

## Chapitre A-VII

# Rupture spontanée de symétrie. Chaos déterministe. Systèmes dynamiques.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## *RÉSUMÉ :*

*On s'intéresse à quelques aspects des solutions d'équations non-linéaires, le côté calculatoire étant ici totalement secondaire. Les thèmes ne sont que présentés sommairement au lecteur à qui l'initiative est laissée pour qu'il les explore.*

*On évoquera les ruptures spontanées de symétries sur un exemple artificiel de mécanique, la notion de chaos déterministe sur un modèle biologique et la notion de système dynamique sur le modèle biologique proies-prédateurs*

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>A-VII Rupture spontanée de symétrie. Chaos déterministe. Systèmes dynamiques.</b> | <b>1</b> |
| 1 Introduction.  | 4        |
| 2 Rupture spontanée de symétrie.   | 4        |
| 2.a L'exemple choisi.  | 4        |
| 2.b Recherche des positions d'équilibre et de leur stabilité.                        | 5        |
| 2.c Notion de rupture spontanée de symétrie.   | 6        |
| 3 Chaos déterministe.  | 6        |
| 3.a L'exemple choisi et sa solution classique.                                       | 6        |
| 3.b Comportement limite périodique.  | 9        |
| 3.c Sensibilité aux conditions initiales du chaos déterministe.                      | 10       |
| 4 Systèmes dynamiques.   | 13       |
| 4.a L'exemple choisi. Historique et étude qualitative.                               | 13       |
| 4.b Le modèle de Lotka-Volterra.   | 14       |
| 4.c Recherche d'un équilibre.  | 15       |
| 4.d Evolution près de l'équilibre.   | 15       |
| 4.e Evolution loin de l'équilibre.   | 17       |

# 1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à quelques aspects intéressants des équations non-linéaires. Celles-ci se rencontrent dans bien des domaines de la physique, de la chimie, de la biologie et bien évidemment des mathématiques. A chaque situation son contexte théorique et sa technique de résolution, mais malgré la diversité qui en résulte, il y a une convergence dans le comportement. Il s'ensuit que la mise en équation et la recherche de solution est un aspect tout à fait secondaire et qui sera ici partiellement et volontairement escamoté. Les exemples seront choisis en fonction de leur simplicité calculatoire, dussent-ils être souvent plus biologiques que physiques, car seul le comportement mis en évidence est le sujet de ce chapitre.

## 2 Rupture spontanée de symétrie.

C'est une situation que l'on rencontre souvent dans différents domaines de la physique et il n'y a donc pas de formalisme commun qui puisse expliquer la convergence des comportements vers le phénomène de rupture spontanée de symétrie. L'exemple choisi pour l'illustrer est parfaitement arbitraire et l'a été car les calculs sont plutôt simples et car il repose sur un domaine, la mécanique du point, le plus largement maîtrisé par mes lecteurs potentiels.

### 2.a L'exemple choisi.

Un cercle de centre  $O$  fixe, de rayon  $a$  tourne avec une vitesse angulaire  $\omega$  autour de son diamètre vertical  $Oz$ . Une masse  $m$  quasiment ponctuelle est enfilée sur le cercle et s'y meut sans frottement. On va chercher ici sa ou ses positions d'équilibre et l'on discutera de leur stabilité. On utilisera pour cela une méthode énergétique. Le point  $M$  sera repéré par l'angle  $\theta \in [-\pi, \pi]$  que fait  $OM$  avec la verticale descendante (voir figure 1 p. 5). On se place dans le référentiel tournant lié au cercle.

La masse est soumise aux forces suivantes :

- son poids  $m \vec{g} = -m g \vec{e}_z$  où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire ascendant. Il lui correspond une énergie potentielle  $U_p(z)$  telle que  $-\frac{dU_p}{dz} = -m g$  d'où l'on tire aisément que  $U_p = m g z_M = -m g a \cos \theta$
- à la force d'inertie d'entraînement  $-m \gamma_e = m r \omega^2 \vec{e}_r$  où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire radial et  $r = HM$  avec  $H$  projection de  $M$  sur l'axe. Il lui correspond une énergie potentielle  $U_e(r)$  telle que  $-\frac{dU_e}{dr} = m r \omega^2$  d'où  $U_e = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2 \theta$
- à la force de CORIOLIS (non dessinée) de puissance nulle donc n'intervenant pas dans le bilan énergétique
- à la force  $\vec{N}$  de réaction du support, de puissance nulle (absence de frottement) donc n'intervenant pas dans le bilan énergétique

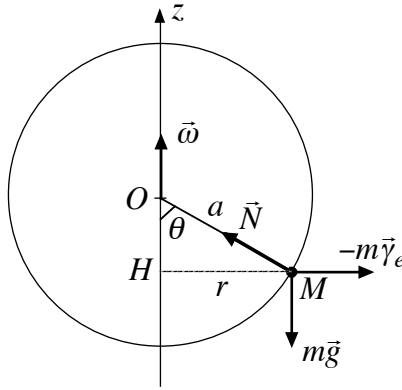


FIGURE 1 – Equilibre sur un cercle tournant.

L'énergie totale est donc :

$$U(\theta) = -m g a \cos \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2 \theta$$

## 2.b Recherche des positions d'équilibre et de leur stabilité.

A l'équilibre l'énergie est extrémale, minimale si l'équilibre est stable et maximale s'il est instable. Le ou les équilibre(s) vérifie(nt) donc :

$$0 = \frac{dU}{d\theta} = m g a \sin \theta - m \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta = m a \sin \theta (g - \omega^2 a \cos \theta)$$

relation que l'on aurait pu obtenir aussi en projetant l'équilibre des forces sur la tangente au support.

La condition est vérifiée soit si  $\sin \theta = 0$  soit  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  soit si  $\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}$  ce qui n'est possible que si  $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$  avec alors  $\theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$ .

Pour savoir si l'énergie est maximale ou minimale en ces valeurs, il faut y étudier le signe de la dérivée seconde. On réécrit :

$$\frac{dU}{d\theta} = m g a \sin \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin(2\theta)$$

d'où :

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = m g a \cos \theta - m \omega^2 a^2 \cos(2\theta) = m a [g \cos \theta - a \omega^2 (2 \cos^2 \theta - 1)]$$

Dans le cas  $\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}$ , on n'a que deux solutions possibles :

- la solution  $\theta = 0$  et donc  $\cos \theta = 1$  et  $\frac{d^2U}{d\theta^2} = ma (g - a\omega^2)$  qui est positif pour ces valeurs de  $\omega$  ; il s'agit d'un minimum et l'équilibre est stable
- la solution  $\theta = \pi$  et donc  $\cos \theta = -1$  et  $\frac{d^2U}{d\theta^2} = ma (-g - a\omega^2)$  qui est négatif ; il s'agit d'un maximum et l'équilibre est instable

Dans le cas  $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$ , on a quatre solutions possibles :

- la solution  $\theta = 0$  et donc  $\cos \theta = 1$  et  $\frac{d^2U}{d\theta^2} = ma (g - a\omega^2)$  qui est cette fois négatif pour ces valeurs de  $\omega$  ; il s'agit d'un maximum et l'équilibre est instable
- la solution  $\theta = \pi$  et donc  $\cos \theta = -1$  et  $\frac{d^2U}{d\theta^2} = ma (-g - a\omega^2)$  qui est négatif ; il s'agit d'un maximum et l'équilibre est instable
- les solutions  $\theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$  et  $\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}$  donc, après quelques calculs de routine  $\frac{d^2U}{d\theta^2} = ma \left(\frac{g^2}{a\omega^2} - 2\frac{g^2}{a\omega^2} + a\omega^2\right) = \dots = ma^2\omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{a\omega^2}\right)^2\right]$  qui est positif pour ces valeurs de  $\omega$  ; il s'agit de minima et ces équilibres sont stables

## 2.c Notion de rupture spontanée de symétrie.

Le principe de CURIE énonce que la conclusion d'un problème a au moins les mêmes symétries que les hypothèses.

Dans notre exemple l'énergie est fonction paire de  $\theta$  et la seule valeur qui respecte cette symétrie est  $\theta = 0$ , mais pour  $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$ , on ne trouve pas  $\theta = 0$  comme solution. Le principe est-il mis en défaut ? Non, car il y a cette fois, un doublet de solutions qui sont symétriques l'une de l'autre ; le principe doit être compris avec plus de souplesse.

Dans toute situation où, lorsqu'un paramètre (ici  $\omega$ ) passe par une *valeur critique* (ici  $\sqrt{\frac{g}{a}}$ ), on saute d'une solution symétrique à l'une des solutions d'un doublet de solutions symétriques l'une de l'autre, on dit qu'on a affaire à une *rupture spontanée de symétrie* (ou *brisure spontanée de symétrie*).

Remarque : on ne peut pas savoir laquelle des deux solutions sera « choisie » par la nature. Les conditions de l'expérience ne sont jamais celles qui sont idéalisées par l'énoncé ; dans notre exemple, les aspérités microscopiques, les salissures, les traces d'humidité ou de gras au niveau de  $\theta = 0$  détermineront dans quel sens partira la masse au passage par la valeur critique.

## 3 Chaos déterministe.

### 3.a L'exemple choisi et sa solution classique.

Il s'agit, dans cet exemple, d'étudier, d'année en année, l'évolution de l'effectif d'un troupeau d'animaux dans un milieu fermé, une île par exemple. On notera  $x_n$  cet effectif l'année  $n$ .

Une première idée est de tenir compte de la fécondité moyenne et de la mortalité moyenne pour en déduire que la variation annuelle est proportionnelle à l'effectif de l'année et donc aussi l'effectif de l'année suivante, soit une loi phénoménologique :

$$x_{n+1} = a x_n$$

où  $a$  est une constante positive. L'étude est aisée car alors  $x_n = a^n x_0$  et la population s'éteint rapidement si  $a < 1$  (on exclut désormais cette situation) ou croît infiniment si  $a > 1$ .

Cette dernière conclusion est irréaliste : lorsque l'effectif devient trop important dans un milieu fermé où la nourriture est limitée, la disette s'installe, la fécondité diminue et la mortalité augmente. On propose donc, toujours de façon phénoménologique, un terme correctif négatif, négligeable aux faibles effectifs et prépondérant aux forts effectifs ; le plus simple est un terme quadratique, d'où une loi en :

$$x_{n+1} = a x_n - b x_n^2$$

où  $a$  est ici supposé supérieur à l'unité (cf supra) et  $b$  une constante positive.

Une première constatation : si  $x_n$  dépasse une valeur maximale  $x_{max} = \frac{a}{b}$ , alors  $x_{n+1}$  est négatif, ce qui n'a pas de sens ; il faut comprendre que la hausse de la mortalité et la baisse de fécondité ont été telles que l'espèce s'est éteinte avant la fin de l'année.

Effectuons le changement de variable  $x_n = x_{max} X_n = \frac{a}{b} X_n$  et donc  $x_{n+1} = \frac{a}{b} X_{n+1}$  qui conduit après quelques calculs de base à :

$$X_{n+1} = a X_n (1 - X_n)$$

ce qui montre qu'à un facteur d'échelle près, seule la valeur de  $a$  importe et pas celle de  $b$ . C'est maintenant  $X_n > 1$  qui conduit à une extinction brutale.

Remarquons que  $f(X_n) = a X_n (1 - X_n)$ , loi parabolique, est maximale pour  $X_n = \frac{1}{2}$  et vaut alors  $\frac{a}{4}$ . Si  $a < 4$ , on se convainc alors qu'avec un  $X_0$  initial entre 0 et 1, les  $X_n$  successifs seront tous inférieurs à 1 et qu'il n'y aura pas d'extinction et qu'au contraire, si  $a > 4$ , cette extinction est une épée de DAMOCLÈS. Nous considérons désormais que  $1 < a < 4$ , compte tenu des différentes remarques qui précèdent.

Le premier réflexe est de chercher une éventuelle limite notée  $X_\infty$  quand  $n$  et donc  $n + 1$  tendent vers l'infini ; la relation de récurrence, au passage à la limite devient :

$$X_\infty = a X_\infty (1 - X_\infty)$$

d'où, successivement après une simplification<sup>1</sup> par  $X_\infty$  :

$$1 = a(1 - X_\infty)$$

---

1. Pour faire les choses proprement, il faudrait montrer que  $X_\infty$  ne peut pas être nul.

$$X_\infty = \frac{a-1}{a}$$

Ce qui ne prouve nullement que  $X_n$  tende vers  $X_\infty$  ; on vient juste de prouver que s'il y a une limite, ce ne peut être que celle-là.

Rappelons la résolution graphique classique (voir chapitre A-IV) :

On superpose le graphe de  $Y = f(X) = aX(1-X)$  et celui de  $Y = X$  (la bissectrice des axes). Appelons  $M_0$  le point du graphe de  $f$  d'abscisse  $X_0$ , son ordonnée est  $X_1 = f(X_0)$  ; appelons  $N_0$  le point de la bissectrice de même ordonnée que  $M_0$  soit  $X_1$ , son abscisse est égale à son ordonnée donc c'est  $X_1$ . Appelons  $M_1$  le point du graphe de  $f$  de même abscisse que  $N_0$ , soit  $X_1$ , son ordonnée est  $X_2 = f(X_1)$  ; appelons  $N_1$  le point de la bissectrice de même ordonnée que  $M_1$  soit  $X_2$ , son abscisse est égale à son ordonnée donc c'est  $X_2$  ; on itère le processus.

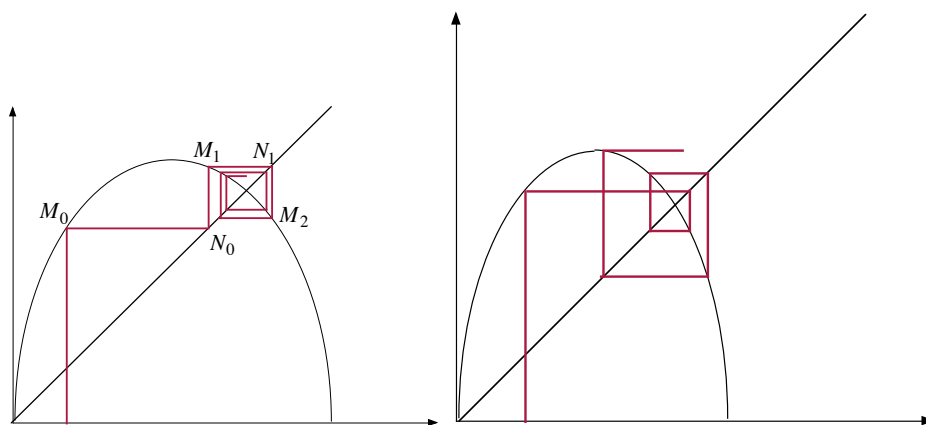


FIGURE 2 – chaos déterministe 1.

On a tracé sur la figure<sup>2</sup> 2 p. 8 ce qui se passe pour deux valeurs du paramètre  $a$  (avec deux échelles différentes pour améliorer la lisibilité). A gauche, pour  $a$  assez petite, on voit la convergence s'amorcer vers l'intersection des deux courbes donc vers la solution de  $X = f(X)$  soit le  $X_\infty$  calculé plus haut. A droite au contraire, on a plutôt tendance à s'en éloigner. On peut démontrer en analyse qu'une condition de convergence est que la dérivée de  $f$  calculée en  $X_\infty$  ait une valeur absolue strictement inférieure à l'unité.

Ici avec  $f(X) = aX(1-X) = a(X - X^2)$  donc  $f'(X) = a(1 - 2X)$  et  $X_\infty = \frac{a-1}{a}$ , on a :

$$f'(X_\infty) = a \left[ 1 - 2 \left( \frac{a-1}{a} \right) \right] = \dots = 2 - a$$

La condition de convergence est  $|2 - a| < 1$  soit  $-1 < 2 - a < 1$  et enfin  $1 < a < 3$ .

---

2. Un œil exercé me reprochera que la courbe n'est pas une parabole ; que cet œil m'excuse, une demi-ellipse était plus facile à tracer avec mon logiciel rustique.



### 3.b Comportement limite périodique.

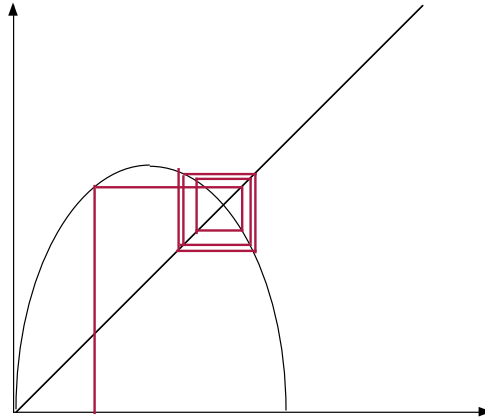


FIGURE 3 – chaos déterministe 2.

Dire qu'au delà de  $a = 3$ , il n'y a plus convergence est un peu court. Continuons un peu le tracé de la figure précédente dans ce cas-là. On obtient la figure 3 p. 9. Comme prévu, il n'y a pas de convergence mais on voit se profiler un carré limite, c'est à dire qu'il semble que les  $X_n$  sont osciller entre deux valeurs limites, les termes de rang pair vers une limite  $X'_\infty$  et ceux de rang impair vers une limite  $X''_\infty$  telles que :

$$\begin{cases} X''_\infty = f(X'_\infty) = a X'_\infty (1 - X'_\infty) \\ X'_\infty = f(X''_\infty) = a X''_\infty (1 - X''_\infty) \end{cases}$$

On élimine  $X''_\infty$  d'où :

$$X'_\infty = f[f(X'_\infty)] = a [a X'_\infty (1 - X'_\infty)] [1 - a X'_\infty (1 - X'_\infty)]$$

ce qui revient à dire que  $X'_\infty$  est solution de :

$$X = a [a X (1 - X)] [1 - a X (1 - X)]$$

on simplifie par  $X$  (donc  $X = 0$  est solution, mais sans intérêt car alors  $X_n = 0$  pour tout  $n$ ) et il reste à résoudre :

$$1 = a^2 (1 - X) (1 - a X + a X^2)$$

C'est une équation du troisième degré mais on en connaît une solution. Ben oui : le  $X_\infty$  du paragraphe précédent est solution de  $X = f(X)$  et il est aisé de se convaincre qu'il est dès lors solution de  $X = f[f(X)]$ , on factorise et il reste à résoudre une équation de second degré avec paramètre ; il est aisé de vérifier que son discriminant est positif pour

tout  $a$ . Par ailleurs si  $X = f[f(X)]$  alors  $f(X) = f\{f[f(X)]\}$  ce qui montre que  $f(X)$  est aussi solution de  $X = f[f(X)]$  donc que les deux solutions de l'équation du second degré sont les limites des termes pairs et impairs. Reste à vérifier la condition de convergence : en posant  $g(X) = f[f(X)]$  et  $X'$  l'une des solutions (si les termes pairs tendent vers  $X'$  alors les termes impairs tendent vers  $X'' = f(X')$ , autre solution, cf supra, sans qu'il soit besoin de vérification), il faut vérifier  $|g'(X')| < 1$  (cf supra).

Les calculs demandent beaucoup de minutie et d'habitude mais n'apportent rien à la physique. Contentons nous d'affirmer le résultat : ce type de solution est possible si  $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3,4495\dots$

Commentons la solution : les années paires, l'effectif est faible, la nourriture par tête abondante donc la démographie élevée et la mortalité faible ; par conséquent les années impaires, l'effectif est élevé, la nourriture par tête rationnée donc la démographie faible et la mortalité forte et l'on revient à un effectif faible.

Au delà de la valeur  $a = 1 + \sqrt{6}$ , l'étude théorique devient inextricable et l'on traite le problème par des simulations informatiques aisées à programmer. On fait apparaître sur des intervalles de valeurs de  $a$  de plus en plus courts des cycles limites à 4, 8, 16 valeurs mais il faut reconnaître que ça devient de moins en moins lisible donc de moins en moins convaincant.

Le lecteur qui voudrait approfondir ce passage se reportera avec profit à un article passionnant de J. M. VIGOUREUX paru dans le Bulletin de l'Union des Physiciens (84° année-n° 724 mai 1990).

### 3.c Sensibilité aux conditions initiales du chaos déterministe.

Plaçons désormais dans le cas limite  $a = 4$  (au-delà, il y a risque d'extinction brutale, cf supra) ; on a donc  $X_{n+1} = 4X_n(1 - X_n)$ . Des simulations numériques montrent que les valeurs successives de  $X_n$  s'organisent de façon chaotique sans limite apparente.

Une particularité importante est la sensibilité à plus ou moins long terme aux conditions initiales. Si l'on étudie les valeurs notées  $X'_n$  et  $X''_n$  des termes successifs  $X_n$  de deux suites vérifiant cette même relation de récurrence et dont les deux valeurs initiales  $X'_0$  et  $X''_0$  sont presque égales (soit  $|X'_0 - X''_0| \ll X'_0$ ), on constate que les premiers termes de même rang sont eux aussi presque égaux (soit  $X'_n \approx X''_n$ ) mais qu'à partir d'un certain rang, d'autant plus éloigné que la différence initiale est faible, les valeurs  $X'_n$  et  $X''_n$  n'ont strictement plus rien à voir l'une avec l'autre.

La prédiction à long terme est donc exclue car en physique la condition initiale est toujours connue avec une marge d'incertitude. La seule chose que l'on puisse espérer en diminuant cette incertitude est de repousser la valeur limite de prédiction fiable.

Par exemple avec  $X'_0 = 0,600000$  et  $X''_0 = 0,600001$  donc avec  $|X'_0 - X''_0| = 10^{-6}$ , on trouve (on ne donne que les valeurs que tous les cinq rangs) en tronquant de façon

pertinente :

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_5 = 0,006408 \quad \text{et} \quad X''_5 = 0,0006413 \quad \text{et donc} \quad |X'_5 - X''_5| = 5 \cdot 10^{-6} \\ X'_{10} = 0,2979 \quad \text{et} \quad X''_{10} = 0,2969 \quad \text{et donc} \quad |X'_{10} - X''_{10}| = 10 \cdot 10^{-4} \\ X'_{15} = 0,135 \quad \text{et} \quad X''_{15} = 0,158 \quad \text{et donc} \quad |X'_{15} - X''_{15}| = 23 \cdot 10^{-3} \\ X'_{20} = 0,263 \quad \text{et} \quad X''_{20} = 0,257 \quad \text{et donc} \quad |X'_{20} - X''_{20}| = 6 \cdot 10^{-3} \\ X'_{25} = 0,996 \quad \text{et} \quad X''_{25} = 0,937 \quad \text{et donc} \quad |X'_{25} - X''_{25}| = 59 \cdot 10^{-3} \\ X'_{30} = 0,765 \quad \text{et} \quad X''_{30} = 0,945 \end{array} \right.$$

Avec des écarts certes globalement croissants, les valeurs de  $X'_n$  et  $X''_n$  restent proches jusque  $n \approx 25$  et n'ont plus rien à voir l'une avec l'autre à partir de  $n \approx 30$ .

Nous allons justifier ce comportement avec un artifice de calcul rendu possible par la simplicité de la relation de récurrence.

Effectuons le changement de variable défini par :

$$X_n = \frac{1 - \cos(\pi \theta_n)}{2}$$

compatible avec  $X_n \in [0, 1]$ . On remarquera qu'on a alors  $1 - X_n = \frac{1 + \cos(\pi \theta_n)}{2}$ .

La relation de récurrence impose successivement, avec une petite formule trigonométrique à connaître en fin de deuxième ligne :

$$X_{n+1} = 4 X_n (1 - X_n)$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(\pi \theta_{n+1})}{2} &= 4 \frac{1 - \cos(\pi \theta_n)}{2} \frac{1 + \cos(\pi \theta_n)}{2} = \dots \\ &\dots = 1 - \cos^2(\pi \theta_n) = \sin^2(\pi \theta_n) = \frac{1 - \cos(2\pi \theta_n)}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\pi \theta_{n+1}) = \cos(2\pi \theta_n)$$

$$\pi \theta_{n+1} = \pm 2\pi \theta_n + 2k\pi \quad \text{avec } k \text{ entier}$$

$$\theta_{n+1} = \pm 2\theta_n + 2k$$

Sans changer la valeur de  $X_{n+1}$ , on pourra choisir systématiquement  $\theta_{n+1} = 2\theta_n$  d'où  $\theta_n = 2^n \theta_0$ .

La sensibilité aux conditions initiales devient particulièrement évidente lorsqu'on passe en base deux, c'est à dire que l'on écrit tout nombre sous la forme :

$$\alpha_n 2^n + \alpha_{n-1} 2^{n-1} + \dots + \alpha_2 2^2 + \alpha_1 2^1 + \alpha_0 2^0 + \alpha_{-1} 2^{-1} + \alpha_{-2} 2^{-2} + \dots$$

où les  $\alpha$  valent 0 ou 1.

Reprenons un exemple arbitraire de deux suites partant de valeurs presque égales, disons

$$\begin{cases} \theta'_0 = 0, 111\ 111\ 111\ !!!!! \dots \\ \theta''_0 = 0, 111\ 111\ 111\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

où les points d'exclamation et d'interrogation désignent deux suites différentes qui est inutile de préciser. Multiplier par 2 en base 2, c'est comme multiplier par 10 en base 10 : on décale la virgule. Sauteons le rang 1 et passons directement au rang 2 :

$$\begin{cases} \theta'_2 = 11, 111\ 111\ 1!!!! \dots \\ \theta''_2 = 11, 111\ 111\ 1??\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

Or on peut à volonté ajouter ou retrancher un multiple de 2 aux  $\theta$  ( donc de  $2\pi$  aux arguments des cosinus) sans changer les valeurs des  $X = \frac{1-\cos(\pi\theta)}{2}$ , en particulier supprimer tous les chiffres avant la virgule à partir du second, nous réécrivons avec un signe d'équivalence :

$$\begin{cases} \theta'_2 \equiv 1, 111\ 111\ 1!!!! \dots \\ \theta''_2 \equiv 1, 111\ 111\ 1??\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta'_3 \equiv 1, 111\ 111\ !!!!! \dots \\ \theta''_3 \equiv 1, 111\ 111\ ???\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

et en grillant quelques étapes :

$$\begin{cases} \theta'_6 \equiv 1, 111\ !!!!! \dots \\ \theta''_6 \equiv 1, 111\ ???\ ???\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta'_9 \equiv 1, !!!!! \dots \\ \theta''_9 \equiv 1, ???\ ???\ ???\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta'_{10} \equiv !, !!!!! \dots \\ \theta''_{10} \equiv ?, ???\ ???\ ???\ ???\ ??? \dots \end{cases}$$

J'ai voulu ce graphisme répétitif pour visualiser la montée inexorable vers la virgule des chiffres qui diffèrent entre valeurs initiales ; il faut le voir comme une figure. On se convainc dès lors aisément que si  $\theta'_0$  et  $\theta''_0$  commencent à différer au p-ième chiffre binaire après la virgule, dès la p-ième itération  $\theta'_n$  et  $\theta''_n$  n'ont plus rien à voir et ils ont commencé à ne plus être proches un peu avant.

Par exemple, si l'on chiffre l'écart minimal perceptible à  $10^{-3} \approx 2^{-10}$  (car  $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ ) et si l'écart initial est  $10^{-9} \approx 2^{-30}$ , donc totalement imperceptible ; les écarts commenceront à se voir à partir de la 20ème itération et les suites n'auront plus rien à voir dès la 30ème itération.

Il est d'usage d'appeler ce phénomène l'*effet papillon* : écraser un papillon qui volette joyeusement dans l'air printanier peut provoquer un cyclone un mois plus tard qui détruira la maison du sinistre individu qui a fait ça, bien fait pour lui. Il ne faut toutefois pas prendre cela au pied de la lettre : les mouvements atmosphériques sont certes imprévisibles à long terme mais ils ont quand même une tendance à s'organiser en structures identiques (dépressions et anticyclones) et assez reproductibles (l'anticyclone des Açores) qui bornent les divergences qui apparaissent avec des situations initiales modifiées.

Par contre une formule de récurrence simple qui devrait déterminer l'avenir une fois connue la condition initiale (le déterminisme) s'avère incapable à le faire dans certains cas (la valeur de  $a$  ici) car la condition initiale n'est jamais connue à une précision infinie ; tôt ou tard on débouche sur l'inconnu (le chaos).... heureusement d'ailleurs : sans surprise, la vie n'aurait guère de saveur.

## 4 Systèmes dynamiques.

### 4.a L'exemple choisi. Historique et étude qualitative.

Vito VOLTERRA, mathématicien et physicien italien, fut contacté vers 1925 par son futur gendre qui étudiait les statistiques de pêche dans l'Adriatique et s'étonnait qu'à la fin de la guerre 1914-1918 pendant laquelle l'activité de pêche avait été réduite et qu'on pouvait donc s'attendre à une augmentation des populations de sardines et de requins, on avait constaté que celle des sardines avait paradoxalement diminué. VOLTERRA a proposé un modèle mathématique « proie-pédateur », à peu près identique à un modèle développé l'année précédente et indépendamment par Alfred LOTKA, mathématicien américain d'origine austro-hongroise, et vérifié sur les statistiques de chasse de lièvres et de lynx au Canada. Le modèle est donc connu aussi sous le nom de modèle de LOTKA-VOLTERRA.

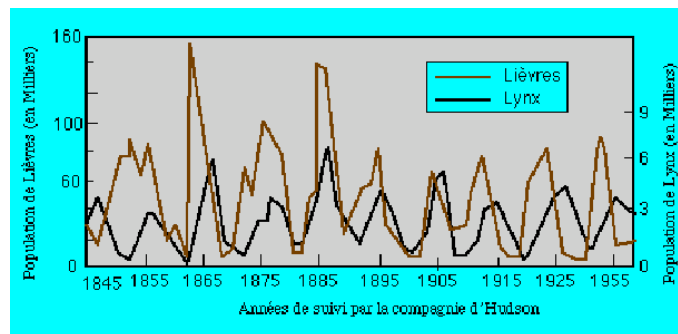


FIGURE 4 – Lièvres et lynx 1.

Qualitativement, voici ce qui se passe : si à un moment il y a peu de lièvres, les lynx n'ont plus à manger et leur population décroît ; lorsqu'elle a suffisamment décliné, il n'y a plus assez de prédateurs pour contrecarrer la fertilité des hâses (lièvres femelles) et la

population des lièvres croît ; lorsqu'elle a suffisamment crû<sup>3</sup>, les lynx ont à nouveau à manger et leur population croît ; lorsqu'elle a suffisamment crû, les lynx font des ravages parmi les levrauts (petits du lièvre) et la population des lièvres décroît et l'on finit par revenir au point de départ et l'on s'attend donc à l'apparition de cycles. La Compagnie de la Baie d'Hudson dispose de statistiques sur une période de deux cents ans et celles-ci mettent effectivement en évidence des cycles d'une durée d'environ dix ans, comme le montre la figure 4 p. 13, trouvée sur internet.

#### 4.b Le modèle de Lotka-Volterra.

Appelons  $X(t)$  l'effectif à l'instant  $t$  des proies (sardines ou lièvres) et  $Y(t)$  celle des prédateurs (lynx ou requins). On suppose que les proies ont une nourriture abondante et inépuisable à disposition (herbe ou plancton).

La reproduction des proies, disons des lièvres, est sur le schéma :

herbe+lièvre+hase  $\rightarrow$  lévrauts

et il est raisonnable de penser que le nombre de levrauts qui naissent en un temps donné est proportionnel à la population de lièvres ; on peut donc, pour cet aspect du problème, proposer la loi :

$$\frac{dX}{dt} = a X$$

où  $a$  est un taux de fécondité. Il faut comprendre ici que  $\frac{dX}{dt}$  aurait cette expression s'il n'y avait pas de lynx.

La reproduction des prédateurs, des lynx donc, est sur le schéma :

lièvres mangés+lynx mâle+lynx femelles  $\rightarrow$  petits lynx

et il est raisonnable de penser que le nombre de petits lynx qui naissent en un temps donné est proportionnel à la population de lynx, mais que le taux de fécondité est lié à la nourriture disponible donc à l'effectif des lièvres ; le modèle adopte le parti-pris simplificateur d'une proportionnalité, d'où la loi (s'il n'y avait que cet aspect du problème) :

$$\frac{dY}{dt} = b X Y$$

Mais il ne faut pas ici perdre de vue que cette gestation de petits lynx s'accompagne d'une consommation de lièvres et il est raisonnable de penser que le nombre de petits lynx qui naissent est proportionnel à la consommation totale de lièvres ; le modèle adopte le parti-pris simplificateur d'une égalité, d'où la loi :

$$\frac{dX}{dt} = -b X Y$$

---

3. avec un circonflexe pour faire une distinction avec cru, participe passé de croire ; comme le verbe « décroître » n'existe pas, pas besoin de circonflexe à décro.

Enfin, il faut tenir compte que les lynx ne sont pas éternels et qu'ils meurent selon le schéma :

lynx+âge  $\rightarrow$  lynx mort

et il est raisonnable de penser que le nombre de lynx qui meurent en un temps donné est proportionnel à la population de lynx ; on peut donc, pour cet aspect du problème, proposer la loi :

$$\frac{dY}{dt} = -cY$$

où  $c$  est un taux de mortalité. Il faut comprendre ici que  $\frac{dy}{dt}$  aurait cette expression s'il n'y avait que cet aspect du problème.

Reste à faire la somme des différentes contributions à  $\frac{dX}{dt}$  et  $\frac{dY}{dt}$  pour aboutir au modèle de LOTKA-VOLTERRA :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX - bXY \\ \frac{dY}{dt} = bXY - cY \end{cases}$$

Bien évidemment, c'est la biologie qui a donné naissance à ce modèle mais un exemple intéressant existe en chimie, celle des réactions chimiques oscillantes ; la première a été découverte fortuitement vers 1950 par BELOUSSOV et théorisée par ZHABOTINSKY : un mélange d'acides citrique et sulfurique et d'un sel de cérium et de bromate de potassium oscille périodiquement entre la couleur jaune (ion cérique) et l'incolore (ion céreux). Le mécanisme de la réaction comporte, paraît-il, 18 réactions élémentaires dont certaines auto-catalytiques et 21 espèces chimiques. Je me retranche hypocritement derrière le fait que ce cours est un cours de physique pour l'éluder.

#### 4.c Recherche d'un équilibre.

Est-il possible que  $X$  et  $Y$  soient constants ? Voyons ce que deviennent les équations du modèle quand  $\frac{dX}{dt}$  et  $\frac{dY}{dt}$  sont nuls :

$$\begin{cases} 0 = aX - bXY = X(a - bY) \\ 0 = bXY - cY = Y(bX - c) \end{cases}$$

Si l'on exclut la solution sans intérêt où  $X$  et  $Y$  sont nuls, il reste comme seul équilibre de populations :

$$X = \frac{c}{b} \quad \text{et} \quad Y = \frac{a}{b}$$

#### 4.d Evolution près de l'équilibre.

Comment évoluent les deux populations si elles restent près de l'équilibre ? Voyons ça !

On effectue le changement de variable suivant qui revient à mettre l'origine au point d'équilibre :

$$X(t) = \frac{c}{b} + x(t) \quad \text{et} \quad Y(t) = \frac{a}{b} + y(t)$$

avec  $|x| \ll \frac{c}{b}$  et  $|y| \ll \frac{a}{b}$  de sorte que les termes en  $xy$  du second ordre soient négligeables et les équations linéarisées.

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\left(\frac{c}{b} + x\right) - b\left(\frac{c}{b} + x\right)\left(\frac{a}{b} + y\right) = \dots = -cy - bxy \approx -cy \\ \frac{dy}{dt} = b\left(\frac{c}{b} + x\right)\left(\frac{a}{b} + y\right) - c\left(\frac{a}{b} + y\right) = \dots = ax + bxy \approx ax \end{cases}$$

On élimine  $y$  ainsi :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c \frac{dy}{dt} = -acx$$

dont la solution avec un choix convenable de l'origine des temps est :

$$x(t) = x_0 \cos[(\sqrt{ac})t] \quad \text{d'où} \quad X(t) = \frac{c}{b} + x_m \cos[(\sqrt{ac})t]$$

où  $x_m$  est une constante, petite devant  $\frac{c}{b}$  pour que les hypothèses de travail soient vérifiées.

On tire  $y$  de  $\frac{dx}{dt} = -cy$  (et non de  $\frac{dy}{dt} = ax$  qui introduirait bêtement une constante d'intégration), d'où :

$$y = -\frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \dots = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)} x_m \sin[(\sqrt{ac})t]$$

En notant  $y_m = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)} x_m$  et  $\omega = \sqrt{ac}$ , on arrive à :

$$\begin{cases} X(t) = \frac{c}{b} + x_m \cos(\omega t) \\ Y(t) = \frac{a}{b} + y_m \sin(\omega t) \end{cases}$$

ce qui montre que dans un graphe où l'on porte  $X$  en abscisse et  $Y$  en ordonnée, le point représentatif des populations, de coordonnées  $(X, Y)$ , décrit une ellipse dans le sens direct, dont le centre est le point d'équilibre et les axes parallèles à  $OX$  et  $OY$ . Est-il utile de faire figurer ici une figure que le lecteur peut dessiner rapidement sur un bout de papier ? Mais qu'il en profite donc pour relire l'analyse qualitative un peu plus haut avec la figure dans son champ de vision.



#### 4.e Evolution loin de l'équilibre.

Loin de l'équilibre, les équations ne sont plus linéaires et l'on sera obligé de passer par un traitement algorithmique informatisé. Il vaut mieux, dans ce cas, passer par des variables réduites pour diminuer le nombre de paramètres.

On repart du système initial :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX - bXY \\ \frac{dY}{dt} = bXY - cY \end{cases}$$

Il y a quatre coefficients et l'on ne peut jouer que sur trois variables, il restera donc forcément un paramètre. Je propose<sup>4</sup> par exemple les changements de variables suivants :  $X = \frac{\sqrt{ac}}{b}x$ ,  $Y = \frac{\sqrt{ac}}{b}y$  et  $t = \frac{\tau}{\sqrt{ac}}$  d'où  $\frac{d}{dt} = \sqrt{ac} \frac{d}{d\tau}$  et l'on arrive aisement à :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = kx - xy \\ \frac{dy}{d\tau} = xy - \frac{1}{k}y \end{cases}$$

où  $k = \sqrt{\frac{a}{c}}$ . L'équilibre correspond à  $x = \frac{1}{k}$  et  $y = k$ .

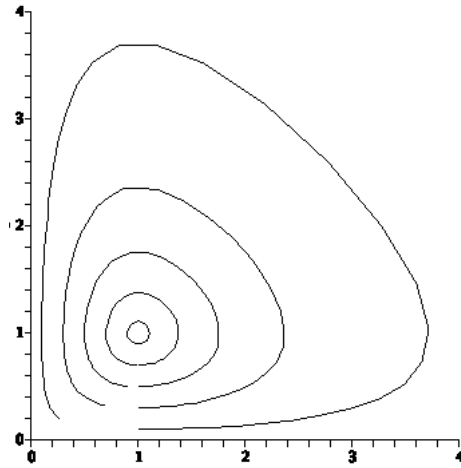


FIGURE 5 – Lièvres et lynx 2.

A titre d'exemple, la figure 5 p. 17 a été obtenue grâce à un logiciel de calcul formel avec  $k = 1$  et pour cinq conditions initiales avec toutes  $x_0 = 1$  et  $y_0$  valant respectivement 0,9 (la plus au centre), 0,7 puis 0,5 puis encore 0,3 et enfin 0,1 (la plus excentrée). On a déroulé le temps sur une période de l'approximation valable près de l'équilibre et l'on constate que cette durée est insuffisante pour terminer les cycles, ce qui montre que la période augmente quand on s'éloigne de l'équilibre.

4. après plusieurs essais décevants issus d'idées que je croyais prometteuses et que je vous épargne.

Admettons<sup>5</sup> qu'un lobby de chasseurs convainque l'opinion publique qu'il y a à l'équilibre beaucoup trop de lapins et obtienne le droit d'en tuer (d'en « prélever » selon l'euphémisme officiel) la moitié. En interpolant sur la figure, on constate qu'un demi-cycle plus tard, les lapins seront deux fois plus nombreux qu'avant. Laissons donc les lapins tranquilles.

---

5. C'est une hypothèse de travail mais ça n'arrive jamais (?)