique, transport d'énergie sous l'effet d'un gradient de température,
- la diffusion d'un soluté sous l'effet d'un gradient de concentration,
- les forces de viscosité, transport de quantité de mouvement dans le cas d'un gradient d'une composante de la vitesse ; par exemple dans un champ de vitesse inhomogène

de la forme $\vec{v} = v(z) \vec{e}_y$, la convection se fait dans le sens de \vec{v} et la diffusion dans la direction de Oz .

Des modèles plus ou moins élaborés, qui sont étudiés dans le chapitre E-X consacré à la diffusion, justifient là aussi un débit qui se présente (voir aussi plus loin) comme le flux d'un vecteur densité de flux toujours noté \vec{j} par analogie, soit :

$$D = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma}$$

formule dans laquelle un même indice est ajouté à D et \vec{j} pour préciser de quelle grandeur physique il s'agit.

Par contre \vec{j} n'a plus du tout la forme $\vec{j} = x \vec{v}$ où x est une grandeur intensive liée à la grandeur physique X transportée (par exemple $x = \mu \frac{\vec{v}^2}{2}$ si X est l'énergie cinétique); au contraire les mêmes modèles justifient une formule du type $\vec{j} = -Cte \overrightarrow{\text{grad}} \xi$ où ξ est la grandeur intensive dont l'inhomogénéité provoque le transport d'une autre grandeur physique X avec laquelle elle entretient un rapport moins direct (par exemple ξ est la température pour un transport d'énergie X).

2.b Formule de Reynolds.

On reprend l'étude du cas général à partir de $\frac{dX_{VdC}}{dt} + D_{Xs} - D_{Xe} = Y$ où X est une grandeur physique non précisée et Y sa source. Le volume de contrôle sera ici un volume Ω limité par une surface fermée Σ orientée vers l'extérieur. La grandeur X est supposée scalaire, mais ce peut être une composante d'une grandeur vectorielle. Détaillons les différents termes.

La quantité de grandeur physique X contenue dans le volume de contrôle s'obtient par intégration des quantités dX contenues dans les volumes élémentaires $d\Omega$ soit en introduisant la densité volumique de X , notée x , uniforme ou non :

$$X_{VdC} = \iiint_{\Omega} dX = \iiint_{\Omega} x d\Omega$$

Le débit de grandeur X traversant une surface élémentaire $d\Sigma$ de la frontière Σ du volume de contrôle, qu'il soit dû à un phénomène convectif ou diffusif s'écrit (cf supra) sous la forme $\vec{j} \cdot \vec{d\Sigma}$ où (cf supra), selon le cas, \vec{j} est de la forme $\vec{j} = x \vec{v}$ ou $\vec{j} = -Cte \overrightarrow{\text{grad}} \xi$. La formule $\vec{j} \cdot \vec{d\Sigma}$ donne un résultat positif si \vec{j} pointe vers l'extérieur (débit sortant) ou négatif s'il pointe vers l'intérieur (débit entrant); elle gère donc algébriquement les deux sortes de débit de sorte que, par intégration :

$$D_{Xs} - D_{Xe} = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma}$$

Dans les cas simples, la source Y du phénomène est répartie en volume à l'intérieur du volume de contrôle (par exemple les forces de pesanteur, X étant alors la projection

verticale de la quantité de mouvement) et se calcule donc elle aussi par intégration, soit en introduisant une densité volumique de Y notée y :

$$Y = \iiint_{\Omega} dY = \iiint_{\Omega} y d\Omega$$

Avec une source en volume et une grandeur scalaire, on aboutit à la *formule de REYNOLDS* :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} x d\Omega + \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma} = \iiint_{\Omega} y d\Omega}$$

Avec une source en volume et une grandeur vectorielle, par projection sur les trois axes :

$$\boxed{\forall i \in \{x, y, z\} \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} x_i d\Omega + \oint_{\Sigma} \vec{j}_i \cdot \vec{d\Sigma} = \iiint_{\Omega} y_i d\Omega}$$

où \vec{j}_i est le vecteur de transport relatif à la composante i de la grandeur physique vectorielle et non une composante d'un vecteur unique ; il y a ici un vecteur \vec{j}_x , un vecteur \vec{j}_y et un vecteur \vec{j}_z .

2.c Formule de Reynolds avec source surfacique.

Pour certains phénomènes, la source est un phénomène localisé à la surface du volume de contrôle, comme les forces de pression ou les forces de viscosité lorsque l'on effectue un bilan de quantité de mouvement. La plupart du temps et c'est le cas pour les exemples qui précèdent, il s'agit d'un échange par diffusion entre l'intérieur et l'extérieur du système lié au volume de contrôle et que l'on préfère masquer comme terme géré par un débit entrant ou sortant pour le remplacer par une source fictive équivalente, ce qui revient à faire changer de membre le terme $\oint_{\Sigma} \vec{j}_i \cdot \vec{d\Sigma}$.

Nous profiterons ici de l'occasion pour montrer qu'un terme surfacique, qu'il soit débit sortant (algébriquement) ou source, ne peut pas avoir n'importe quelle expression.

• Première étape.

Soit, centrée sur un point M , une surface élémentaire de la frontière du volume de contrôle, d'aire $d\Sigma$, de vecteur unitaire \vec{n} orthogonal à la frontière et dirigé vers l'extérieur. Sa contribution au bilan est un terme dy , scalaire ou vectoriel selon les cas, qui dépend de ces éléments, soit $dy(M, \vec{n}, d\Sigma)$.

Par la pensée divisons la surface élémentaire en deux parties égales suffisamment proches, puisque la surface est supposée infiniment petite, pour être équivalentes. Leur

surface de chacune d'elle est la moitié de la surface totale et la contribution dy se répartit en deux termes égaux, donc moitié du total. Ce raisonnement classique montre la proportionnalité entre dy et $d\Sigma$. On peut donc noter :

$$dy = f(M, \vec{n}) d\Sigma$$

où f est une fonction scalaire ou vectorielle, selon le cas.

• **Deuxième étape.**

Soit un bilan où l'on regroupe tous les termes surfaciques, flux et sources, au second membre :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} x_i d\Omega = \iiint_{\Omega} y_i d\Omega + \oint_{\Sigma} f(M, \vec{n}) d\Sigma$$

En ordre de grandeur, les termes volumiques dépendent du cube de la taille du volume de contrôle et les termes surfaciques du carré de celle-ci, donc pour un volume infiniment petit, les termes volumiques deviennent négligeables et l'on doit donc avoir $\oint_{\Sigma} f(M, \vec{n}) d\Sigma = 0$ (nous nommerons Φ cette intégrale dans la démonstration qui suit).

Appliquons ceci au volume de contrôle suivant : il s'agit d'un petit tétraèdre, infiniment petit, à trois faces en forme de triangle rectangle. Avec un choix convenable des axes, ses sommets et leurs coordonnées seront notées respectivement $O(0, 0, 0)$, $A(dx, 0, 0)$, $B(0, dy, 0)$ et $C(0, 0, dz)$ ainsi que les présente la figure 4 p. 16. En faisant varier par la pensée dx , dy et dz , on donne à \vec{n} , vecteur unitaire normal de la face ABC toutes les orientations possibles, ce qui permet d'étudier la dépendance de la fonction f vis-à-vis du vecteur unitaire \vec{n} .

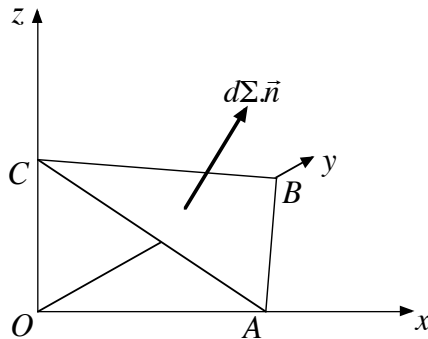


FIGURE 4 – Élément de fluide.

Le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de la face OAB est $-\vec{e}_z$, l'aire de cette face triangulaire est $d\Sigma_z = \frac{1}{2} dx dy$ et son vecteur surface est donc $d\vec{\Sigma}_z = -d\Sigma_z \vec{e}_z$ et sa contribution à Φ est $f(-\vec{e}_z) d\Sigma_z$ (le tétraèdre est suffisamment petit pour que la dépendance vis-à-vis du point M soit négligeable).

De la même façon, les contributions des faces OBC et OCA avec des vecteurs surfaces $d\vec{\Sigma}_x = -d\Sigma_x \vec{e}_x$ et $d\vec{\Sigma}_y = -d\Sigma_y \vec{e}_y$ sont respectivement $f(-\vec{e}_x) d\Sigma_x$ et $f(-\vec{e}_y) d\Sigma_y$.

Enfin, pour la dernière face ABC , sa contribution est $f(\vec{n}) d\Sigma_n$, mais comment calculer $d\vec{\Sigma}_n = d\Sigma_n \vec{n}$?

Le plus simple est de se souvenir⁴ que la somme des vecteurs surfaces d'une surface fermée est nulle et l'on en déduit élégamment que

$$d\vec{\Sigma}_n = d\Sigma_n \vec{n} = -d\vec{\Sigma}_x - d\vec{\Sigma}_y - d\vec{\Sigma}_z = d\Sigma_x \vec{e}_x + d\Sigma_y \vec{e}_y + d\Sigma_z \vec{e}_z$$

On en profitera pour noter :

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z$$

où $n_x = \frac{d\Sigma_x}{d\Sigma_n}$ et analogues.

Le tétraèdre est infiniment petit donc (cf supra) Φ est nul, d'où successivement :

$$f(\vec{n}) d\Sigma_n + f(-\vec{e}_x) d\Sigma_x + f(-\vec{e}_y) d\Sigma_y + f(-\vec{e}_z) d\Sigma_z = 0$$

$$f(\vec{n}) = -\frac{d\Sigma_x}{d\Sigma_n} f(-\vec{e}_x) - \frac{d\Sigma_y}{d\Sigma_n} f(-\vec{e}_y) - \frac{d\Sigma_z}{d\Sigma_n} f(-\vec{e}_z)$$

$$f(\vec{n}) = -n_x f(-\vec{e}_x) - n_y f(-\vec{e}_y) - n_z f(-\vec{e}_z)$$

par

D'où en notant $j_x = -f(-\vec{e}_x)$ et analogues puis \vec{j} le vecteur de composantes j_x, j_y et j_z :

$$f(\vec{n}) = j_x n_x + j_y n_y + j_z n_z = \vec{j} \cdot \vec{n}$$

• Conclusion.

Pour un phénomène physique scalaire ou projection d'un phénomène physique vectoriel, les termes de surface, débits ou sources, conduisent tous à des intégrales de la forme $\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$ et la formule de REYNOLDS conserve donc la forme établie plus haut, après regroupement des termes de surface.

2.d Formule de Reynolds vectorielle.

• Cas général.

Pour une grandeur scalaire, les phénomènes surfaciques ont donc la forme suivante : $\oiint_{\Sigma} (j_x n_x + j_y n_y + j_z n_z) d\Sigma$; pour une grandeur vectorielle, les trois projections des phé-

4. Voir le chapitre d'analyse vectorielle.

nomènes surfaciques seront :

$$\begin{cases} \iint_{\Sigma} (j_{xx} n_x + j_{xy} n_y + j_{xz} n_z) d\Sigma \\ \iint_{\Sigma} (j_{yx} n_x + j_{yy} n_y + j_{yz} n_z) d\Sigma \\ \iint_{\Sigma} (j_{zx} n_x + j_{zy} n_y + j_{zz} n_z) d\Sigma \end{cases}$$

que l'on peut regrouper en une formule vectorielle, à condition d'adopter une écriture matricielle faisant apparaître une matrice (J) de coefficients j_{ij} et présentant le vecteur normal ou le vecteur surface comme une matrice colonne, soit :

$$\iint_{\Sigma} (J) (\vec{n}) d\Sigma = \iint_{\Sigma} (J) (\vec{d\Sigma})$$

• **Un cas particulier.**

Si le phénomène qui est à l'origine de la source surfacique présente un caractère isotrope, la matrice J doit respecter cette isotropie ; il est facile de montrer⁵ que seules les matrices diagonales à trois termes diagonaux égaux, de la forme $j_0 (Id)$ où j_0 est scalaire et (Id) la matrice unité conviennent.

L'intégrale précédente devient alors :

$$\iint_{\Sigma} j_0 (Id) (\vec{d\Sigma}) = \iint_{\Sigma} j_0 \vec{d\Sigma}$$

L'exemple le plus connu est celui des forces de pression avec $j_0 = -p$.

Une loi physique vectorielle avec des termes surfaciques anisotropes convectifs comptés ci-dessous dans les débits, gérés par une matrice (J) et des termes surfaciques isotropes diffusifs comptés ci-dessous dans les sources, gérés par un scalaire \tilde{j}_0 sans rapport avec (J) , pourrait donc s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \vec{x} d\Omega + \iint_{\Sigma} (J) (\vec{d\Sigma}) = \iiint_{\Omega} \vec{y} d\Omega + \iint_{\Sigma} \tilde{j}_0 \vec{d\Sigma}$$

5. La matrice doit être invariante dans toute rotation de la base vectorielle ; en notant (P) la matrice de passage, on doit avoir $(J) = (P)^{-1}(J)(P)$. On explicite cette relation pour une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz de sorte que (P) soit particulièrement simple, ce qui conduit à deux termes nuls, deux égaux et deux opposés ; on recommence avec les rotations de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oy et de Ox et cela suffit pour conclure.

3 Formulation locale des lois physiques.

3.a Cas d'une loi scalaire.

- De la formulation intégrale à la formulation locale.

La formule de REYNOLDS scalaire s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} x \, d\Omega + \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma} = \iiint_{\Omega} y \, d\Omega$$

où l'on a regroupé dans le premier membre les termes de débit à travers la surface et les termes de source surfacique.

Pour la première intégrale du premier membre, on peut permuter la dérivation temporelle et l'intégration spatiale (voir chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle) pourvu que le domaine d'intégration ne dépende pas du temps, ce qui est dans la logique d'un volume de contrôle correctement choisi soit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} x \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial x}{\partial t} \, d\Omega$$

Pour la première intégrale du premier membre, on peut appliquer le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI (voir chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle), soit :

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{j} \, d\Omega$$

En regroupant les trois intégrales portant sur le même domaine d'intégration, on arrive à :

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} - y \right) \, d\Omega = 0$$

Cette relation étant vraie pour tout domaine Ω indépendant du temps, la fonction à intégrer est donc⁶ nulle. La formulation locale (c'est-à-dire en terme de champ soit encore de fonction du point M où l'on est et du temps t) de la loi physique est donc :

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = y}$$

6. Il faut quand même qu'elle soit continue vis-à-vis de l'espace, ce qui en physique est quasiment toujours le cas. Si la fonction était non nulle en un point M , disons strictement positive, il existerait un voisinage de M où elle différerait de $f(M)$ de moins de $\frac{1}{2}f(M)$ et où elle serait donc strictement positive et l'intégrale sur ce voisinage pris comme domaine d'intégration serait strictement positive d'où une contradiction et l'impossibilité de l'hypothèse.

• **Un exemple.**

Soit un gaz parfait, d'énergie interne massique $u(T)$ et d'énergie cinétique macroscopique massique $\frac{v^2}{2}$. L'expression générale du premier principe pour un système est $dU + dE_c = \delta W + \delta Q$. La quantité physique scalaire étudiée est donc $X = U + E_c$, sa densité volumique est, en notant μ sa masse volumique :

$$x = \mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right)$$

et sa densité de flux convectif est :

$$\vec{j}_c = x \vec{v} = \mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v}$$

Quant aux sources, ici des puissances, elles relèvent

- des forces de pesanteur volumiques mais négligeables pour un gaz ($y = 0$)
- des forces de pression surfaciques en $-p \vec{d}\vec{\Sigma}$ et de puissance $-p \vec{d}\vec{\Sigma} \cdot \vec{v}$ au second membre du bilan équivalent au premier membre à un terme de débit de densité de flux :

$$\vec{j}_p = p \vec{v}$$

- des forces de viscosité surfaciques, négligeables pour un gaz
- et enfin des échanges thermiques en $\vec{j}_t \cdot \vec{d}\vec{\Sigma}$ où $\vec{j}_t = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ (λ est la conductivité thermique) équivalents au premier membre à un terme de débit de densité de flux opposé, soit $-\vec{j}_t = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$.

On peut donc appliquer ce qui précède avec :

$$\begin{cases} x = \mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) \\ \vec{j} = x \vec{v} = \mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} + \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \\ y = 0 \end{cases}$$

On arrive, en remarquant que $u(T) + \frac{p}{\mu}$ est l'enthalpie massique $h(T)$ et en se souvenant que $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} T = \Delta T$ à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[\mu \left(h(T) + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] + \lambda \Delta T = 0$$

Ce genre de raisonnement pourra être utilisé en mécanique des fluides et je ne m'en priverai pas.

3.b Conservation de la masse

La masse est un cas particulier : c'est une grandeur qui se conserve c'est-à-dire dans le formalisme de ce chapitre sans source. Ici x est donc la masse volumique μ et la densité de flux convectif est $\vec{j} = \mu \vec{v}$. La loi de conservation de la masse se traduit donc par :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0}$$

Remarque 1 : dans le cas d'un fluide incompressible, μ est une constante et l'on arrive à $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

Remarque 2 : la conservation de la charge électrique (cf supra) se traduit de même par $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

3.c Formulation locale massique.

• De la formulation volumique à la formulation massique.

La formulation locale d'une loi scalaire est de la forme $\frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div}(x \vec{v}) = \dots$ où en général x est de la forme $x = \mu x_m$ où x_m est la densité massique de grandeur X . En se servant de la formule d'analyse vectorielle $\operatorname{div}(f \vec{V}) = f \operatorname{div} \vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{V}$, on développe ainsi, en utilisant in fine la loi locale de conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div}(x \vec{v}) &= \dots \\ \frac{\partial(\mu x_m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu x_m \vec{v}) &= \dots \\ \mu \frac{\partial x_m}{\partial t} + x_m \frac{\partial \mu}{\partial t} + x_m \operatorname{div}(\mu \vec{v}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} x_m \cdot (\mu \vec{v}) &= \dots \\ \mu \frac{\partial x_m}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} x_m \cdot (\mu \vec{v}) + x_m \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) \right] &= \dots \\ \mu \left[\frac{\partial x_m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} x_m \right] &= \dots \end{aligned}$$

ce qui est une formulation variante de la loi locale.

Remarque : en mécanique des fluides, on introduira la notion de dérivée particulaire⁷ qui permet de retrouver différemment ce résultat.

7. On note en mécanique des fluides $\frac{Dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) x$ (voir chapitre B-XIII).

• **Retour à l'exemple précédent.**

L'exemple du premier principe appliqué à un gaz parfait avait abouti à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\mu \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = -\operatorname{div}(p \vec{v}) - \lambda \Delta T$$

en repassant à droite les termes surfaciques diffusifs.

La transformation étudiée ici aboutit donc à :

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) + \mu \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(u(T) + \frac{v^2}{2} \right) = -\operatorname{div}(p \vec{v}) - \lambda \Delta T$$

3.d Cas d'une loi vectorielle.

On a vu qu'une loi vectorielle donne par projection trois lois scalaires intégrales :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} x_i \, d\Omega + \oint_{\Sigma} \vec{j}_i \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \iiint_{\Omega} y_i \, d\Omega$$

où $i \in \{x, y, z\}$ et que l'on peut regrouper en une formulation vectorielle :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \vec{x} \, d\Omega + \oint_{\Sigma} (J) (\overrightarrow{d\Sigma}) = \iiint_{\Omega} \vec{y} \, d\Omega$$

La méthode qui précède permet de formuler de façon locale les trois projections, soit :

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_i = y_i$$

où $i \in \{x, y, z\}$ et que l'on aimerait regrouper en une formulation vectorielle.

Les termes en $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ et y_i donneront sans problème $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$ et \vec{y} ; le dernier ne pose pas de problème conceptuel mais un problème de notation. Il s'agit d'un vecteur dont les trois composantes sont les divergences des trois lignes de la matrice (J) qui regroupent les composantes des \vec{j}_i (cf supra). En algèbre tensorielle, on définit parfois ce vecteur comme la divergence de la matrice (J) qui est alors vectorielle et que l'on note $\overrightarrow{\operatorname{div}}(J)$; avec cette convention, l'on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}(J) = \vec{y}$$

On a vu aussi plus haut que dans certains cas, l'un des termes surfaciques a une forme plus simple qui conduit à la formulation intégrale :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \vec{x} \, d\Omega + \oint_{\Sigma} (J) (\overrightarrow{d\Sigma}) = \iiint_{\Omega} \vec{y} \, d\Omega + \oint_{\Sigma} \tilde{j}_0 \overrightarrow{d\Sigma}$$

dont le dernier terme se transforme, grâce au théorème du gradient, en $\iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{j}_0 \, d\Omega$. Un coup d'œil rapide à la façon dont on est passé de la formulation intégrale à la formulation locale dans le cas scalaire permet de comprendre que l'on arrivera ici à :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(J) = \vec{y} + \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{j}_0$$

4 Remarque sur le second principe de la thermodynamique.

Le second principe est formulé de façon historique par une inégalité et c'est la seule loi de ce type. Pour un système et une transformation élémentaire, on a

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T_{surf.}}$$

On le réécrit sous forme d'égalité :

$$dS = \frac{\delta Q}{T_{surf.}} + dS_{créée}$$

qui n'est pas une nouvelle loi mais une définition de $dS_{créée}$.

Pour le gaz parfait étudié plus haut relativement au premier principe on aurait, à titre d'exemple, la formulation intégrale suivante, en notant s l'entropie massique :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \mu s \, d\Omega + \oint_{\Sigma} \mu s \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = - \oint_{\Sigma} \frac{\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} + dS_{créée}$$

qui définit l'entropie créée pendant dt dans Ω .

Et la formulation locale sera :

$$\frac{\partial(\mu s)}{\partial t} + \text{div}(\mu s \, \vec{v}) = -\lambda \text{div} \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \right) + \sigma$$

qui définit σ , entropie volumique créée par unité de temps.

La seule réelle difficulté réside dans le vocabulaire ; l'entropie créée est le terme manquant et formellement ajouté ; l'entropie fournie, avec la terminologie utilisée dans ce chapitre, est $\frac{\delta Q}{T_{surf.}}$ qu'on appelle entropie échangée dans le cours de thermodynamique. Il faudra donc bien faire la distinction entre « créée » et « fournie ».