Chapitre A-IX

Analyse vectorielle.

RÉSUMÉ :

L'objet de ce chapitre est double. On veut tout d'abord y regrouper tous les rappels de calcul vectoriel, tous les théorèmes et toutes les formules utiles d'analyse vectorielle concernant le gradient, le rotationnel, la divergence, le laplacien, etc.

Mais l'occasion est trop belle pour ne pas chercher à les introduire de façon sérieuse, donc d'introduire la notion de tenseur (ramenée modestement à une convention d'écriture) et de présenter les résultats fondamentaux de l'algèbre extérieure sans en faire vraiment (simple question de compromis).

Le lecteur pressé pourra donc sauter les parties 1 et 3 ainsi que le paragraphe 5b ; le lecteur curieux est libre de s'y promener.

Table des matières

1 Espaces vectoriels.

Il s'agit ici de quelques rappels simples de mathématique sur les espaces vectoriels. Seule la notation utilisée peut dérouter, mais on s'y fait très vite et dès qu'on l'a comprise, on ne peut plus jamais s'en passer.

Si l'on ne cherche dans ce chapitre qu'un formulaire, on peut sauter toute la partie 1.

1.a Base vectorielle, composantes d'un vecteur.

En physique classique, l'espace est ramené à un espace vectoriel à trois dimensions et en relativité restreinte à un espace à quatre dimensions. Nous nous placerons ici dans le premier cas.

Une base vectorielle y est un ensemble de trois vecteurs linéairement indépendants que les physiciens notent plutôt $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ et les mathématiciens e_1, e_2 et e_3 (sans flèches). Nous proposerons dans ce cours, qui sans cela serait purement utilitaire, une initiation à l'algèbre tensorielle qui sous-tend la théorie de la relativité générale, initiation a minima dans ce chapitre ; nous utiliserons donc les indices numériques.

Un vecteur $\overrightarrow{x}$ de l'espace vectoriel ou un vecteur position de l'espace affine $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$ sera présenté comme une combinaison linéaire des trois vecteurs de base dont les coefficients sont appelées composantes du vecteur, soit pour le physicien, puis le mathématicien :

$$\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

$$x = x^1\,e_1 + x^2\,e_2 + x^3\,e_3$$

On remarquera que, par convention d'écriture, les vecteurs de base comportent un indice en bas à droite, qualifié d'indice *covariant* et les composantes un indice en haut à droite, qualifié d'indice *contravariant*.

On peut aussi écrire $x = \sum_{i=1}^{i=3} x^i\,e_i$ et même puisque la dimension de l'espace est connue $x = \sum_i x^i\,e_i$. Remarquons que l'on aurait pu aussi bien écrire $x = \sum_j x^j\,e_j$ ou encore $x = \sum_k x^k\,e_k$; le nom que l'on donne a l'indice n'est pas significatif, on l'appelle *indice muet*. A la limite, on pourrait écrire $\overrightarrow{x} = \sum_\circ x^\circ\,e_\circ$ en laissant au lecteur le choix du nom de l'indice à mettre dans le petit rond.

Pour donner une fluidité à la lecture, nous adopterons une notation, appelée *convention de sommation d'*E*INSTEIN*, qui consiste à sous-entendre le signe somme pour un indice muet, que l'on reconnaît au fait qu'il figure deux fois dans l'expression, une fois covariant, une fois contravariant. Désormais un vecteur sera noté $x = x^i\,e_i$.

Remarque : un même indice ne peut être répété que deux fois dans une expression, une fois de façon covariante, une autre de façon contravariante. Tout autre forme de répétition (deux indices covariants ou deux contravariants) ou toute répétition multiple (trois occurences ou plus) est forcément fautive.

1.b Formes linéaires.

Une forme linéaire, notée ici a par exemple, est une application linéaire qui à tout vecteur x associe un réel (ou un complexe). Par définition de la linéarité, à tout vecteur $x = x^i\, e_i$, la forme a associe :

$$a(x) = a(x^i\, e_i) = x^i\, a(e_i)$$

Notons $a_i = a(e_i)$, on a donc $a(x) = a_i\, x^i$.

Si l'on note e^1 la forme linéaire qui à tout vecteur x associe sa composante x^1 et plus généralement e^i la forme linéaire qui lui associe sa i-ième composante, on peut écrire :

$$a(x) = a_i\, e^i(x)$$

ce qui montre que la forme a est combinaison linéaires des formes e^i que l'on note $a = a_i\, e^i$.

L'ensemble des formes linéaires est donc un espace vectoriel de dimension trois, appelé *espace dual*, les formes e^i en constituent une base, appelée *base duale* et les coefficients a_i sont les composantes de la forme dans la base duale.

Dans l'espace proprement dit, les vecteurs de base sont covariants et les composantes d'un vecteur contravariants et dans l'espace dual, les vecteurs de base sont contravariants et les composantes d'une forme linéaire covariants.

1.c Formes bilinéaires. Espace métrique euclidien.

• Formes bilinéaires.

Une forme bilinéaire, notée ici a par exemple, est une application linéaire vis-à-vis des deux vecteurs qui à tout couple ordonné de vecteurs x et y associe un réel (ou un complexe). Par définition de la linéarité, à tout couple ordonné de vecteurs $x = x^i\, e_i$ et $y = y^j\, e_j$ (on donne au second indice muet un autre nom pour éviter toute confusion), la forme a associe :

$$a(x, y) = a(x^i\, e_i, y^j\, e_j) = x^i\, a(e_i, y^j\, e_j) = x^i\, y^j\, a(e_i, e_j)$$

où ici la convention d'Einstein escamote la notation d'une sommation double ($\sum_i \sum_j$). Notons $a_{ij} = a(e_i, e_j)$, on a donc $a(x, y) = a_{ij}\, x^i\, y^j$.

On peut considérer que l'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension neuf (trois au carré) dont une base est l'ensemble des formes bilinéaires qui au couple de vecteurs x et y associe le produit d'une composante de x et d'une composante de y, ce qui donne $3 \times 3 = 9$ vecteurs de base. On les note traditionnellement $e^i \otimes e^j$ et l'on peut donc écrire $a = a_{ij}\, e^i \otimes e^j$.

• Espace métrique euclidien.

On se définit une *métrique* dans un espace vectoriel par la donnée d'un *produit scalaire* qui est une forme bilinéaire privilégiée $g(x, y) = g_{ij}\, x^i\, y^j$ telle que pour tout vecteur x non nul, on ait $g(x, x) = g_{ij}\, x^i\, x^j$ strictement positif. On appelle alors norme de x la grandeur notée $\|x\|$ et définie par $\|x\| = \sqrt{g_{ij}\, x^i\, x^j}$ et produit scalaire de x et y, noté $x \cdot y$, la valeur prise par la forme pour le couple x et y, soit $x \cdot y = g(x, y) = g_{ij}\, x^i\, y^j$.

Un espace métrique est dit euclidien si, dans une base vectorielle bien choisie, les g_{ij} qui définissent la métrique sont nuls si $i \neq j$ et égaux à l'unité si $i = j$; la base est alors qualifiée d'*orthonormée*. On note traditionnellement δ_{ij} de tels coefficients. La notation δ est le symbole de KRONECKER mais attention il ne s'agit surtout pas d'y voir autre chose qu'une notation (on y reviendra).

Remarque : si $x \cdot y = 0$, on dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

1.d Bijection entre vecteurs et formes linéaires.

A tout vecteur $x = x^i\, e_i$, on peut associer une forme linéaire que nous noterons provisoirement $\tilde{x}$ qui a tout vecteur $y = y^j\, e_j$ associe le produit scalaire $x \cdot y$, soit :

$$\tilde{x}(y) = \tilde{x}(y^j\, e_j) = x \cdot y = g_{ij}\, x^i\, y^j$$

Or, dans la base duale, $\tilde{x}$ doit s'écrire $a_j\, e^j$ et $\tilde{x}(y)$ doit donc s'écrire $a_j\, y^j$. Par identification on doit donc avoir pour tout j :

$$a_j = g_{ij}\, x^i$$

Remarque : nous rencontrons ici pour la première fois une situation où un même indice est répété une fois de chaque côté d'une égalité. Dans ce cas, ses deux occurences doivent être de la même nature covariante ou contravariante et il n'y a a pas de sommation sous entendue ; il faut au contraire comprendre que l'égalité est valable pour toutes les valeurs de cet indice. Il ne s'agit plus d'un indice muet mais d'un *indice libre*.

On peut montrer que cette association entre un vecteur et une forme linéaire est bijective, ce qui permet dans une certaine mesure d'identifier le vecteur $x = x^i\, e_i$ et la forme $\tilde{x}$ dont on supprimer le tilde et, en conséquence, on notera désormais x_j les composantes dans la base duale, soit $x = x_j\, e^j$ (avec $x_j = g_{ij}\, x^i$). Cette identification est encore plus naturelle avec une base orthonormée. En effet le seul $g_{ij} = \delta_{ij}$ non nul dans le second membre est celui pour lequel l'indice muet i sur lequel s'effectue la sommation prend la valeur j de l'indice libre ; le second membre prend donc la valeur x^j ; il y a donc alors égalité numérique entre x_j et x^j. On s'interdira par contre de noter $x_j = x^j$ (quelle horreur ! cf remarque ci-dessus), l'égalité numérique s'écrit toujours $x_j = \delta_{ij}\, x^i$.

Désormais, on confond vecteur et forme linéaire associée et, par abus de langage rendu nécessaire par le besoin de préciser de quelle écriture on parle, on parlera (peu importe le nom donné à l'indice) du vecteur x_i ou x^i (au lieu de x identifié $\tilde{x}$) c'est-à-dire que l'on confond dans l'écriture un vecteur et ses composantes covariantes ou contravariantes.

1.e Endomorphismes linéaires.

On appelle endomorphisme linéaire une application linéaire, notée ici f, qui à tout vecteur $x = x^i\, e_i$ associe un autre vecteur $y = f(x) = y^j\, e_j$. Par linéarité, on doit avoir :

$$y^j\, e_j = f(x^i\, e_i) = x^i\, f(e_i)$$

On introduit les composantes de chacun des $f(e_i)$ par ses composantes de la base de l'espace vectoriel soit $f(e_i) = f_i^j\, e_j$, d'où :

$$y^j\, e_j = x^i\, f_i^j\, e_j$$

La décomposition d'un vecteur sur une base est unique, on en déduit que pour tout indice j, on a :

$$y^j = f_i^j\, x^i$$

L'endomorphisme linéaire est donc caractérisée par la donnée des f_i^j (on parlera donc, par abus de langage, de l'endomorphisme f_i^j en le confondant avec ses coefficients) dans lesquelles on reconnaît les coefficients de la matrice de cet endomorphisme, dans la présentation classique ; l'indice contravariant correspond aux lignes et l'indice covariant aux colonnes. Au vu de la position des indices, on dit qu'un endomorphisme est une fois covariant et une fois contravariant.

La composition (non commutative) de deux endormorphismes f et g est notée $h = g \circ f$ est définie par $h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)]$; en utilisant plus rapidement les outils introduits jusqu'ici, on a :

$$h(x) = g[f(x)] = g[f(x^i\, e_i)] = g[(f_i^j\, x^i)\, e_j] = g_k^j\, (f_i^j\, x^i)\, e_k$$

ce qui montre que les coefficients de h se calculent par :

$$h_i^k = g_j^k\, f_i^j$$

où l'on retrouve la règle du produit de matrices.

1.f Comportements dans un changement de base.

• Matrice de passage.

Quand on passe d'une base (nous dirons l'ancienne base) dont les vecteurs sont notés e_i à une autre base (nous dirons la nouvelle base) dont les vecteurs sont notés $e'_{i'}$, il faut connaître les composantes des vecteurs de la nouvelles base dans l'ancienne. On note :

$$e'_{i'} = p^i_{i'}\, e_i$$

qui n'est rien d'autre que la présentation tensorielle de la matrice de passage p. En appelant p' la matrice inverse on a aussi :

$$e_i = {p'}^{i'}_{i}\, e_{i'}$$

Remarque : puisque les matrices sont inverses, leur produit est la matrice unité ce que l'on peut exprimer par ${p'}^i_j\, p^j_k = \delta^i_k$ et $p^i_j\, {p'}^j_k = \delta^i_k$

• Comportement des vecteurs.

Soit un vecteur x quelconque. Dans l'ancienne base, on l'écrit $x = x^i\, e_i$, soit en y reportant l'expression des vecteurs de l'ancienne base dans la nouvelle $x = x^i\, {p'}^{i'}_{i}\, {e'}_{i'}$ et par ailleurs il doit s'écrire dans la nouvelle base $x = {x'}^{i'}\, {e'}_{i'}$; on en déduit, par identification, la relation de passage entre anciennes et nouvelles composantes :

$${x'}^{i'} = {p'}^{i'}_{i}\, x^i$$

et un raisonnement symétrique conclurait que :

$$x^i = p^i_{i'}\, {x'}^{i'}$$

En comparant avec ces relations entre composantes d'un vecteur et celles liant les deux bases, on remarque que les rôles de la matrice de passage et de son inverse ont été permutés.

• Comportement des formes linéaires.

Soit une forme linéaire a quelconque. Dans l'ancienne base, l'on écrit $a(x) = a_i\, x^i$, soit en y reportant l'expression des anciennes composantes en fonction des nouvelles $a(x) = a_i\, p^i_{i'}\, {x'}^{i'}$ et par ailleurs il doit s'écrire dans la nouvelle base $a(x) = {a'}_{i'}\, {x'}^{i'}$; on en déduit, par identification, la relation de passage entre anciennes et nouvelles composantes de la forme linéaire dans la base duale de la nouvelle base :

$${a'}_{i'} = p^i_{i'}\, a_i$$

et un raisonnement symétrique conclurait que :

$$a_i = {p'}^{i'}_{i}\, a_{i'}$$

En comparant avec les relations entre composantes d'une forme linéaire et celles liant les deux bases et contrairement aux vecteurs, on remarque que les rôles de la matrice de passage et de son inverse sont identiques.

On laisse au lecteur le soin de monter sur le même principe que pour une forme bilinéaire, on a :

$${a'}_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, a_{ij}$$

Remarque 1 : supposons que la forme bilinéaire soit celle d'une métrique (cf supra) et que les deux bases soient orthonormées (cf supra) ; on doit donc avoir :

$$\delta_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, \delta_{ij}$$

Les seul termes non nuls du second membres sont ceux pour lesquels $i = j$ d'où :

$$\delta_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^i_{j'}$$

Cette expression est illicite car l'indice i est deux fois contravariant ; c'est dû au fait que δ_{ij} n'est qu'une notation qui pose souvent ce genre de problème quand on l'escamote (cf supra). On rectifie [1] en notant ${}^t p$ la transposée [2] de p, vu comme une matrice et en remplaçant au bon endroit les indices dans la notation δ à gauche ; on doit donc avoir :

$$\delta^{j'}_{i'} = p^i_{i'}\, {}^t p^{j'}_{i}$$

A droite, on reconnaît un produit de matrices (cf supra) et à gauche la matrice unité. On retrouve la propriété classique de la matrice de passage entre bases orthonormées : sa transposée est son inverse.

• **Comportement des endomorphismes.**

Soit un endomorphisme f tel que dans l'ancienne base $y = f(x)$ se traduise par $y^j = f^j_i\, x^i$ et dans la nouvelle ${y'}^{j'} = {f'}^{j'}_{i'}\, {x'}^{i'}$. Compte tenu de ce qui précède, on peut écrire :

$${y'}^{j'} = {p'}^{j'}_{j}\, y^j = {p'}^{j'}_{j}\, f^j_i\, x^i = {p'}^{j'}_{j}\, f^j_i\, p^i_{i'}\, {x'}^{i'}$$

d'où par identification avec ${y'}^{j'} = {f'}^{j'}_{i'}\, {x'}^{i'}$, on a :

$${f'}^{j'}_{i'} = p^i_{i'}\, {p'}^{j'}_{j}\, f^j_i$$

1. Je reconnais qu'ainsi présenté, ça sent l'entourloupe, mais en fait, en revenant aux notations classiques et en détaillant les sommations, le point de départ et celui d'arrivée sont bien identiques. Ça m'a permis de gagner du temps.
2. On permute le rôle des lignes et colonnes, donc on permute les indices.

Dans le changement de base, on utilise la matrice de passage p pour la gestion de l'indice covariant et son inverse p' pour le gestion de l'indice contravariant, exactement comme pour les autres exemples.

1.g Tenseurs, définition pragmatique.

Comme il s'agit ici d'un cours de physique et non d'un cours de mathématiques, je ne chercherai pas à construire un ensemble de tenseurs à partir d'un espace vectoriel par les règles licites de construction d'ensemble en mathématique. Un tenseur sera une entité avec un certain nombre d'indices covariants et contravariants et qui dans un changement de base se transforme par multiplication avec une matrice par indice, celle de passage pour les covariants et son inverse pour les contravariants.

Par exemple a_i^{jk} est un tenseur une fois covariant et deux fois contravariant si et seulement si, dans un changement de base, on a

$$a'^{j'k'}_{i'} = p^i_{i'} \, p'^{j'}_j \, p'^{k'}_k \, f^{jk}_i$$

Remarque : La remarque concernant les formes bilinéaires prouve qu'en général, le changement de base ne transforme pas δ_{ij} en $\delta_{i'j'}$; le symbole de Kronecker n'est donc pas un tenseur comme nous l'avions annoncé plus haut ; ce n'est qu'une notation qui n'est pas stable dans un changement de base.

1.h Déterminant. Bases directes.

• Forme trilinéaire totalement antisymétrique.

Pour ce qui suit, les mathématiciens ont construit une théorie, celle de l'algèbre extérieure, qui permet des présentations plus claires et plus sobres mais l'immersion dans cette théorie n'est pas chose aisée pour un néophyte. En dimension trois, ce qui est le cadre habituel de la physique, on trouve aisément des stratégies alternatives et je les utiliserai ici. Toutefois, si mon lecteur n'a pas rompu tous les ponts avec les mathématiques, je l'incite vivement à s'initier aux charmes indicibles de l'algèbre extérieure.

Soit une forme trilinéaire a (on généraliserait en n-linéaire dans un espace vectoriel de dimension n) ; on peut écrire (cf supra) $a(x, y, z) = x^i \, y^j \, z^k \, a(e_i, e_j, e_k) = a_{ijk} \, x^i \, y^j \, z^k$.

Elle est dite totalement antisymétrique si, en permutant deux de ses arguments, elle change de signe (par exemple $a(x, z, y) = -a(x, y, z)$ et même chose en permutant x et y ou x et z). En particulier, on aura par exemple $a_{ikj} = -a_{ijk}$ d'où par exemple si $i = 1$ et $j = k = 2$, $a_{122} = -a_{122}$ soit $a_{122} = 0$, bref si deux indices sont égaux, le coefficient est nul et les seuls coefficients non nuls sont ceux pour lesquels ijk est une permutation de 123. On passe de 123 à 132, 213 et 321 par une seule permutation de deux termes et à 312 et 231 par deux permutations successives de deux termes. Les permutations 123, 231 et 312 sont dites paires et 321, 213 et 132 sont dites impaires.

On notera ε_{ijk} une grandeur nulle si deux indices sont égaux, égale à l'unité si ijk est une permutation paire de 123 et l'opposé de l'unité si c'en est une permutation impaire. Une forme tri-linéaire totalement antisymétrique s'écrit donc forcément :

$$a(x, y, z) = \varepsilon_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k\, a(e_1, e_2, e_3)$$

On appelle déterminant dans la base e_1, e_2 et e_3 des vecteurs x, y et z dans cet ordre la grandeur :

$$det(x, y, z) = \varepsilon_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k$$

.

qui s'identifie avec la définition classique du déterminant d'une matrice dont les vecteurs colonnes seraient x, y et z exprimés par leur composantes dans la base vectorielle.

Toute forme tri-linéaire totalement antisymétrique s'écrit donc

$$a(x, y, z) = det(x, y, z)\, a(e_1, e_2, e_3)$$

où $a(e_1, e_2, e_3)$ n'est somme toute qu'une constante que l'on pourrait noter k.

Remarque 1 : attention, a_{ijk} est un tenseur, mais ni le déterminant, ni donc ε_{ijk}, issus d'une factorisation arbitraire dans une base particulière ne le sont. Approfondissons : un scalaire, en particulier la valeur que prend une forme linéaire, ne dépend pas du choix de la base vectorielle (du reste, on a déjà tacitement utilisé cette propriété) donc dans un changement de base, on peut noter :

$$a(x, y, z) = det(x, y, z)\, a(e_1, e_2, e_3) = det'(x, y, z)\, a({e'}_1, {e'}_2, {e'}_3)$$

où $det'(x, y, z)$ est la définition que l'on donnerait du déterminant dans la nouvelle base.

Remarque 2 : en systématisant une remarque qui vient d'être utilisée, si deux des arguments d'une forme trilinéaire antisymétrique sont égaux et si on les permute, elle doit changer de signe, bien que formellement ses arguments soient restés inchangés. La conclusion s'impose d'elle-même : si deux arguments sont égaux, la forme est nulle.

• **Comportement dans un changement de base.**

Soit a une forme tri-linéaire totalement antisymétrique et appliquons la dernière formule aux trois vecteurs d'une nouvelle base, on a donc :

$$a({e'}_1, {e'}_2, {e'}_3) = det({e'}_1, {e'}_2, {e'}_3)\, a(e_1, e_2, e_3)$$

où la définition $det(x, y, z) = \varepsilon_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k$ appliquée aux vecteurs de la nouvelle base donne, en introduisant la matrice de passage comme expression des nouveaux vecteurs de base en fonction des anciens :

$$det({e'}_1, {e'}_2, {e'}_3) = \varepsilon_{ijk}\, p_1^i\, p_2^j\, p_3^k$$

qui n'est autre (cf supra) que le déterminant de la matrice p, on notera :

$$a(e'_1, e'_2, e'_3) = det(p)\, a(e_1, e_2, e_3)$$

Effectuons un second changement de base de matrice q, on a alors

$$a(e''_1, e''_2, e''_3) = det(q)\, a(e'_1, e'_2, e'_3) = det(q)\, det(p)\, a(e_1, e_2, e_3)$$

Remarque : c'est ainsi que nos amis mathématiciens montrent que le déterminant d'un produit de matrices est le produit de leurs déterminants.

Dans le cas particulier où la troisième base est identique à la première, la matrice q est la matrice inverse de p, notée dans ce cours p', on a alors :

$$a(e_1, e_2, e_3) = det(p')\, det(p)\, a(e_1, e_2, e_3)$$

d'où $det(p')\, det(p) = 1$

Dans le cas encore plus particulier où la seconde base est orthonormée, on a vu un peu plus haut que l'inverse de la matrice de passage est sa transposée ${}^t p$, or le déterminant de la transposée d'une matrice est égal à celui de la matrice[3]. On peut donc alors affirmer que $det({}^t p)\, det(p) = det(p)^2 = 1$; on en déduit que $det(p) = \pm 1$ et aussi que $a(e'_1, e'_2, e'_3) = \pm a(e_1, e_2, e_3)$ et enfin avec les notations définies ci-dessus pour le comportement d'un déterminant que $det(x, y, z) = \pm det'(x, y, z)$.

• Bases orthonormées directes.

A partir d'une base de référence, on appellera base orthonormée directe une nouvelle base, orthonormée, dont la matrice de passage ait un déterminant égal à l'unité et on la qualifiera d'indirecte si ce déterminant est égal à l'opposé de l'unité. En physique, on veillera à travailler dans des bases orthonormées (pour la conservation du produit scalaire et de la norme) directes pour la conservation des déterminants et des produits vectoriels que nous définissons juste en dessous.

1.i Produit vectoriel.

• Définition et propriétés.

La notion de produit vectoriel est relative à la base qui définit la métrique, c'est-à-dire la norme et le produit scalaire et, utilisée seule, elle ne génère pas un tenseur. On manipulera donc cette notion avec prudence en cas de changement de base.

3. A trois dimensions, il suffit de développer l'expression des deux déterminants et de comparer les résultats. Dans une dimension quelconque, il faut passer par le groupe des substitutions et se ramener à montrer qu'une substitution et son inverse ont même parité ce qui demande beaucoup d'abstraction et de concentration ; nous admettrons donc.

A deux vecteurs $x = x^i\, e_i$ et $y = y^j\, e_j$ on associe un vecteur noté $x \wedge y$ défini par :

$$x \wedge y = {\varepsilon_{ij}}^k\, x^i\, y^j\, e_k$$

où ${\varepsilon_{ij}}^k$, qui n'est pas un tenseur (cf supra), est nul si deux des indices sont égaux et égal à ± 1 selon que ijk dans cet ordre est une permutation paire ou impaire de 123 (ce qui oblige à bien décaler l'indice supérieur k dans la notation).

Si l'on calcule $y \wedge x$, en permutant le nom des indices muets, on a :

$$y \wedge x = {\varepsilon_{ji}}^k\, y^j\, x^i\, e_k = {\varepsilon_{ji}}^k\, x^i\, y^j\, e_k$$

d'où, puisque ${\varepsilon_{ji}}^k$ et ${\varepsilon_{ij}}^k$ sont opposés, par construction, on peut donc affirmer par comparaison des deux expressions que :

$$y \wedge x = -x \wedge y$$

Le produit vectoriel est donc antisymétrique.

Par ailleurs dans la base où l'on se place, on définit aussi le déterminant de trois vecteurs par $det(x, y, z) = \varepsilon_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k$ que l'on peut reformuler ainsi, avec les propriétés du symbole de Kronecker :

$$det(x, y, z) = \varepsilon_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k = {\varepsilon_{ij}}^l\, \delta_{lk}\, x^i\, y^j\, z^k$$

Comme on est dans la base qui définit la métrique, δ_{lk} s'identifie à g_{lk} et le déterminant au produit scalaire (voir plus haut sa définition) de $z = z^k\, e_k$ et d'un vecteur $w = w^l\, e_l$ où $w^l = {\varepsilon_{ij}}^l\, x^i\, y^j$ où l'on reconnaît sans peine le produit vectoriel de x par y. On peut donc affirmer que dans la base considérée, on a :

$$det(x, y, z) = (x \wedge y) \cdot z$$

L'intérêt est là : dans une base orthonormée directe, qui respecte le produit scalaire et le déterminant, on peut s'affranchir de raisonner en terme de déterminant de matrice et ne gérer que des vecteurs en introduisant les produits scalaire et vectoriel ; alors le déterminant, sous sa forme équivalente est rebaptisé produit mixte.

Remarque : si on utilise le fait que dans une forme trilinéaire totalement antisymétrique, donc pour un déterminant, on obtient un résultat nul si deux arguments sont égaux, on en déduit que $(x \wedge y) \cdot x = 0$ et que $(x \wedge y) \cdot y = 0$, donc que $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y.

• Une propriété particulière en trois dimensions.

Si l'on considère le produit vectoriel $x \wedge y = {\varepsilon_{ij}}^k\, x^i\, y^j\, e_k$ comme un endomorphisme linéaire appliqué au vecteur y, cet endomorphisme étant lui-même fonction du vecteur x, ce que l'on pourrait noter $f_x(y)$, on aurait alors $x \wedge y = f_x(y) = f^k_j\, y^j\, e_k$, d'où par identification $f_j^k = \varepsilon_{ij}{}^k\, x^i$ où les propriétés de $\varepsilon_{ij}{}^k$ montent que f_j^k et f_k^j sont opposés. On peut donc par ce point de vue associer à tout vecteur x un endomorphisme linéaire à matrice antisymétrique.

La réciproque est-elle vraie, à savoir à tout endomorphisme linéaire antisymétrique f_j^k peut-on associer un vecteur x tel que $f_j^k = \varepsilon_{ij}{}^k\, x^i$? La réponse est à chercher dans la dimension des espaces vectoriels ; l'ensemble des endomorphismes linéaires d'un espace à n dimensions et n^2 (c'est lié au fait que sa matrice comporte n^2 coefficients quelconques) et celui des endomorphismes linéaires antisymétriques dont les n termes diagonaux sont nuls et les autres opposés donc liés deux à deux est de dimension $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$. Il ne peut donc avoir bijection avec l'espace de départ que si $\frac{n\,(n-1)}{2} = n$ soit $\frac{n-1}{2} = 1$ et $n = 3$. Dans notre espace à trois dimensions, on peut donc simplifier toute loi physique faisant intervenir une matrice anti-symétrique par une loi faisant intervenir un vecteur et un produit vectoriel mais il y a un prix à payer : il faut travailler avec une base orthonormée directe ou, à défaut [4], changer le vecteur en son opposé quand on utilise une base indirecte. Pour insister là-dessus on parle de *pseudo-vecteur* ou de *vecteur axial.*

On rencontre cette situation dans le champ des vitesses d'un solide ou d'un référentiel pour lequel l'on introduit le pseudo-vecteur rotation et dans l'interaction électromagnétique où l'on introduit le pseudo-vecteur champ magnétique.

2 Retour à la géométrie traditionnelle.

On vient de remplacer la géométrie vectorielle par une géométrie tensorielle. Mis à part le changement de notation à maîtriser, la seconde n'est pas plus compliquée que la première car c'est la même formulée autrement. Il fallait cependant que ce fût fait pour définir correctement les outils de l'analyse vectorielle comme le gradient, le rotationnel et la divergence.

Avant de commencer, on va rappeler ici la formulation classique, celle que l'on rencontre dans la plupart des domaines de la physique, des outils vectoriels courants. On ne détaillera pas ou peu le lien avec ce qui précède car ce n'est qu'un jeu d'écriture.

2.a Norme, produit scalaire, orthogonalité.

• Norme et produit scalaire.

On revient à l'écriture classique où d'une part x, y et z sont les coordonnées d'un point ou les composantes d'un vecteur position et V_x, V_y et V_z celles d'un autre type de vecteur et d'autre part les indices numériques désignent les différents vecteurs ce qui est exactement l'inverse de la notation tensorielle.

4. On s'en convainc en comparant comment se transforment la matrice et le vecteur en remplaçant un des vecteurs de la base par son opposé. On détaillera plus loin.

Le carré de la norme de $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$ est $\|\overrightarrow{OM}\| = x^2 + y^2 + z^2$.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{OM_1} = x_1\,\overrightarrow{e_x} + y_1\,\overrightarrow{e_y} + z_1\,\overrightarrow{e_z}$ et de $\overrightarrow{OM_2} = x_2\,\overrightarrow{e_x} + y_2\,\overrightarrow{e_y} + z_2\,\overrightarrow{e_z}$ est $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$. Il est symétrique ($\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$), bilinéaire et il est nul si est seulement si $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux.

• Décomposition d'un vecteur en composantes parallèle et orthogonale à un autre.

On peut décomposer un vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ en une composante parallèle $\overrightarrow{V_{//}}$ et une composante normale $\overrightarrow{V_\perp}$ à un vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_1$ (soit $\overrightarrow{OM_1} = \|\overrightarrow{OM_1}\|\,\overrightarrow{u}_1$). On cherche à obtenir :

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{V_{//}} + \overrightarrow{V_\perp} = V_{//}\,\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{V_\perp}$$

En mutipliant scalairement par $\overrightarrow{u}_1$, on a :

$$\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{u}_1 = V_{//}\,\overrightarrow{u}_1^{\,2} + \overrightarrow{V_\perp} \cdot \overrightarrow{u}_1 = V_{//}$$

on en déduit que :

$$\overrightarrow{V_{//}} = \overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{u}_1 = \frac{\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_1}}{\|\overrightarrow{OM_1}\|}$$

et donc :

$$\overrightarrow{V_\perp} = \overrightarrow{OM_2} - \frac{\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_1}}{\|\overrightarrow{OM_1}\|}$$

Remarque : on peut reformuler ainsi ce qui précède que $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{V_{//}}$, ce qui servira plus loin.

2.b Produit vectoriel, vecteur surface.

• Définition.

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM_1} = x_1\,\overrightarrow{e_x} + y_1\,\overrightarrow{e_y} + z_1\,\overrightarrow{e_z}$ et de $\overrightarrow{OM_2} = x_2\,\overrightarrow{e_x} + y_2\,\overrightarrow{e_y} + z_2\,\overrightarrow{e_z}$ est :

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = (y_1\,z_2 - z_1\,y_2)\,\overrightarrow{e_x} + (z_1\,x_2 - x_1\,z_2)\,\overrightarrow{e_y} + (x_1\,y_2 - y_1\,x_2)\,\overrightarrow{e_z}$$

Il est antisymétrique ($\overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$), bilinéaire et il est nul si est seulement si $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont parallèles. Il est orthogonal à ses deux facteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

• **Norme du produit vectoriel.**

On peut vérifier aisément, par le calcul que :

$$(y_1\,z_2-z_1\,y_2)^2+(z_1\,x_2-x_1\,z_2)^2+(x_1\,y_2-y_1\,x_2)^2+(x_1\,x_2+y_1\,y_2+z_1\,z_2)^2=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\,(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$$

c'est-à-dire :

$$\|\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{OM_2}\|^2+(\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2})^2=\|\overrightarrow{OM_1}\|^2\,\|\overrightarrow{OM_2}\|^2$$

Comme une définition possible de l'angle θ (de valeur comprise entre 0 et π) entre deux vecteurs dans l'espace est $\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}=\|\overrightarrow{OM_1}\|\,\|\overrightarrow{OM_2}\|\,\cos\theta$; de la relation qui précède, il est aisé de déduire que $\|\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{OM_2}\|=\|\overrightarrow{OM_1}\|\,\|\overrightarrow{OM_2}\|\,|\sin\theta|$.

• **Vecteur surface.**

Si l'on décompose, comme plus haut, le $\overrightarrow{OM_2}$ en une composante parallèle $\overrightarrow{V_{//}}$ et une composante normale $\overrightarrow{V_\perp}$ au vecteur $\overrightarrow{OM_1}$, on montre aisément que $\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{V_\perp}$ car le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul ; la relation établie au paragraphe précédent, avec le produit scalaire nul donne :

$$\|\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{OM_2}\|=\|\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{V_\perp}\|=\|\overrightarrow{OM_1}\|\,\|\overrightarrow{V_\perp}\|$$

résultat qui n'est rien d'autre que la définition de l'aire du rectangle de côtés $\|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $\|\overrightarrow{V_\perp}\|$, elle même égale à celle du losange construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Le vecteur $\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{OM_2}$ dont la norme est l'aire de ce losange et qui est orthogonale à son plan (puisqu'il l'est à ses côtés) est appelé vecteur-surface de ce losange ; son orientation sera précisée ci-dessous.

• **Double produit vectoriel.**

Une formule intéressante est celle du double produit vectoriel :

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{u}$$

où chacun des deux termes du second membre est le produit d'un vecteur par le scalaire qu'est le produit scalaire des deux autres. Il n'y a pas de façon réellement élégante de le démontrer ; dès lors autant utiliser la méthode de force brutale qui consiste à calculer les deux membres en fonction des trois composantes de chacun des trois vecteurs et de constater que l'on arrive au même résultat. Si vous ne me croyez pas, faites-le. On peut mémoriser le résultat en laissant les parenthèses à gauche et en effectuant de terme à terme une permutation rétrograde $u\to w\to v\to u$.

Si l'on veut une permutation directe $u \to v \to w \to u$ on peut aussi écrire

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\,(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{w}\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

mais dans le produit d'un vecteur par un scalaire, il est inhabituel de placer le vecteur avant le scalaire. On a le choix mais on n'apprendra par cœur qu'une seule des deux formules sous peine de mélange fatal.

Remarque 1 : la comparaison des deux formulations prouve que le produit vectoriel n'est pas associatif ; l'écriture $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ sans parenthèses a deux sens possibles avec deux résultats différents et deux sens possibles, c'est ambigu et inutilisable.

Remarque : Un produit vectoriel cache une matrice antisymétrique (cf infra), le produit de deux matrices antisymétriques (ou symétriques du reste) n'est pas antisymétrique (ou symétrique) ; c'est pour cela que le second membre des relations ci-dessus ne fait pas apparaître de produit vectoriel.

2.c Produit mixte, orientation, volume.

• Définition.

Le produit mixte de trois vecteurs u, v et w est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les trois vecteurs représentés par leurs trois composantes dans la base. On le note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$; il est linéaire vis-à-vis de chacun des trois vecteurs ; toute permutation de deux vecteurs en change de signe et toute permutation circulaire le laisse inchangé. Il est nul si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linaire des deux autres, autrement dit si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires. Sa définition est équivalente à celles-ci : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$.

• Trièdres directs et indirects.

Dans une base orthonormée directe, qui conserve le déterminant donc le produit mixte, on dit que les vecteurs u, v et w dans cet ordre forment un trièdre direct si leur produit mixte, dans cet ordre, est positif. En particulier la base $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ associée à la matrice unité est directe. Pour tout couple de vecteurs non parallèles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le trièdre formé dans cet ordre par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est directe ; en effet avec la première des formulations alternative, on a :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})^2 > 0$$

Par convention, le pouce, l'index et le majeur de la main droite orientés de façon à être vaguement perpendiculaires deux à deux forment dans cet ordre un trièdre direct.

• **Volumes.**

On a vu plus haut, à un changement de notation près, que si l'on décompose $\overrightarrow{v}$ en une composante parallèle $\overrightarrow{v_{//}}$ et une composante normale $\overrightarrow{v_\perp}$ au vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_\perp}$ et que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_\perp}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v_\perp}\|$; on a vu aussi, à un changement de notation près, que si l'on décompose un vecteur $\overrightarrow{w}$ en une composante parallèle $\overrightarrow{w_{//}}$ et une composante normale $\overrightarrow{w_\perp}$ au vecteur $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_\perp}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{w_{//}} = \pm\|\overrightarrow{s}\| \, \|\overrightarrow{w_{//}}\|$; on en déduit que :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_\perp}) \cdot \overrightarrow{w_{//}} = \pm\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_\perp}\| \, \|\overrightarrow{w_{//}}\| = \pm\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v_\perp}\| \, \|\overrightarrow{w_{//}}\|$$

résultat qui, mis à part le signe, n'est rien d'autre que la définition du volume du parallélépipède de côtés $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v_\perp}\|$ et $\|\overrightarrow{w_{//}}\|$, égal à celui du prisme droit de base losange construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w_{//}}$ et aussi égal à celui du prisme oblique de base losange construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Le signe est positif ou négatif selon que les vecteurs, dans l'ordre de leur apparition sur scène, forment un trièdre direct ou indirect.

2.d Pseudo-vecteurs.

Soit une application linéaire $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$ à matrice antisymétrique ; on peut écrire de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f_{21} & f_{13} \\ f_{21} & 0 & -f_{32} \\ -f_{13} & f_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{13}\, x_3 - f_{21}\, x_2 \\ f_{21}\, x_1 - f_{32}\, x_3 \\ f_{32}\, x_2 - f_{13}\, x_1 \end{pmatrix}$$

On peut remplacer (cf supra) cette application par la multiplication vectorielle à gauche par un vecteur bien choisi soit :

$$\begin{pmatrix} f_{32} \\ f_{13} \\ f_{21} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{13}\, x_3 - f_{21}\, x_2 \\ f_{21}\, x_1 - f_{32}\, x_3 \\ f_{32}\, x_2 - f_{13}\, x_1 \end{pmatrix}$$

Donc à toute une application linéaire f de matrice antisymétrique de coefficients a_{ij}, on peut associer un vecteur $\overrightarrow{f} = f_{32}\, \overrightarrow{e_x} + f_{13}\, \overrightarrow{e_y} + f_{21}\, \overrightarrow{e_z}$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{x}$.

Effectuons un changement de base qui passe d'une base directe à une base indirecte, par exemple la base $\overrightarrow{e'_x} = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e'_y} = \overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e'_z} = -\overrightarrow{e_z}$; la matrice de passage, égale ici à son inverse, est particulièrement simple et dans la nouvelle base la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -f'_{21} & f'_{13} \\ f'_{21} & 0 & -f'_{32} \\ -f'_{13} & f'_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -f_{21} & f_{13} \\ f_{21} & 0 & -f_{32} \\ -f_{13} & f_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soit après les produits matriciels (on ne développe pas les calculs)

$$\begin{pmatrix} 0 & -f'_{21} & f'_{13} \\ f'_{21} & 0 & -f'_{32} \\ -f'_{13} & f'_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f_{21} & -f_{13} \\ f_{21} & 0 & f_{32} \\ f_{13} & -f_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette nouvelle base, on a cette fois $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f'} \wedge \overrightarrow{x}$ avec, par analogie :

$$\overrightarrow{f}' = f'_{32}\,\overrightarrow{e'_x} + f'_{13}\,\overrightarrow{e'_y} + f'_{21}\,\overrightarrow{e'_z} = (-f_{32})\,\overrightarrow{e_x} + (-f_{13})\,\overrightarrow{e_y} + f_{21}\,(-\overrightarrow{e_z}) = -\overrightarrow{f}$$

donc, dans un changement de base directe orthonormée en base indirecte orthonormée (l'exemple se généralise), le vecteur représentatif de l'application se change en son opposé. C'est le cas en particulier pour une symétrie par rapport à un plan ou par rapport à un point mais pas par rapport à une droite (qui équivaut à une rotation d'un demi-tour). Ces vecteurs qui n'en sont pas et qui jouissent de ces curieuses propriétés de symétries sont appelés *pseudo-vecteurs* ou *vecteurs axiaux*. C'est le cas du vecteur rotation d'un solide, explicitement introduit par une matrice antisymétrique et c'est le cas du champ magnétique que l'on peut introduire par une matrice antisymétrique d'ordre 4 (voir le chapitre sur la présentation relativiste de l'électromagnétisme). Les vecteurs « normaux » sont appelés tout simplement *vecteurs* ou pour insister *vecteurs polaires*.

De la même façon, on a vu plus haut qu'un changement de base directe orthonormée en base indirecte orthonormée change le signe d'un déterminant ou produit mixte. Le résultat est par analogie qualifié de *pseudo-scalaire* ou *scalaire axial* par opposition à *scalaire* ou *scalaire polaire*.

On peut aisément vérifier les formules symboliques suivantes :

$$\text{polaire} \wedge \text{polaire} = \text{axial}$$

$$\text{polaire} \wedge \text{axial} = \text{polaire}$$

$$\text{axial} \wedge \text{polaire} = \text{polaire}$$

$$\text{axial} \wedge \text{axial} = \text{axial}$$

$$\text{polaire} \cdot \text{polaire} = \text{polaire}$$

$$\text{polaire} \cdot \text{axial} = \text{axial}$$

$$\text{axial} \cdot \text{polaire} = \text{axial}$$

$$\text{axial} \cdot \text{axial} = \text{polaire}$$

Que l'on mémorise aisément en pensant règle des signes dans une multiplication et en affectant d'un signe positif les vecteurs polaires et l'utilisation du produit scalaire et d'un signe négatif les vecteurs axiaux et l'utilisation du produit vectoriel.

3 Formes différentielles.

Cette partie vise à donner un fondement théorique aux opérateurs gradient, rotationnel et divergence, afin que l'on sache comment et pourquoi ils fonctionnent. C'est un peu délicat et j'ai cherché à rendre le tout néanmoins accessible.

Si l'on ne cherche dans ce chapitre qu'un formulaire, on peut sauter toute la partie 3.

3.a Définition pragmatique.

Dans un espace affine (ici à trois dimensions), une forme différentielle est une forme linéaire qui s'applique à des vecteurs infiniment petits représentant un déplacement élémentaire et dont les coefficients dépendent du point M d'où l'on part. Par exemple, en revenant aux notations tensorielles et à la convention de sommation d'Einstein puis en notant $\overrightarrow{OM} = x^i\, e_i$ et $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x = \mathrm{d}x^i\, e_i$, une forme différentielle d'ordre 1 sera notée :

$$a_i(M)\,\mathrm{d}x^i$$

où l'on omettra rapidement de noter que les coefficients dépendent de M soit $a_i\,\mathrm{d}x^i$.

De même en notant $\overrightarrow{MM''} = \mathrm{d}y = \mathrm{d}y^j\, e_j$ un second déplacement à partir du même point, une forme différentielle d'ordre 2 sera notée :

$$a_{ij}(M)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j$$

souvent allégé en $a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j$.

Par convention et parce que cela unifiera la présentation, on appellera forme différentielle d'ordre 0 une fonction du point M

3.b Gradient.

Soit une fonction f du point M et deux points A et B reliés par un arc Γ de courbe quelconque orienté de A vers B, appelé chemin de A à B. La variation de f entre A et B soit $f(B) - f(A)$ peut être considérée comme la somme (en fait l'intégrale) des variations élémentaires $\mathrm{d}f = f(M') - f(M)$ sur tous les segments élémentaires $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x = \mathrm{d}x^i\, e_i$ de l'arc Γ, soit :

$$f(B) - f(A) = \int_A^B \mathrm{d}f = \int_\Gamma \mathrm{d}f$$

De façon traditionnelle, on écrirait ainsi la définition pratique de la différentielle :

$$\mathrm{d}f = f(x^1 + \mathrm{d}x^1, x^2 + \mathrm{d}x^2, x^3 + \mathrm{d}x^3) - f(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x^3$$

et de façon tensorielle :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ a l'allure d'une composante covariante de la forme différentielle ; on conviendra par la suite de noter $\partial_i\, f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, d'où $\mathrm{d}f = \partial_i\, f\,\mathrm{d}x^i$.

Pour vérifier que c'est effectivement une forme linéaire, effectuons un changement de variable défini par (cf supra) $x_i = p^i_{i'}\, x'^{i'}$. La loi de dérivation des fonctions composées, étendue aux fonctions de plusieurs variables, permet d'affirmer que f considérée comme fonction des x^i eux mêmes fonctions de $x'^{i'}$ a pour dérivées partielles, en écriture classique :

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{i'}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}}$$

Or de $x_i = p^i_{i'}\, x'^{i'}$, on déduit que $\frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}} = p^i_{i'}$ *à la condition essentielle* que la matrice de passage soit bien indépendante des coordonnées du point M, ce qui exclut par exemple les bases locales des coordonnées cylindriques et sphériques (on en reparlera plus loin). Donc en travaillant avec des bases classiques d'espace affine, communes à tout l'espace, on a en notation tensorielle $\delta_{i'} f = p^i_{i'}\, \delta_i f$ qui est bien (cf supra) la marque d'un tenseur covariant.

La forme différentielle d'ordre 1 et de coefficients $\partial_i\, f$ (un tenseur covariant d'ordre 1) et appelé *gradient* de la forme différentielle d'ordre 0 qu'est la fonction f. Ce qui montre que ce gradient a une existence tensorielle ne nécessitant pas le choix d'une base particulière ; il a un sens indépendamment de ce choix. Par contre, contrairement à la présentation classique, ce n'est pas un vecteur contravariant (dépendant du point M donc un champ de vecteurs) mais une forme linéaire covariante.

On rappelle (cf supra) que l'on peut établir une bijection entre vecteurs et formes linéaires et qu'avec une base orthonormée, il y a identification numérique des coefficients, ce qui permet l'abus de langage de la présentation classique.

Notre premier théorème d'analyse vectorielle est donc :

$$\boxed{f(B) - f(A) = \int_\Gamma \partial_i\, f\,\mathrm{d}x^i}$$

où dans la présentation classique, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\overrightarrow{e_i}$ et le second membre s'appelle *circulation* du gradient entre A et B.

Remarque 1 : une conséquence cachée de ce théorème est que la circulation d'un gradient entre deux points est indépendante du choix de l'arc qui les réunit.

Remarque 2 : dans la théorie de l'algèbre extérieure que l'on vous épargne, le gradient (forme différentielle d'ordre 1) est la *différentielle extérieure* de la fonction (forme différentielle d'ordre 0) ; on peut noter $\mathrm{d}f$ le gradient de coefficients $\mathrm{d}f_i = \partial_i\, f$ et par ailleurs cette même théorie appelle l'ensemble du point A affecté du signe positif et du point B du signe négatif la *frontière* de l'arc Γ.

3.c Rotationnel.

• Théorème de Stokes.

La démonstration qui suit nécessite beaucoup de minutie ; on pardonnera au lecteur qui veut la passer et en admettre le résultat mais je ne me serais pas pardonné d'en avoir privé le lecteur intéressé.

Soit dans l'espace un contour fermé Γ quelconque, pas forcément plan, limitant une surface Σ quelconque ; considérons que le contour soit divisé en quatre arcs limités par quatre points A, B, C et D dans cet ordre. On peut imaginer un déplacement progressif de l'arc AB l'amenant sur l'arc DC par une succession d'arcs intermédiaires d'origine sur AD et d'extrémités sur BC et dont les points intermédiaires appartiennent à la surface choisie et de même un déplacement progressif de l'arc AD l'amenant sur l'arc BC par une succession d'arcs intermédiaires d'origine sur AB et d'extrémités sur DC et dont les points intermédiaires appartiennent à la surface. La figure 1 p. 23 (purement schématique : aux points A, B, C et D, la courbe ne fait pas forcément un coude) illustre ce point de vue et trace deux positions successives pour chacun des déplacements. On y voit un arc élémentaire MM' de AB qui se déplace vers l'arc NN' de DC en passant par deux positions intermédiaires infiniment proches PP' et QQ'.

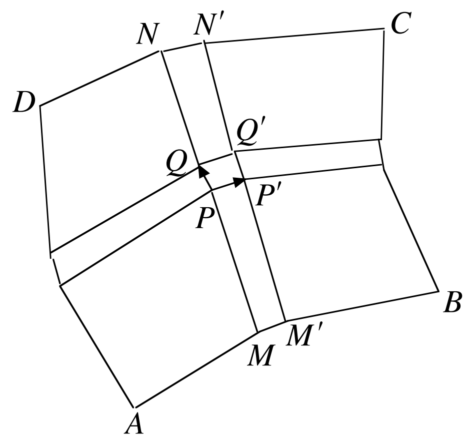

Figure 1 – Circulation sur un contour fermé.

Soit une forme différentielle d'ordre 1 notée $v_i(M)\,\mathrm{d}x^i$. On veut calculer la différence de sa circulation entre A et B d'une part et C et D d'autre part. Nous ne cherchons pas ici le summum de la rigueur mais le summum de la lisibilité et l'on va écrire :

$$\int_D^C v_i(M)\,\mathrm{d}x^i - \int_A^B v_i(M)\,\mathrm{d}x^i = \int_D^C v_i(M)\,NN'^i - \int_A^B v_i(N)\,MM'^i = \cdots$$

$$\cdots = \int \Big(v_i(N)\,NN'^i - v_i(M)\,MM'^i \Big)$$

en regroupant deux par deux les éléments qui se correspondent dans le déplacement de AB vers DC

Le terme entre parenthèses peut être obtenu par sommation de termes de la forme $v_i(Q)\,QQ'^i - v_i(P)\,PP'^i$ où PP' et QQ' sont les positions infiniment proches par où est passé MM'.

En s'inspirant de la façon dont on a introduit le gradient on peut écrire, pour chaque valeur de l'indice i, $v_i(Q) = v_i(P) + \partial_j\, v_i\, PQ^j$ et l'on peut écrire aussi $QQ'^i = PP'^i + [QQ'^i - PP'^i]$. Si l'on reporte ces deux expressions dans $v_i(Q)\,QQ'^i$, on tire, en négligeant le produit des termes correctifs (du second ordre) :

$$v_i(Q)\,QQ'^i - v_i(P)\,PP'^i = \partial_j\, v_i\, PQ^j\, PP'^i + v_i(P)\,[QQ'^i - PP'^i]$$

Finalement, on peut écrire :

$$\int_D^C v_i(M)\,\mathrm{d}x^i - \int_A^B v_i(M)\,\mathrm{d}x^i = \int_A^B \int_M^N \partial_j\, v_i\, QP^j\, QQ'^i + \int_A^B \int_M^N v_i(P)\,[QQ'^i - PP'^i]$$

En orientant, comme sur la figure positivement, les vecteurs PP' rebaptisés $\mathrm{d}x$ de A vers B et les vecteurs PQ rebaptisés $\mathrm{d}y$ de A vers D , on peut réécrire finalement, sans toucher au second terme du second membre :

$$\int_D^C v_i(M)\,\mathrm{d}x^i - \int_A^B v_i(M)\,\mathrm{d}x^i = \iint_\Sigma \partial_j\, v_i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}x^i + \iint_\Sigma v_i(P)\,[QQ'^i - PP'^i]$$

et même, en permutant les bornes de la première intégrale du premier membre :

$$-\int_C^D v_i(M)\,\mathrm{d}x^i - \int_A^B v_i(M)\,\mathrm{d}x^i = \iint_\Sigma \partial_j\, v_i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}x^i + \iint_\Sigma v_i(P)\,[QQ'^i - PP'^i]$$

Par un raisonnement symétrique (permutation du rôle des $\mathrm{d}x = \overrightarrow{PP'}$ et $\mathrm{d}y = \overrightarrow{PQ}$, de AB et AD, de BC et DC, etc.) qu'on ne détaille pas, on arrive à :

$$\int_B^C v_j(M)\,\mathrm{d}y^j - \int_A^D v_j(M)\,\mathrm{d}y^j = \iint_\Sigma \partial_i\, v_j\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j + \iint_\Sigma v_i(P)\,[P'Q'^i - PQ^i]$$

soit en permutant les bornes de la seconde intégrale du premier membre et en changeant dans ce premier membre le nom purement arbitraire du vecteur élémentaire et le nom de l'indice muet :

$$\int_B^C v_i(M)\,\mathrm{d}x^i + \int_D^A v_i(M)\,\mathrm{d}x^i = \iint_\Sigma \partial_i\, v_j\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j + \iint_\Sigma v_i(P)\,[P'Q'^i - PQ^i]$$

Remarquons enfin que :

$$\overrightarrow{P'Q'} - \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{QP'}) - (\overrightarrow{P'Q} - \overrightarrow{P'P}) = \cdots = \overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{PP'}$$

d'où l'on déduit que :

$$\iint_\Sigma v_i(P)\,[QQ'^i - PP'^i] = \iint_\Sigma v_i(P)\,[P'Q'^i - PQ^i]$$

et par soustraction des deux résultats partiels :

$$\int_A^B v_i(M)\,\mathrm{d}x^i + \int_B^C v_i(M)\,\mathrm{d}x^i + \int_C^D v_i(M)\,\mathrm{d}x^i + \int_D^A v_i(M)\,\mathrm{d}x^i = \cdots$$
$$\cdots = \iint_\Sigma \partial_i\, v_j\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j - \iint_\Sigma \partial_j\, v_i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}x^i$$

Le quatre termes du premier membre reconstituent le contour Γ orienté, c'est-à-dire parcouru dans un sens précis, ici $ABCD$, on peut donc résumer le résultat qui est la formulation tensorielle, brute de décoffrage, du *théorème de* S*TOKES* :

$$\boxed{\int_\Gamma v_i\,\mathrm{d}x^i = \iint_\Sigma (\partial_i\, v_j - \partial_j\, v_i)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j}$$

• **Lien avec la notion de flux.**

Le théorème de STOKES passe de l'intégrale ou circulation d'une forme différentielle v_i d'ordre 1 sur une courbe fermée à l'intégrale d'une forme différentielle d'ordre 2 de coefficients $\partial_i\, v_j - \partial_j\, v_i$ sur la surface dont elle est la frontière. Cette forme est [5] la *différentielle extérieure* de la première que l'on peut noter $\mathrm{d}v$ d'où $\mathrm{d}v_{ij} = \partial_i\, v_j - \partial_j\, v_i$ et on l'appelle *rotationnel* de v.

Cette forme est manifestement anti-symétrique ; si l'on regroupe par paire les termes non nuls, on a par exemple :

$$\mathrm{d}v(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\partial_1\, v_2 - \partial_2\, v_1)\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}y^2 + (\partial_2\, v_1 - \partial_1\, v_2)\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^1 + \cdots = \cdots$$
$$\cdots = (\partial_1\, v_2 - \partial_2\, v_1)\,(\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^1) + \cdots$$

qui met en évidence l'une des composantes du produit vectoriel $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ qui est le vecteur surface élémentaire (cf supra) lorsque l'on quitte le monde cohérent de l'algèbre extérieure pour revenir à un équivalent vectoriel.

Formalisons les choses : le produit vectoriel $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = {\varepsilon_{ij}}^k\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,e_k$ a pour composantes $\mathrm{d}S^k = {\varepsilon_{ij}}^k\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j$ et introduisons une forme d'ordre 1 notée r de coefficients $r_k = {\varepsilon^{lm}}_k\,\partial_l v_m$. En prenant une feuille de papier et un crayon, sachant que les seuls ${\varepsilon_{ij}}^1$ non nuls sont ${\varepsilon_{23}}^1 = 1$ et ${\varepsilon_{32}}^1 = -1$ et de même pour les ${\varepsilon^{ij}}_1$, on a :

$$r_1\,\mathrm{d}S^1 = (\partial_2\, v_3 - \partial_3\, v_2)\,(\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^3 - \mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}y^2)$$

5. La vraie définition relève de l'algèbre extérieure ; mais mon affirmation est raisonnable.

d'où par sommation :

$$r_k \, \mathrm{d}S^k = (\partial_i \, v_j - \partial_j \, v_i) \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}y^j$$

La forme d'ordre 1 notée r de coefficients $r_k = \varepsilon^{lm}{}_k \, \partial_l v_m$ est appelée rotationnel (redéfinition pratique qui reformule la définition initiale) de la forme v. On rappelle (cf supra) que l'on peut établir une bijection entre vecteurs et formes linéaires et qu'avec une base orthonormée, il y a identification numérique des coefficients, ce qui permet l'abus de langage de la présentation classique. On identifie l'intégrale de la première forme comme la circulation d'un vecteur sur le contour, c'est-à-dire l'intégrale du produit scalaire du vecteur associé à la forme par le déplacement élémentaire sur le contour. On identifie l'intégrale de la seconde forme comme le *flux* d'un vecteur sur la surface, c'est-à-dire l'intégrale du produit scalaire du vecteur associé à la forme par la surface élémentaire.

Remarque 1 : La démonstration oriente de façon positive la surface dans le sens du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ qui donne la célèbre loi du tire-bouchon : on tourne celui-ci dans le sens de parcours du circuit et il progresse dans le sens positif associé de la surface.

Remarque 2 : $\varGamma$ est la frontière $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ du domaine d'intégration orienté $\mathcal{D}$ qu'est la surface $\varSigma$; de même que pour le gradient le point A compté négativement et le point B positivement forment la frontière $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ du domaine d'intégration orienté $\mathcal{D}$ qu'est l'arc AB. En notant ω une forme et $\mathrm{d}\omega$ sa différentielle extérieure ; on a montré pour le gradient et pour le rotationnel que :

$$\int_{\mathcal{F}(\mathcal{D})} \omega = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\omega$$

on le montrera aussi pour la divergence et à trois dimensions, on ne peut aller plus loin.

En mécanique relativiste en formalisme quadri-dimensionnel, on aura quatre théorèmes de ce type. En mathématiques, n théorèmes dans un espace à n dimensions, pas plus car on gère des formes différentielles totalement antisymétriques ce qui interdit, sous peine de nullité de tous les coefficients d'avoir plus d'arguments que de dimensions à l'espace.

Tout ça pour dire que l'algèbre extérieure, c'est beau à pleurer.

Remarque 3 : si v est la différentielle extérieure d'une forme d'ordre 0 c'est-à-dire le gradient d'une fonction f, alors (cf supra) : $v = \mathrm{d}f$ et $v_i = \partial_i \, f$ d'où :

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}^2 f = \partial_i \, v_j - \partial_j \, v_i = \partial^2_{ij} \, f - \partial^2_{ji} \, f = 0$$

en notant par exemple $\partial^2_{ij} \, f$ la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ et en utilisant de théorème de Schwartz qui affirme que l'ordre de dérivations partielles ne modifie pas le résultat, tout au moins pour des fonctions à dérivées secondes continues, ce qui est souvent le cas en physique. Les mathématiciens généralisent cette remarque : l'application successive de la différentielle extérieure conduit à un résultat nul. On le retrouvera avec la divergence.

3.d Divergence.

La démonstration est de la même étoffe que pour le rotationnel en un peu plus compliqué pour la gestion des termes parasites qui se sont miraculeusement éliminés par soustraction. Le lecteur a eu l'obligence de suivre la première démonstration et la courtoisie la plus élémentaire n'impose de ne pas lui en infliger une seconde [6] qui lui ressemble. On donnera juste le contexte, à savoir le domaine d'intégration et sa frontière orientée.

On choisit une surface fermée Σ d'intérieur Ω ; on découpe la surface en six morceaux : une calotte en haut et une en bas et une zone latérale divisée en quatre parties, à gauche et à droite, en avant et en arrière. On calcule la différence de flux d'un « vecteur » à travers les calottes du haut et du bas, orientées vers le haut que l'on considérera comme somme de différences élémentaires dans un déplacement de la surface du bas vers celle du haut puis, en fin de calcul on changera l'orientation de celle du bas. On procède de même pour les deux autres couples de surfaces, gauche-droit et derrière-devant.

En présentation tensorielle, le flux est (cf supra) une forme différentielle d'ordre deux antisymétrique, notée ici v_{ij} et l'on arrive en fin de calcul, avec Σ orientée vers l'extérieur et les volumes élémentaires de Ω comptés positivement, à la formulation tensorielle, brute de décoffrage, du *théorème de* GREEN-OSTROGRADSKI :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} v_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,dy^j = \iiint_{\Omega} (\partial_i\,v_{jk} + \partial_j\,v_{ki} + \partial_k\,v_{ij})\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k}$$

Le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI passe du flux d'une forme différentielle antisymétrique v_{ij} d'ordre 2 sur une surface fermée à l'intégrale d'une forme différentielle (on verra plus loin qu'elle est totalement antisymétrique) d'ordre 3 dont les coefficients sont $\partial_i\,v_{jk} + \partial_j\,v_{ki} + \partial_k\,v_{ij}$ sur le volume dont elle est la frontière. Cette forme est [7] la *différentielle extérieure* de la première que l'on peut noter $\mathrm{d}v$ d'où $\mathrm{d}v_{ijk} = \partial_i\,v_{jk} + \partial_j\,v_{ki} + \partial_k\,v_{ij}$ et on l'appelle *divergence* de v.

Si deux des trois indices ijk sont égaux, on obtient un résultat nul ; prenons l'exemple de 211, le coefficient est :

$$\mathrm{d}v_{211} = \partial_2\,v_{11} + \partial_1\,v_{12} + \partial_1\,v_{21} = \partial_2\,v_{11} + \partial_1\,(v_{12} + v_{21})$$

où, puisque v_{ij} est antisymétrique $v_{11} = 0$ et $v_{12} + v_{21} = 0$, on a bien un résultat nul. De même on vérifie aisément que $\mathrm{d}v_{ijk} = \pm\mathrm{d}v_{123}$ selon que ijk est une permutation paire de 123, d'où $\mathrm{d}v_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\,\mathrm{d}v_{123}$. Par ailleurs, le volume élémentaire est, rappelons-le, $\mathrm{d}V = \varepsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k$. Le second membre du théorème peut-être réécrit ainsi :

$$\iiint_{\Omega} (\partial_i\,v_{jk} + \partial_j\,v_{ki} + \partial_k\,v_{ij})\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v_{123}\,\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}y^j\,\mathrm{d}z^k = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v_{123}\,\mathrm{d}V$$

6. Il y a des limites au « bis repetita placent ».
7. La vraie définition relève de l'algèbre extérieure ; mais mon affirmation est raisonnable.

Le premier membre du théorème (par analogie avec ce qui a été dit pour l'interprétation du rotationnel en terme de flux) peut être écrit $v_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,dy^j = v_{23}\,(\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^3 - \mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}y^2) + \cdots$ soit encore $W_1\,\mathrm{d}S^1 + \cdots$ avec $W_1 = v_{23}$, $W_2 = v_{31}$ et $W_3 = v_{12}$. L'interprétation classique de la divergence est donc bien $\mathrm{d}v_{123} = \partial_1\,W_1 + \partial_2\,W_2 + \partial_3\,W_3$.

Remarque : si v_{ij} est la différentielle extérieure, donc le rotationnel, de u_i c'est-à-dire que $v_{ij} = \partial_i\,u_j - \partial_i\,u_j$, alors sa différentielle extérieure, donc sa divergence, a pour coefficients :

$$\partial_i\,v_{jk} + \partial_j\,v_{ki} + \partial_k\,v_{ij} = (\partial^2_{ij}\,u_k - \partial^2_{ik}\,u_j) + (\partial^2_{jk}\,u_i - \partial^2_{ji}\,u_k) + (\partial^2_{ki}\,u_j - \partial^2_{kj}\,u_i) = 0$$

dont les termes s'annulent deux à deux avec le théorème de Schwartz. On retrouve le théorème qui affirme que l'application successive de la différentielle extérieure est nulle.

3.e Bilan de cette présentation de l'analyse vectorielle.

Nous n'avons pas raisonné explicitement dans le cadre de l'algèbre extérieure, mais celle-ci est sous-jacente dans les notions de surface et volume élémentaire. Trois théorèmes fondamentaux ont été écrits sous une forme unique :

$$\int_{\mathcal{F}(\mathcal{D})} \omega = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\omega$$

et deux sous la forme $d^2 v = 0$.

Toutefois leurs démonstrations, bien que ressemblantes, diffèrent dans le détail et leur exploitation s'est faite au cas par cas. Seul le cadre de l'algèbre extérieure permet une démonstration unique. J'y ai renoncé car on se serait trop écarté des habitudes de pensée en physique. J'espère que ma présentation sera un compromis accessible.

4 Utilisation pratique de l'analyse vectorielle.

La partie précédente justifie les conclusions pratiques qui sont présentées ci-dessous de façon classique en une sorte de vade-mecum.

4.a Champs et opérateurs

Faisons simple : un champ est une fonction du point M et du temps t, ses valeurs peuvent être scalaires ou vectorielles (à 3 dimensions, bien sûr) ; selon le cas on dit avoir affaire à un champ scalaire ou vectoriel. Quelques exemples : les champs de pression et de température dans l'atmosphère, les champs électriques et magnétiques créés par des charges et des courants, etc.

Un champ qui ne dépend pas de M est dit uniforme et un champ qui ne dépend pas de t est dit stationnaire ou permanent.

Un opérateur transforme un champ en un autre champ : par exemple l'opérateur dérivée temporelle $\partial/\partial t$ qui au champ $f(M,t)$ associe le champ $\partial f/\partial t$.

4.b Gradient d'un champ scalaire

A un champ scalaire $f(x,y,z,t)$, l'opérateur gradient associe un champ vectoriel dont l'expression est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

où $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont les vecteurs de base du repère.

On introduit parfois le vecteur symbolique *nabla*, défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

alors on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$; on n'y verra pas autre chose qu'une notation pense-bête.

Une propriété importante du gradient est la suivante : soit une courbe orientée AB découpée en éléments infinitésimaux notés $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ (cf figure 2 p. 29), on a :

$$\boxed{f(B) - f(A) = \int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{\mathrm{d}l}}$$

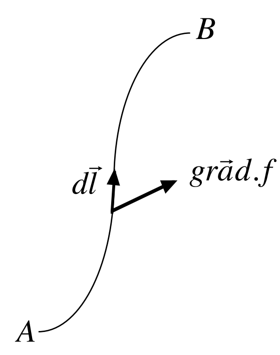

Figure 2 – Propriété fondamentale du gradient.

En corollaire la différentielle de f *stationnaire* est $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{\mathrm{d}l}$; pour f non stationnaire, il faut y rajouter $\partial f/\partial t.\mathrm{d}t$

On en déduit classiquement que le gradient d'un potentiel f est orthogonal à la surface équipotentielle ; en effet un déplacement quelconque $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ sur la surface conduit à une variation $\mathrm{d}f$ nulle.

4.c Rotationnel d'un champ vectoriel

A un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(x,y,z,t) = V_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + V_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + V_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

l'opérateur rotationnel associe un autre champ vectoriel dont l'expression est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Avec le vecteur *nabla*, la notation pense-bête est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$

Un théorème très important : le théorème de STOKES. Soit une courbe fermée orientée Γ découpée en éléments infinitésimaux notés $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ et une surface Σ, de contour Γ, découpée en surfaces élémentaires auxquelles on associe des vecteurs surfaces $\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ normaux, orientés par la règle du tire-bouchon à partir du sens de parcours de Γ, et de norme égale à l'aire de la surface élémentaire (cf figure 3 p. 30), alors on a :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}}$$

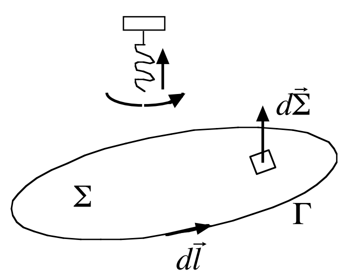

FIGURE 3 – Théorème de Stokes.

Remarque : $\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ s'appelle *circulation* de $\overrightarrow{V}$ le long de Γ et $\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ le *flux* de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}$ à travers Σ. On note en physique $\oint_{\Gamma}$ avec un petit rond pour insister sur le fait que la courbe Γ est fermée

4.d Divergence d'un champ vectoriel

A un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(x,y,z,t) = V_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + V_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + V_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

l'opérateur divergence associe un champ scalaire dont l'expression est :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Avec le vecteur *nabla*, la notation pense-bête est $\mathrm{div}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V}$

Un théorème très important : le théorème de Green-Ostrogradski. Soit un volume Ω découpé en volumes élémentaires $\mathrm{d}\Omega$ et limité par une surface fermée Σ découpée en surfaces élémentaires auxquelles on associe des vecteurs surfaces $\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ normaux, orientés vers l'extérieur et de norme égale à l'aire de la surface élémentaire (voir la figure 4 p. 31), alors on a :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\overrightarrow{V}\,\mathrm{d}\Omega}$$

Rappel : $\Phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ s'appelle *flux* de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ. On note en physique $\oiint_{\Sigma}$ avec un petit rond pour insister sur le fait que la surface Σ est fermée

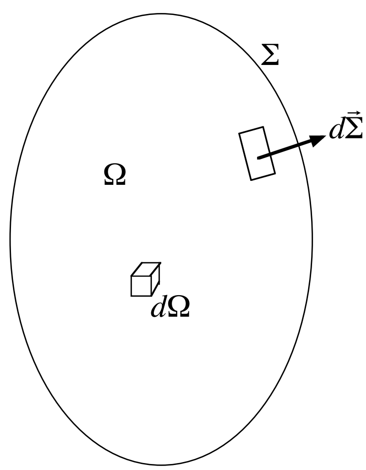

Figure 4 – Théorème de Green-Ostrogradski.

Trois conséquences primordiales pour les champs à divergence nulle (cf figure 5 p. 32 pour les deux derniers cas) qui expliquent pourquoi on les appelle aussi *champs à flux conservatif* :

- Le flux d'un tel champ à travers une surface fermée est nul.
- Soient deux surfaces ouvertes Σ_1 et Σ_2 de même contour Γ, orientées toutes deux dans le même sens par la règle du tire-bouchon. Notons $\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ et de même $\Phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$. Si l'on change l'orientation de Σ_2 donc le signe de Φ_2 et si l'on forme une surface fermée orientée vers l'extérieur, on a $\Phi_1 - \Phi_2 = 0$ donc les deux surfaces sont traversées par le même flux (cf figure de gauche) ; on pourra donc, dans ce cas, parler de flux à travers un contour, Γ dans notre exemple.
- Soit un tube de champ limité par deux surfaces Σ_1 et Σ_2, orientées dans le sens du tube (cf figure de droite). Le même type de démonstration, compte tenu que sur la surface latérale, le flux est nul (vecteur tangent au tube donc orthogonal au vecteur surface), aboutit à la même conclusion : l'égalité des flux. On en déduira en particulier que si le tube s'évase, sa surface augmente, donc, à flux constant, le module du champ diminue.

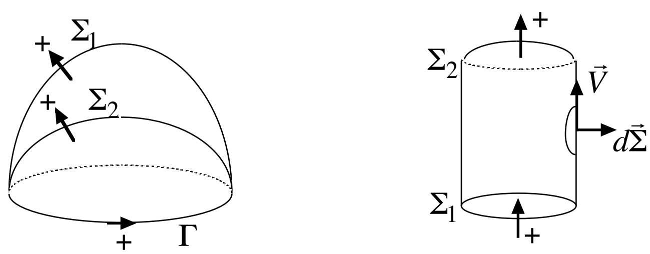

FIGURE 5 – Flux conservatif.

4.e Laplacien d'un champ.

A un champ scalaire $f(x, y, z, t)$, l'opérateur laplacien, noté Δ associe un champ scalaire dont l'expression est :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On lit « laplacien f ».

On remarque rapidement que $\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$.

A un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(x, y, z, t) = V_x(x, y, z, t)\,\overrightarrow{e_x} + V_y(x, y, z, t)\,\overrightarrow{e_y} + V_z(x, y, z, t)\,\overrightarrow{e_z}$$

l'opérateur laplacien associe un autre champ vectoriel dont l'expression est :

$$\Delta\overrightarrow{V} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial z^2}$$

de composantes ΔV_x, ΔV_y et ΔV_z.

Dans le même esprit, à partir d'un champ vectoriel

$$\overrightarrow{A}(x,y,z,t) = A_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + A_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + A_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

et du vecteur formel nabla, on forme l'opérateur appelé « A scalaire nabla » ou « A scalaire gradient » et noté $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}$ ou $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, défini par

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}} = A_x\,\frac{\partial}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Appliqué à un champ scalaire f, il donne :

$$(\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\,)\,f = (\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\,f = A_x\,\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

On reconnaît aisément que :

$$(\,\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla}\,)\,f = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$$

Appliqué à un vecteur $\overrightarrow{V}$, il donne :

$$(\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\,)\,\overrightarrow{V} = (\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\,\overrightarrow{V} = A_x\,\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}$$

Un cas particulier s'observe quand $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{V}$ sont le même champ ; on démontre [8] alors une formule qui servira beaucoup en mécanique des fluides :

$$(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}$$

Remarque : Les deux opérateurs dont nous venons de parler n'ont pas été construits de façon tensorielle. On peut leur donner une définition à base de gradient, rotationnel et divergence. S'il sont appliqués à un champ scalaire, on vient de voir que :

$$\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)$$

$$(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})f = \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$$

et s'ils sont appliqués à un vecteur... on verra un peu plus loin, au sein du formulaire (en deux endroits).

8. Il suffit de détailler l'expression des deux membres et de vérifier qu'elles sont égales. Rien de bien sorcier.

4.f Théorèmes dérivés.

Il s'agit de corollaires des théorèmes fondamentaux.

• Théorème du gradient.

Appliquons le théorème de Green-Ostrogradski au champ $f\,\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est uniforme :

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} f\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(f\,\overrightarrow{u})\,\mathrm{d}\Omega$$

d'où en développant (voir formulaire ci-dessous) $\mathrm{div}(f\,\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u = 0$ car $\overrightarrow{u}$ est uniforme :

$$\overrightarrow{u}\cdot\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \overrightarrow{u}\cdot\iiint_{\Omega}\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\,\mathrm{d}\Omega$$

comme ce doit être vrai quelque soit $\overrightarrow{u}$, on en déduit le *théorème du gradient* :

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \iiint_{\Omega}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,\mathrm{d}\Omega}$$

Un corollaire important est obtenu en choisissant f uniforme et égal à l'unité :

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \overrightarrow{0}$$

Le vecteur surface d'une surface fermée est nul ; on en déduit aussi que deux surfaces de même contour et orientées par la règle du tire-bouchon (s'inspirer des propriétés des champs à flux conservatif, cf paragraphe sur la divergence) ont même vecteur surface, ce qui permet parfois [9] de remplacer une surface par une autre de même contour et de géométrie plus simple pour le calcul du vecteur surface.

• Théorème du rotationnel.

Appliquons le théorème de Green-Ostrogradski au champ $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{u}$ est uniforme :

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{V})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \iiint_{\Omega}\mathrm{div}(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{V})\,\mathrm{d}\Omega$$

d'où en développant (voir formulaire ci-dessous) $\mathrm{div}(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{V})$ avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u} = 0$ car $\overrightarrow{u}$ est uniforme et en utilisant les propriétés du produit mixte au premier membre :

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{V}\wedge\mathrm{d}\Sigma) = -\iiint_{\Omega}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}\,\mathrm{d}\Omega$$

9. par exemple pour calculer le bilan des forces dues à une pression uniforme sur une demi-sphère comme dans l'expérience dite de Magdebourg.

$$\vec{u}\cdot \oiint_{\Sigma} \vec{V}\wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = -\vec{u}\cdot \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\Omega$$

comme ce doit être vrai quelque soit $\vec{u}$, on en déduit le *théorème du rotationnel* :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{V}\wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = -\iiint_{\Omega} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\Omega}$$

Remarque importante : Attention au signe !

- **Théorème de Kelvin.**

Appliquons le théorème de STOKES au champ $f\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est uniforme :

$$\oint_{\Gamma} (f\,\vec{u})\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\,\vec{u})\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$$

d'où en développant (voir formulaire ci-dessous) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\,\vec{u})$ avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}=0$ car $\vec{u}$ est uniforme puis en utilisant les propriétés du produit mixte :

$$\vec{u}\cdot \oint_{\Gamma} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\wedge \vec{u})\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$$

$$\vec{u}\cdot \oint_{\Gamma} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\vec{u}\cdot \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$$

comme ce doit être vrai quelque soit $\vec{u}$, on en déduit le *théorème (ou formule) de* KELVIN[10] :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\wedge \overrightarrow{\mathrm{d}}\,\Sigma}$$

Remarque importante : Attention au signe !

- **Les théorèmes manquants.**

On peut rêver d'appliquer le théorème de STOKES au champ $\vec{V}\wedge\vec{u}$, où $\vec{u}$ est uniforme, pour trouver un théorème concernant $\oint \vec{V}\wedge\overrightarrow{\mathrm{d}l}$; hélas, les calculs ne mènent à rien.

On peut rêver d'appliquer le théorème $f(B)-f(A)=\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ au champ $\vec{V}\cdot\vec{u}$, où $\vec{u}$ est uniforme, pour trouver un théorème concernant $\vec{V}(B)-\vec{V}(A)$; trois fois hélas, les calculs ne mènent à rien.

10. tout au moins en mathématiques car il existe un théorème de Kelvin en mécanique des fluides bien plus connu des physiciens.

On vient d'épuiser le champ des possibles concernant ce genre d'intégrales, passons à autre chose.

4.g Composition d'opérateurs et autres formules.

Pour démontrer les formules qui suivent, il suffit de détailler l'expression des deux membres et de vérifier qu'elles sont égales. Ce n'est pas assez palpitant pour figurer ici.

• Composition de deux opérateurs.

Les seules combinaisons que l'on puisse obtenir sont celles qui figurent ci-dessous :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \overrightarrow{0}$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V}) = 0$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \Delta f$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\, \overrightarrow{V}) - \Delta \overrightarrow{V}$$

la dernière formule peut servir dans un sens ou l'autre pour transformer le rotationnel d'un rotationnel ou le gradient d'une divergence. Elle peut aussi servir à une définition tensorielle du laplacien vectoriel : $\Delta \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\, \overrightarrow{V}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V})$

Les deux premières formules admettent une réciproque[11] :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \exists f : \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$$

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{W} = 0 \;\Rightarrow\; \exists \overrightarrow{V} : \overrightarrow{W} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V}$$

Dans le premier cas on dit que $\overrightarrow{V}$ dérive du potentiel (sous-entendu scalaire) f et dans le second que $\overrightarrow{W}$ dérive du potentiel-vecteur $\overrightarrow{V}$.

• Formules utiles.

Il s'agit de formules où un opérateur porte sur un produit de champs scalaires (f, g) ou vectoriels ($\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$) ; les seules combinaisons que l'on puisse obtenir sont celles qui figurent ci-dessous :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f\,g) = f\; \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g\; \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$$

$$\mathrm{div}(f\, \overrightarrow{V}) = f\; \mathrm{div}\, \overrightarrow{V} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \cdot \overrightarrow{V}$$

11. Nous l'admettrons.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\,\overrightarrow{V}) = f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) \wedge \overrightarrow{V}$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}) \cdot \overrightarrow{W} - (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{W}) \cdot \overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = (\mathrm{div}\,\overrightarrow{W})\,\overrightarrow{V} + (\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{V} - (\mathrm{div}\,\overrightarrow{V})\,\overrightarrow{W} - (\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{W}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}) = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{W} + (\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} + (\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{V}$$

Lorsque l'on connaît les expressions des deux champs en fonctions des coordonnées, un calcul direct du premier membre est souvent plus rapide que l'utilisation de ces formules qui ont donc surtout un usage théorique. La seconde et la troisième sont très souvent utilisées parce que leurs seconds membres sont simples ; il est rentable de les mémoriser d'autant plus qu'elles se ressemblent et qu'en apprendre une, c'est pratiquement apprendre l'autre. Les autres sont d'un usage moins courant et leur mémorisation est problématique à cause des anti-symétries ; il n'y aura pas de honte à aller les chercher dans un formulaire.

Remarque 1 : si l'on utilise la dernière formule dans le cas particulier où $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}$, on retrouve une formule annoncée plus haut (cf « A scalaire gradient ») :

$$(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}$$

Remarque 2 : la différence des deux dernières formules permet une définition tensorielle de l'opérateur « V scalaire gradient » :

$$2\,(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) + (\mathrm{div}\,\overrightarrow{W})\,\overrightarrow{V} - (\mathrm{div}\,\overrightarrow{V})\,\overrightarrow{W} - \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{-}\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}$$

4.h Dérivées temporelles

Les fonctions rencontrées en physique sont assez agréables pour vérifier les hypothèses des théorèmes mathématiques, en particulier le théorème de SCHWARTZ qui indique que les dérivées secondes ne dépendent pas de l'ordre des dérivations, en particulier, on peut permuter dérivée temporelle et dérivées spatiales cachées dans les gradients, divergences, rotationnels, etc. d'où des théorèmes du style :

$$\mathrm{div} \left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathrm{div} \overrightarrow{V} \right)$$

et tout ce qu'on peut imaginer dans ce genre.

De même on peut [12] permuter dérivée temporelle et intégration dans l'espace, *pourvu que le domaine d'intégration soit invariant dans le temps* ; on aura, par exemple :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\Omega} f\,\mathrm{d}\Omega$$

12. On admettra cette affirmation.

et tout ce qu'on peut imaginer dans ce genre.

On remarquera que l'intégrale sur Ω de f ne dépend plus que du temps d'où une dérivée droite pour les puristes.

5 Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques et sphériques.

5.a Coordonnées cylindriques et sphériques.

• Coordonnées cylindriques.

Elles sont définies à partir d'un repère cartésien $Oxyz$ dont l'axe Oz est privilégié. Pour repérer un point M, on commence par tracer son *plan méridien*, c'est-à-dire le plan passant par Oz et le point M, il contient la projection H de M sur Oz et N projection de M sur xOy puis on donne $r = \|\overrightarrow{ON}\|$, $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON})$ et $z = \overline{OH}$.

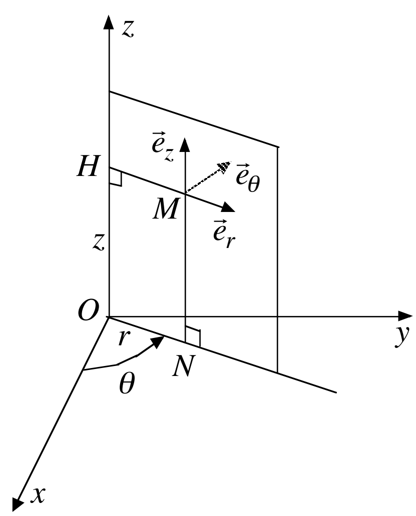

FIGURE 6 – Coordonnées cylindriques.

Un vecteur dépendant du point M (un champ donc) est projeté sur une *base locale*, orthonormée directe, constitué des vecteurs unitaires suivants :
– $\overrightarrow{e_r}$, vecteur unitaire de $\overrightarrow{HM}$
– $\overrightarrow{e_\theta}$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans un plan parallèle à xOy
– $\overrightarrow{e_z}$

Le tout et résumé par la figure 6 p. 38.

• **Coordonnées sphériques.**

Dans le même contexte, le point M est repéré par $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ et $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON})$.

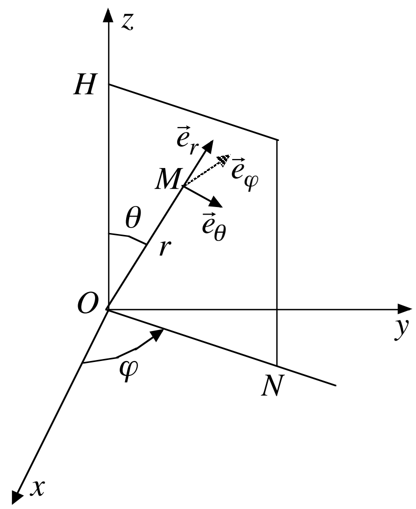

FIGURE 7 – Coordonnées sphériques.

On retrouve l'approche des géographes (latitude et longitude). Notez que le θ des cylindriques est devenu le φ des sphériques.

La base locale orthonormée directe est ici :
– $\overrightarrow{e_r}$, vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$
– $\overrightarrow{e_\theta}$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans le plan méridien
– $\overrightarrow{e_\varphi}$, identique au $\overrightarrow{e_\theta}$ des cylindriques

Le tout et résumé par la figure 7 p. 39.

5.b Méthodologie.

Si l'on ne cherche dans ce chapitre qu'un formulaire, on peut sauter le paragraphe 5 b.

On a vu plus haut (approche théorique du gradient) que la formulation tensorielle des opérateurs d'analyse vectorielle n'est pas compatible avec l'emploi de bases locales. En fait, on peut contourner la difficulté en remplaçant la dérivation partielle par une *dérivation covariante* mais nous n'en parlerons que quand ce sera absolument utile, c'est-à-dire quand nous aborderons — modestement — la relativité générale.

Il est hors de question d'apprendre par cœur l'expression des gradient, divergence, rotationnel et laplacien en coordonnées polaires. Si l'on en a besoin, on trouve aisément un formulaire qui les fournisse. Toutefois, il peut être intéressant de savoir comment les démontrer : on finit toujours par s'ennuyer sur une plage, si idyllique soit-elle ; rien de tel alors que de faire de la physique en écrivant sur le sable avec un bout de roseau. L'idée de partir des formules en repère cartésien puis de faire un changement de variables conduit à des calculs complexes et difficiles à maîtriser. Un usage raisonné des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski permet de contourner la difficulté.

• Mise en place.

Plaçons-nous dans un contexte général où un point M, ou encore le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, est repéré par un système de trois coordonnées ξ_1, ξ_2 et ξ_3. Un déplacement élémentaire est :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_i$$

Pour chacune des dérivées partielles, nous introduirons son vecteur unitaire $\overrightarrow{e_i}$ et sa norme a_i, d'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \sum_i a_i\,\mathrm{d}\xi_i\,\overrightarrow{e_i}$$

Pour identifier les a_i et les $\overrightarrow{e_i}$, en général il suffit d'imaginer trois mouvements élémentaires dans lesquels seul un des paramètres varie d'un infiniment petit puis un minimum de géométrie suffit pour conclure (cf infra).

Les systèmes de coordonnées intéressants sont ceux pour lesquels la base locale formée par les $\overrightarrow{e_i}$ est orthonormée (on classe alors ces trois vecteurs de façon qu'elle soit directe dans l'ordre 123). C'est ce que nous supposerons par la suite.

Remarquons avant d'aller plus loin qu'a priori les a_i dépendent des ξ_i.

• Gradient.

Appelons G_i les composantes sur la base locale du gradient d'un champ scalaire f. On sait que $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ d'où :

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_i = \sum_i G_i\,a_i\,\mathrm{d}\xi_i$$

d'où, par identification :

$$\boxed{G_i = \frac{1}{a_i}\,\frac{\partial f}{\partial \xi_i}}$$

Facile, non ?

• **Rotationnel.**

Appelons V_i les composantes sur la base locale d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ et R_i celles de son rotationnel. Appliquons le théorème de Stokes à un quasi-carré élémentaire tracé sur une surface $\xi_1 = Cte$. Ses quatre sommets sont les points $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $B(\xi_1, \xi_2 + \mathrm{d}\xi_2, \xi_3)$, $C(\xi_1, \xi_2 + \mathrm{d}\xi_2, \xi_3 + \mathrm{d}\xi_3)$ et $D(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \mathrm{d}\xi_3)$, d'où les quatre cotés élémentaires sont $\overrightarrow{AB} = a_2\,\mathrm{d}\xi_2\,\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{BC} = a_3\,\mathrm{d}\xi_3\,\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{CD} = -a_2\,\mathrm{d}\xi_2\,\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{DA} = -a_3\,\mathrm{d}\xi_3\,\overrightarrow{e_3}$ et les quatre circulations de V sur les côtés sont respectivement $(a_2\,V_2)_{\xi_3}\,\mathrm{d}\xi_2$, $(a_3\,V_3)_{\xi_2+\mathrm{d}\xi_2}\,\mathrm{d}\xi_2$, $-(a_2\,V_2)_{\xi_3+\mathrm{d}\xi_3}\,\mathrm{d}\xi_2$ et $-(a_3\,V_3)_{\xi_2}\,\mathrm{d}\xi_2$ (on n'a pas oublié que les a_i dépendent de la position). En regroupant les termes deux à deux, un développement de Taylor donne une circulation totale :

$$\left[\frac{\partial(a_3\,V_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(a_2\,V_2)}{\partial\xi_3}\right]\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3$$

Quant au vecteur surface, c'est $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = a_2\,\mathrm{d}\xi_2\,a_3\,\mathrm{d}\xi_3\,\overrightarrow{e_1}$ donc le flux du rotationnel à travers la surface est :

$$R_1\,a_2\,\mathrm{d}\xi_2\,a_3\,\mathrm{d}\xi_3$$

Par identification, on en déduit, en effectuant ensuite les permutations circulaires sur les indices :

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{a_2\,a_3}\left[\frac{\partial(a_3\,V_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(a_2\,V_2)}{\partial\xi_3}\right]}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{1}{a_3\,a_1}\left[\frac{\partial(a_1\,V_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(a_3\,V_3)}{\partial\xi_1}\right]}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{1}{a_1\,a_2}\left[\frac{\partial(a_2\,V_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(a_1\,V_1)}{\partial\xi_2}\right]}$$

Et de deux !

• **Divergence.**

Appelons V_i les composantes sur la base locale d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ et notons D sa divergence. Appliquons le théorème de Green-Ostrogradski à un quasi-cube élémentaire de côtés $\mathrm{d}\xi_1$, $\mathrm{d}\xi_2$ et ξ_3. Le flux de $\overrightarrow{V}$ sur la face en $\xi_3 + \mathrm{d}\xi_3$ orientée vers l'extérieur, donc dans le sens des ξ_3 croissants est $(a_1\,a_2\,V_3)_{\xi_3+\mathrm{d}\xi_3}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$ et celui sur la face en ξ_3 orientée vers l'extérieur, donc dans le sens des ξ_3 décroissants est $-(a_1\,a_2\,V_3)_{\xi_3}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$; leur somme après un développement de Taylor est donc $\frac{\partial(a_1\,a_2\,V_3)}{\partial\xi_3}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3$ et par sommation sur les deux autres paires de faces donne pour flux total :

$$\left[\frac{\partial(a_2\,a_3\,V_1)}{\partial\xi_1}+\frac{\partial(a_3\,a_1\,V_2)}{\partial\xi_2}+\frac{\partial(a_1\,a_2\,V_3)}{\partial\xi_3}\right]\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3$$

L'intégrale (ramenée ici à un simple produit puisque le volume est élémentaire) de la divergence est :

$$D\,a_1\,\mathrm{d}\xi_1\,a_2\,\mathrm{d}\xi_2\,a_3\,\mathrm{d}\xi_3$$

Par identification, on en déduit :

$$\boxed{D=\frac{1}{a_1\,a_2\,a_3}\left[\frac{\partial(a_2\,a_3\,V_1)}{\partial\xi_1}+\frac{\partial(a_3\,a_1\,V_2)}{\partial\xi_2}+\frac{\partial(a_1\,a_2\,V_3)}{\partial\xi_3}\right]}$$

Et de trois !

• **Et pour terminer.**

Pour les autres opérateurs utiles, on se servira des relations établies plus haut :

$$\Delta f=\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)$$

$$(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})f=\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$$

$$\Delta\overrightarrow{V}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\overrightarrow{V})-\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V})$$

$$2\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{W}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{W})-\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{W})+(\mathrm{div}\,\overrightarrow{W})\,\overrightarrow{V}-(\mathrm{div}\,\overrightarrow{V})\,\overrightarrow{W}-\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{W}-(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{W}$$

Est-il utile de dire que l'on évite d'utiliser les coordonnées polaires dans le dernier cas et que l'on rechigne à le faire dans l'avant-dernier ?

5.c Le formulaire.

• **Coordonnées cylindriques.**

Sur la la figure 6 p. 38, on voit aisément que si r varie seul, M se déplace de $\mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r}$, que si θ varie seul, M se déplace sur un cercle de rayon r donc se déplace de $r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$ et que z varie seul, M se déplace de $\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$. On applique donc les formules générales avec $a_r=1$, $a_\theta=r$ et $a_z=1$, d'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f=\frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r\,V_\theta)}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\,\overrightarrow{e_\theta}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}$$

de façon brute, soit après simplification :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\,\overrightarrow{e_\theta}\right] + \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\,V_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (r\,V_z)}{\partial z}\right]$$

de façon brute, soit après simplification :

$$\text{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\,V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Le laplacien d'un champ scalaire est :

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\,\frac{\partial f}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

de façon brute, soit en développant les dérivations de produits et après simplification :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On passe sous silence le laplacien d'un champ vectoriel et l'opérateur « V scalaire gradient » peu exploitables en coordonnées polaires.

• Coordonnées sphériques.

Sur la la figure 7 p. 39, on voit aisément que si r varie seul, M se déplace de $\mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r}$, que si θ varie seul, M se déplace sur un cercle de rayon r donc se déplace de $r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$ et que φ varie seul, M se déplace sur un cercle de rayon $r\,\sin\theta$ donc se déplace de $r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$. On applique donc les formules générales avec $a_r = 1$, $a_\theta = r$ et $a_\varphi = r\,\sin\theta$, d'où, sans détailler l'étape du résultat brut :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\,V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{e_r} + \cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\varphi)\right)\overrightarrow{e_\theta} + \cdots$$

$$\cdots\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,V_r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\Delta\,f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\,\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Remarque : on vérifie aisément que l'expression du laplacien est équivalente à celle qui suit et qui permet une recherche plus aisée d'ondes sphériques en physique ondulatoire :

$$\Delta\,f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,f)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\,\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

• **Exercice de style.**

Je suggère au lecteur de définir lui même un système de coordonnées adaptées à un phénomène physique lié à un tore de grand rayon R et de petit rayon a (champ électromagnétique dans un solénoïde torique en alternatif, par exemple) puis de s'amuser (si, si !) à établir un formulaire donnant le gradient, le rotationnel, la divergence et le laplacien scalaire dans ces coordonnées toriques. Le succès est garanti dans le cadre d'un mémoire.