

Chapitre A-X

Séries de Fourier. Transformée de Fourier. Convolution. Distributions. Echantillonnage.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On introduit dans ce chapitre des notions d'analyse fonctionnelle d'usage courant en physique. Il est ici hors de question d'une approche mathématique rigoureuse qui ne pourrait être réalisée qu'à un très haut niveau d'abstraction. On a cherché un compromis entre exposer sans justification les notions et théorèmes utiles en physique et lever le voile sur l'approche qu'en font les mathématiciens. Liberté est laissée au lecteur, s'il le peut ou s'il le veut, d'aller faire un tour du côté des mathématiques.

On parlera ici, à batons rompus, de séries de Fourier, de transformation de Fourier, de produit de convolution, de distributions (surtout celle de Dirac). On terminera par un petit tour dans le monde numérique en parlant d'échantillonnage d'une fonction et du théorème de Shannon, essentiel dans ce contexte.

Table des matières

A-X Séries de Fourier. Transformée de Fourier. Convolution. Distributions. Echantillonnage.	1
1 Introduction.	5
2 Séries de Fourier.	5
2.a Espace vectoriel des fonctions périodiques de période donnée.	5
2.b Recherche d'une famille orthonormée.	6
2.c Projection orthogonale d'une fonction périodique sur cette famille.	7
2.d Cas des fonctions continûment dérivables par morceaux.	7
2.e Cas des fonctions à valeurs réelles.	8
3 Transformation de Fourier.	9
3.a Tentative de généralisation et difficultés rencontrées.	9
3.b Et pourtant elle tourne (pourquoi ça marche quand même).	10
3.c Propriétés élémentaires de la transformation de Fourier.	12
3.d Produit de convolution. Sa transformée de Fourier.	13
3.e Transformée de Fourier d'un produit de fonctions.	15
3.f Relation de Parseval.	15
4 Distributions.	16
4.a Définitions et exemples.	16
4.b La distribution de Dirac.	17
4.c Exemple d'application : diffraction par un ensemble de fentes longues identiques.	19
5 Echantillonnage.	22
5.a Principe.	22

5.b Comparaison des transformées de Fourier.	22
5.c Théorème de Shannon.	24

1 Introduction.

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur ce que les mathématiciens appellent l'analyse fonctionnelle qui a pour sujet des espaces vectoriels de fonctions munis d'une norme. La principale difficulté réside dans le fait que ces espaces ne sont pas de dimension finie ; par conséquent au comportement algébrique des espaces vectoriels s'ajoute des problèmes analytiques de convergence et plus finement encore des aspects topologiques. C'est très ardu pour le physicien moyen.

Nous nous contenterons donc ici d'aller à l'essentiel sans chercher à rien démontrer mais la mise en perspective des enjeux mathématiques et de l'utilisation pragmatique par le physicien doit tôt ou tard être faite et c'est le moment idéal.

On rappelle que l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes est un espace vectoriel respectivement sur l'ensemble de réels ou des complexes.

On rappelle que tout sous-ensemble de fonctions tel que la somme de deux de ses éléments en fasse aussi partie et que tout produit d'un de ses éléments par une constante aussi, est un sous-espace vectoriel de fonctions. Ceci nous permettra d'affirmer ci-dessous que certains ensembles de fonctions sont des espaces vectoriels sans que nous en explicitions la vérification.

2 Séries de Fourier.

2.a Espace vectoriel des fonctions périodiques de période donnée.

L'ensemble des fonctions de période T donnée à valeurs complexes¹ est un espace vectoriel de fonctions.

Nous allons le munir du produit scalaire hermitien qui à deux fonctions f et g dont les conjugués (au sens du complexe conjugué à un complexe) sont notés \bar{f} et \bar{g} associe :

$$f \cdot g = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f}(t) g(t) dt$$

qui a les propriétés classiques de

- linéarité à droite : $f \cdot (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 f \cdot g_1 + \alpha_2 f \cdot g_2$ où α_1 et α_2 sont deux coefficients complexes
- semi-linéarité à gauche : $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \cdot g = \bar{\alpha}_1 f_1 \cdot g + \bar{\alpha}_2 f_2 \cdot g$
- symétrie hermitienne : $g \cdot f$ est le conjugué de $f \cdot g$ soit $g \cdot f = \overline{f \cdot g}$

1. On en déduira aisément les propriétés des fonctions périodiques à valeurs réelles, mentionnées par des remarques ultérieures.

A ce produit hermitien est classiquement associée une norme telle que :

$$|f|^2 = f \cdot f = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{f}(t) f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

où $|f(t)|$ est le module du complexe $f(t)$.

Remarque : on note le produit hermitien de façon variée dans la littérature : (f, g) , $\langle f, g \rangle$, $\langle f|g \rangle$ etc. Je choisis la forme la plus simple pour le repos des yeux.

2.b Recherche d'une famille orthonormée.

Considérons dans cet ensemble la famille de fonctions définies par :

$$U_n(t) = \exp\left(2in\pi \frac{t}{T}\right)$$

où n est un entier positif, négatif ou nul (donc n appartient à l'ensemble \mathbb{Z} des entiers de ce type).

Cette famille est orthogonale, en effet, pour m et n différents, on a :

$$\begin{aligned} U_m \cdot U_n &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{U}_m(t) U_n(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2im\pi \frac{t}{T}\right) \exp\left(2in\pi \frac{t}{T}\right) dt = \dots \\ &\dots = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(2i(n-m)\pi \frac{t}{T}\right) dt = \left[\frac{T}{2i(n-m)\pi} \exp\left(2i(n-m)\pi \frac{t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

où le dernier résultat est évident car les deux bornes sont distantes de $(n-m)$ fois la période $\frac{T}{|n-m|}$ de la primitive.

Cet ensemble n'est cependant pas normé en effet :

$$\begin{aligned} |U_n|^2 = U_n \cdot U_n &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{U}_n(t) U_n(t) dt = \dots \\ &\dots = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2in\pi \frac{t}{T}\right) \exp\left(2in\pi \frac{t}{T}\right) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T \end{aligned}$$

Dès lors, on se convainc aisément que la famille de fonctions définies par :

$$u_n(t) = \frac{U_n(t)}{|U_n|} = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(2in\pi \frac{t}{T}\right)$$

est une famille orthonormée.

2.c Projection orthogonale d'une fonction périodique sur cette famille.

Soit f une fonction de période T . Nous allons montrer qu'on peut la mettre de façon unique sous la forme :

$$f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \gamma_p u_p + f_{\perp}$$

où γ_p sont des coefficients complexes et f_{\perp} une fonction orthogonale à tous les u_p . Multiplions cette relation à gauche par u_n où n est un entier quelconque ; par définition de f_{\perp} , on arrive à :

$$u_n \cdot f = \sum_p \gamma_p u_n \cdot u_p + u_n \cdot f_{\perp} = \sum_p \gamma_p u_n \cdot u_p$$

Or on sait que $u_n \cdot u_p$ est nul si $p \neq n$ et égal à l'unité sinon, donc, en permutant les deux membres :

$$\gamma_n = u_n \cdot f = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2i n \pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt$$

ce qui définit les γ_n (et les γ_p initialement introduits car le nom donné à l'indice n'est pas pertinent) de façon unique.

Sous réserve de convergence, $\sum_p \gamma_p u_p$ est ainsi définie de façon unique s'appelle projection de f sur la famille orthonormée et la composante normale f_{\perp} , est obtenue par différence ($f_{\perp} = f - \sum_p \gamma_p u_p$) et rien ne permet a priori d'en dire quoi que ce soit de plus.

2.d Cas des fonctions continûment dérivables par morceaux.

Une fonction, ici périodique de période T , est dite continûment dérivable par morceaux si elle est dérivable et de dérivée continue sauf en un nombre fini (éventuellement nul bien sûr) de points sur une période et si en ces points elle admet des limites finies à gauche et à droite et des dérivées finies à gauche et à droite.

Pour ces fonctions, on démontre par l'analyse que la composante normale f_{\perp} définie plus haut est nulle. Dès lors, pour une fonction f de ce type, $\sum_p \gamma_p u_p$ converge vers f .

Il en est de même pour leur norme et puisque la famille est orthonormée, on peut affirmer le théorème de PARSEVAL :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\gamma_p|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

Dans la pratique, plutôt qu'écrire :

$$f = \sum_p \gamma_p u_p = \sum_p \gamma_p \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(2i p \pi \frac{t}{T}\right)$$

avec $\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2ip\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt$, on préfère écrire :

$$f = \sum_p c_p U_p = \sum_p c_p \exp\left(2ip\pi \frac{t}{T}\right)$$

avec $c_p = \frac{\gamma_p}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2ip\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt$ et le théorème de PARSEVAL s'écrit alors :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

2.e Cas des fonctions à valeurs réelles.

Si f est à valeur réelles (donc $\bar{f} = f$), on démontre aisément que $c_{-n} = \bar{c}_n$; en effet :

$$\begin{aligned} \bar{c}_n &= \overline{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2in\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(+2in\pi \frac{t}{T}\right) \bar{f}(t) dt = \dots \\ &\dots = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(2in\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt = c_{-n} \end{aligned}$$

Pour n nul, on en déduit que c_0 est réel.

Pour n positif non nul, notons $a_n/2$ et $-b_n/2$ les parties réelle et imaginaire de c_n donc $a_n/2$ et $b_n/2$ celles de c_{-n} ; en regroupant les termes d'indices opposés, on a :

$$\begin{aligned} c_n \exp\left(2in\pi \frac{t}{T}\right) + c_{-n} \exp\left(-2in\pi \frac{t}{T}\right) &= \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \left[\cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) + i \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \right] + \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \left[\cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) - i \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \right] = \dots \\ &\dots = a_n \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(-2in\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt = \dots \\ &\dots = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) f(t) dt \end{cases}$$

formule qui reste valable pour $n = 0$ en posant $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et l'on peut alors écrire :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \right]$$

Enfin, puisque $|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2$, le théorème de PARSEVAL se réécrit, en regroupant les termes en n et $-n$:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

3 Transformation de Fourier.

3.a Tentative de généralisation et difficultés rencontrées.

Considérons l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes qui est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres complexes. On aimerait y définir un produit scalaire hermitien qui à deux fonctions f et g associe par analogie avec ce qui précède :

$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) g(t) dt$$

et par conséquent la norme définie par son carré :

$$|f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Ces définitions n'ont de sens que si ces intégrales sont finies ; on peut pour cela se limiter à des fonctions dont le module décroît avec une majoration en $\frac{Cte}{t}$ à l'infini.

On aimerait prolonger ce qui précède en introduisant une base orthogonale de fonctions sinusoidales $U_\omega(t) = \exp(i\omega t)$ de sorte que la projection d'une fonction f sur une de ces fonctions soit, par analogie avec ce qui précède :

$$\frac{1}{|U_\omega|^2} (U_\omega \cdot f) U_\omega$$

où l'on note traditionnellement :

$$\hat{f}(\omega) = U_\omega \cdot f = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt$$

en espérant que par sommation, non plus dénombrable mais continue, donc par intégration, il y ait convergence vers f de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|U_\omega|^2} (U_\omega \cdot f) U_\omega d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|U_\omega|^2} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

On aimerait, mais ça ne marche pas pour plusieurs raisons.

La première est que si l'on veut que $\hat{f}(\omega) = U_\omega \cdot f = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt$ ait un sens, on doit, par exemple, imposer que le module de f ait une décroissance majorée en $\frac{Cte}{t^2}$ à l'infini, au lieu de $\frac{Cte}{t}$.

La seconde, plus importante encore est que les U_ω sont de module constant et que les produits hermitiens :

$$U_{\omega_1} \cdot U_{\omega_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\omega_2 - \omega_1)t] dt$$

ne sont pas définis car la primitive de la fonction à intégrer n'a pas de limite définie à l'infini. Parler de base orthogonale et a fortiori orthonormée n'a pas de sens.

3.b Et pourtant elle tourne (pourquoi ça marche quand même).

On peut définir la transformation de FOURIER de deux façons voisines, selon que l'on privilégie la pulsation ω ou la fréquence ν :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2i\pi \nu \tau) f(\tau) d\tau$$

Nous choisirons dans tout ce chapitre la seconde formulation.

La tentative du paragraphe précédent, qui semble vouée à l'échec, marche pourtant. Effectuons deux transformations de FOURIER successives ou presque. Calculons non pas

$$\hat{\hat{f}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2i\pi t \nu) \hat{f}(\nu) d\nu$$

obtenu en remplaçant le couple ν et τ dans cet ordre par t et ν

mais plus modestement² et en changeant le signe de l'exponentielle dans la seconde transformantion³ :

$$\hat{\hat{f}}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \exp(2i\pi t \nu) \hat{f}(\nu) d\nu$$

2. $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A$ impose que les bornes tendent de façon symétrique vers $\pm\infty$ ce qui est plus contraignant que $\int_{-\infty}^{\infty}$ qui permet aux deux bornes à tendre indépendamment l'une de l'autre vers $\pm\infty$.

3. On devrait donc changer la notation de la seconde transformée de Fourier qui n'en est pas une, mais nous ne cherchons pas ici une rigueur d'exposition.

On a donc :

$$\hat{f}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2i\pi\nu\tau) f(\tau) d\tau \right) \exp(2i\pi t\nu) d\nu$$

Les conditions⁴ qui permettent de permuter l'ordre des intégrations sont vérifiées, d'où successivement et en terminant par le changement de variable $u = \tau - t$:

$$\hat{f}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-A}^A \exp(2i\pi t\nu) \exp(-2i\pi\nu\tau) d\nu \right) d\tau$$

$$\hat{f}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-A}^A \exp[2i\pi\nu(t-\tau)] d\nu \right) d\tau$$

$$\hat{f}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\sin[2\pi A(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+t) \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du$$

Or on peut démontrer⁵ que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \pi$$

d'où avec le changement $v = 2\pi A u$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du = \pi$$

pour tout A et donc

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du = \pi$$

puis, car $f(t)$ se comporte comme une constante vis-à-vis de l'intégration sur u :

$$\frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du = f(t)$$

d'où l'on déduit par combinaison linéaire :

$$f(t) - \hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(u+t)] \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du$$

$$f(t) - \hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) - f(u+t)}{u} \sin(2\pi A u) du$$

4. Ce n'est pas un cours de mathématiques, nous admettrons donc.

5. Ce n'est pas facile sans le « théorème des résidus ».

Pour t donné, en notant $\varphi(u) = \frac{f(t)-f(u+t)}{u}$ et en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \pi [f(t) - \hat{f}(t)] &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \sin(2\pi A u) du = \dots \\ \dots &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi A} [-\varphi(u) \cos(2\pi A u)]_{-\infty}^{\infty} + \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi A} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(u) \cos(2\pi A u) du \end{aligned}$$

Puisque $\cos(Au)$ est borné ainsi que φ et ses dérivées car elles tendent vers 0 à l'infini, les deux termes en $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \dots$ tendent vers zéro et donc :

$$f(t) = \hat{f}(t)$$

On concède que la démonstration mathématique est escamotée, mais l'objectif de ce chapitre n'est pas la rigueur mathématique, mais l'entr'ouverture⁶ d'une porte vers celle-ci ; libre à chacun de l'ouvrir en grand ou non.

On a donc, pour résumer une présentation symétrique de la transformation de FOURIER et de la transformation de FOURIER inverse, en sous-entendant la distinction entre $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A$ et $\int_{-\infty}^{\infty}$:

$$\begin{cases} \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt \\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu \end{cases}$$

Remarque : en physique \hat{f} est appelé fréquemment *spectre* de f .

3.c Propriétés élémentaires de la transformation de Fourier.

La transformation de FOURIER est linéaire, simple conséquence de la linéarité de l'intégrale. Voyons quelques propriétés moins directes que le physicien retrouvera dans le chapitre traitant de la diffraction, en particulier à l'infini. On n'oubliera pas de remarquer que la similitude entre transformées de FOURIER directe et inverse permet d'ajouter à chacune des propriétés ci-dessous un « et vice-versa ».

- **Translation.**

Soit $f(t)$ une fonction de transformée de FOURIER $\hat{f}(\nu)$. Quelle est la transformée de FOURIER de la fonction F définie par $F(t) = f(t - t_0)$ où t_0 est une constante réelle ?

6. J'assume.

Par définition, on a successivement avec le changement de variable $\tau = t - t_0$:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \dots \\ &\dots = \exp(-2i\pi\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-2i\pi\nu \tau) d\tau = \exp(-2i\pi\nu t_0) \hat{f}(\nu)\end{aligned}$$

• **Dilatation.**

Soit $f(t)$ une fonction de transformée de FOURIER $\hat{f}(\nu)$. Quelle est la transformée de FOURIER de la fonction F définie par $F(t) = f(at)$ où a est une constante complexe ?

Par définition, on a successivement avec le changement de variable $\tau = at$:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \dots \\ &\dots = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-2i\pi\frac{\nu}{a}\tau\right) d\tau = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)\end{aligned}$$

• **Dérivation.**

Soit $f(t)$ une fonction de transformée de FOURIER $\hat{f}(\nu)$. Quelle est la transformée de FOURIER de la fonction $\frac{df}{dt}$?

On a, avec une intégration par parties et compte tenu que f tend vers 0 à l'infini :

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{df}{dt}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} \exp(-2i\pi\nu t) dt = [f \exp(-2i\pi\nu t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{d}{dt} [\exp(-2i\pi\nu t)] dt = \dots \\ &\dots = 0 + 2i\pi\nu \int_{-\infty}^{\infty} f \exp(-2i\pi\nu t) dt = 2i\pi\nu \hat{f} = i\omega \hat{f}\end{aligned}$$

où l'on retrouve, bien sûr et pas par hasard, un automatisme de pensée de la méthode des amplitudes complexes en régime sinusoïdal.

3.d Produit de convolution. Sa transformée de Fourier.

• **Définition.**

Soient f et g deux fonctions ; on appelle produit de convolution de ces deux fonctions la troisième fonction, notée $f \star g$ définie par :

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - u) g(u) du$$

• **Exemple.**

Prenons pour f et g la même fonction créneau valant 1 entre 0 et 1 et nulle ailleurs. Le produit $f(t-u) \cdot g(u)$ à intégrer sur u est nul sauf si u vérifie, pour $g(u)$, la double inégalité $0 < u < 1$ et, pour $f(t-u)$ la double inégalité $0 < t-u < 1$ soit $t-1 < u < t$. Ces deux intervalles ne se recouvrent pas si $t < 0$ ou $1 < t-1$ soit $2 < t$, donc $f \star g$ est nul en dehors de l'intervalle entre 0 et 2. Pour $0 < t < 1$, ces deux mêmes intervalles se recouvrent entre 0 et t et :

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du = \int_0^t du = t$$

et pour $1 < t < 2$, ces deux mêmes intervalles se recouvrent entre $t-1$ et 1 et :

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du = \int_{t-1}^1 du = 2-t$$

Le produit de convolution est donc une fonction « triangulaire ».

• **Transformée de Fourier d'un produit de convolution.**

Par définition de la transformée de FOURIER et du produit de convolution, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du \right) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \dots \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t-u) g(u) \exp(-2i\pi\nu t) du dt = \dots \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t-u) \exp[-2i\pi\nu(t-u)] g(u) \exp(-2i\pi\nu u) du dt \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables défini par $v = t - u$ (d'où $t = u + v$) et le maintien de u comme seconde variable. On rappelle que dans ce cas, il faut faire intervenir un déterminant jacobien et transformer ainsi l'élément différentiel $du dt$ par :

$$du dt = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$$

soit ici :

$$du dt = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} du dv = 1 du dv = du dv$$

d'où :

$$\begin{aligned}\widehat{f \star g}(\nu) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t-u) \exp[-2i\pi\nu(t-u)] g(u) \exp(-2i\pi\nu u) du dt = \dots \\ &\dots = \iint_{\mathbb{R}^2} f(v) \exp[-2i\pi\nu v] g(u) \exp(-2i\pi\nu u) du dv = \dots \\ &\dots = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp[-2i\pi\nu v] dv \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp(-2i\pi\nu u) du = \hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu)\end{aligned}$$

La transformée de FOURIER d'un produit de convolution de deux fonctions est donc le produit (le produit ordinaire, dit parfois, dans ce contexte, produit simple) des transformées de FOURIER des deux fonctions.

3.e Transformée de Fourier d'un produit de fonctions.

On a vu plus haut la ressemblance formelle entre transformées de FOURIER directe et inverse, ce qui permet d'affirmer, sans qu'il soit utile de développer les calculs d'affirmer que la transformée de FOURIER d'un produit simple de deux fonctions est le produit de convolution des transformées de FOURIER des deux fonctions.

C'est du reste cette propriété qui a conduit les mathématiciens à définir et étudier le produit de convolution.

3.f Relation de Parseval.

La transformée de FOURIER inverse (cf supra) conduit à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu = (f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du$$

En particulier pour $t = 0$, cette relation devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu) d\nu = (f \star g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-u) g(u) du$$

Choisissons f telle que $f(-u) = \bar{g}(u)$ et donc aussi $f(u) = \bar{g}(-u)$; on aura alors, en terminant par le changement de variable $t = -\tau$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(-t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \dots \\ &\dots = - \int_{\infty}^{-\infty} \bar{g}(\tau) \exp(2i\pi\nu\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\tau) \exp(2i\pi\nu\tau) d\tau = \dots \\ &\dots = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-2i\pi\nu\tau) d\tau} = \overline{\hat{g}(\nu)}\end{aligned}$$

et, en reportant tout cela dans la dernière relation, on a successivement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{g}}(\nu) \hat{g}(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u) g(u) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du$$

qui généralise la relation de PARSEVAL des séries de FOURIER (cf supra).

4 Distributions.

Il ne s'agit pas ici de faire un cours sur les distributions, les ouvrages fondateurs rédigés par Laurent SCHWARTZ qui lui valurent la médaille FIELDS en 1950 se trouvent aisément. On se contente des notions de base à l'usage de la physique.

4.a Définitions et exemples.

Sur un sous-espace vectoriel de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes, pourvues des charmes nécessaires de continuité, de dérivabilité (pour elles et leurs dérivées) et de comportement à l'infini, une distribution est une forme linéaire continue (on ne développera pas ce dernier point) qui à toute fonction associe un scalaire respectivement réel ou complexe.

Un premier exemple est la distribution de DIRAC, notée δ qui à toute fonction f associe sa valeur en 0, soit $\delta(f) = f(0)$.

En voici un autre : à toute fonction g à valeurs complexes, on peut associer une distribution notée par exemple D_g qui à toute fonction f associe :

$$D_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(t) f(t) dt$$

En définissant la somme de deux distributions D_1 et D_2 et de produit d'une distribution D par une constante α par :

$$\forall f \quad (D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$$

$$\forall f \quad (\alpha D)(f) = D(\alpha f)$$

on donne à l'ensemble des distributions une structure d'espace vectoriel.

L'application qui à toute fonction g associe la distribution D_g permet d'identifier l'ensemble des fonctions utilisées avec une partie des distributions et en retournant le point de vue de considérer que l'ensemble des distributions élargit celui des fonctions. Il est en

particulier courant de noter la distribution de DIRAC comme si elle était associée à une « fonction » de DIRAC δ (à valeurs réelles de sorte qu'elle se confond avec sa conjuguée) telle que, pour toute fonction f :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

Mentionnons, car c'est aisé, comment on définit la dérivée d'une distribution. On s'arrangera pour que, dans le cas de la dérivation d'une distribution associée à une fonction g , on ait $(Dg)' = Dg'$. On aura donc avec cette définition, avec une intégration par partie et sachant que les fonctions utilisées tendent vers 0 à l'infini (sinon les intégrales ne seraient pas définies) :

$$\begin{aligned} (Dg)'(f) &= D_{g'}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) f(t) dt = \dots \\ &\dots = [\bar{g}(t) f(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(t) f'(t) dt = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(t) f'(t) dt = -D_g(f') \end{aligned}$$

qu'on généralise ainsi pour une distribution quelconque : la dérivée D' d'une distribution D est définie par :

$$\forall f \quad D'(f) = -D(f')$$

4.b La distribution de Dirac.

• Définition comme limite d'une suite de fonctions.

Pour tout entier n non nul, considérons une fonction créneau g_n valant n entre $-\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n}$ et nulle ailleurs ; elle est réelle et est donc confondue avec sa conjuguée. La distribution D_n associée est telle que :

$$D_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t) f(t) dt = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(t) dt$$

Pour n assez grand donc si l'intervalle entre $-\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n}$ est assez petit, $f(t)$ est très proche de $f(0)$ d'où :

$$D_n(f) = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(t) dt \approx n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(0) dt = n f(0) \frac{1}{n} = f(0)$$

pour un mathématicien c'est un travail de routine de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(f) = f(0)$$

donc que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \delta$$

où δ est la distribution de DIRAC.

- **Translation d'une fonction de Dirac.**

En assimilant la distribution de DIRAC, quel sens donner à $\delta(t - t_0)$? Formellement, avec le changement de variable $\tau = t - t_0$ et par définition de δ , on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(\tau + t_0) d\tau = f(0 + t_0) = f(t_0)$$

et $\delta(t - t_0)$ est donc la distribution qui à toute fonction f associe $f(t_0)$.

Remarque : de même pour $\delta(t_0 - t)$ avec le changement $\tau = t_0 - t$, on aurait :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0 - t) f(t) dt = - \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau) f(-\tau + t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(-\tau + t_0) d\tau = f(-0 + t_0) = f(t_0)$$

donc $\delta(t - t_0)$ et $\delta(t_0 - t)$ sont deux notations d'une même distribution, notée souvent δ_{t_0} .

- **Convolution avec une fonction de Dirac.**

Soit f une fonction ; quel sens donner au produit de convolution $\delta \star f$? Formellement, avec ce qui précède (pour les notations, la variable est ici notée u au lieu de t et la distribution dans l'intégrale est translatée de t au lieu de t_0) :

$$(\delta \star f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - u) f(u) du = f(t)$$

Donc le résultat est simple : $\delta \star f = f$.

De façon plus intéressante, calculons de même $\delta_{t_0} \star f$:

$$(\delta_{t_0} \star f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t - u) f(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - u - t_0) f(u) du = f(t - t_0)$$

Donc le résultat est simple : $\delta_{t_0} \star f$ est la fonction f translatée de t_0 .

- **Transformée de Fourier.**

La transformée de FOURIER de la fonction de DIRAC est, par définition de cette dernière :

$$\hat{\delta}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \exp(0) = 1$$

où l'on comprend qu'il s'agit d'une fonction constante de valeur unité.

De même, pour la fonction δ_{t_0} (cf supra) :

$$\hat{\delta}_{t_0}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt = \exp(-2i\pi\nu t_0)$$

- **Transformée d'une sinusoïde.**

La transformation de FOURIER inverse permet d'affirmer (cf supra) que :

$$\delta_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2i\pi\nu t_0) \exp(2i\pi\nu t) d\nu$$

Le changement de notation $\nu = -t$, $t = \nu$ et $t_0 = \nu_0$ conduit à :

$$\delta_{\nu_0}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\nu_0 t) \exp(-2i\pi\nu t) dt$$

La transformée de FOURIER de $\exp(2i\pi\nu_0 t)$, considérée non pas comme fonction (elle ne tend pas vers 0 à l'infini), mais comme distribution associée à une fonction (cf supra), est donc δ_{ν_0} .

4.c Exemple d'application : diffraction par un ensemble de fentes longues identiques.

On rappelle que dans le cadre d'une diffraction à l'infini dans le cas de fentes longues éclairées par une fente-source parallèle, l'amplitude complexe $A(X)$ reçue en un point d'abscisse X dans le plan focal de la lentille est la transformée de Fourier de la fonction de transmission notée ici $a(x)$ au lieu du traditionnel $t(x)$ dans le plan du diaphragme, sous la forme :

$$A(X) = Cte \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \exp\left(2i\pi \frac{xX}{\lambda f'}\right) dx$$

Le signe positif dans l'exponentielle montre que c'est une transformée inverse, ce qui ne change pas fondamentalement les choses. On se ramènera aux notations qui précèdent en posant dans le plan du diaphragme $t = \frac{x}{\lambda}$ et dans le plan focal de la lentille $\nu = \frac{X}{f'}$.

On notera dans cette vision de choses donc $A = \hat{a}$. On relira en diagonale D-XII le chapitre consacré à la diffraction avant d'aborder ce paragraphe.

- **Diffraction par deux fentes identiques.**

Soit $A = \hat{a}$ l'amplitude complexe d'une tache de diffraction obtenue par une fente quelconque. Quelle est l'amplitude complexe d'une tache de diffraction obtenue par deux fentes identiques à la précédente mais décalées selon Ox respectivement de $\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$ soit avec la variable t de $\pm\frac{d}{2\lambda}$ noté ici $\pm\frac{\alpha}{2}$?

Pour les deux fentes, en utilisant un résultat précédent, les deux fonctions transmissions sont respectivement $\delta_{-\frac{\alpha}{2}} \star a$ et $\delta_{\frac{\alpha}{2}} \star a$; on doit donc calculer la transformée de FOURIER

de $a_2 = \left(\delta_{-\frac{\alpha}{2}} + \delta_{\frac{\alpha}{2}} \right) \star a$; en utilisant à bon escient les résultats précédents (transformées d'un produit de convolution, fonctions δ) avec $\nu = \frac{X}{f'}$, on a :

$$A_2(\nu) = \left(\hat{\delta}_{-\frac{\alpha}{2}} + \hat{\delta}_{\frac{\alpha}{2}} \right) \hat{a} = [\exp(i \pi \alpha \nu) + \exp(-i \pi \alpha \nu)] A(X) = 2 \cos \left(\frac{\pi a X}{\lambda f'} \right) A(X)$$

et l'on retrouve de façon structurelle la factorisation qu'il avait fallu faire apparaître par un artifice de calcul. Pour l'exploitation du résultat, on renvoie le lecteur au chapitre D-XII traitant de la diffraction.

• Diffraction par un réseau.

De la même façon un réseau formé de N fentes identiques centrées en $x = 0, x = d, x = 2d, \dots, (N-1)d$ aura une fonction de transfert :

$$a_N = (\delta + \delta_\alpha + \delta_{2\alpha} + \dots + \delta_{(N-1)\alpha}) \star a$$

toujours avec $\alpha = \frac{d}{\lambda}$ et donnera, par un calcul analogue au précédent :

$$A_N = (\hat{\delta} + \hat{\delta}_\alpha + \hat{\delta}_{2\alpha} + \dots + \hat{\delta}_{(N-1)\alpha}) \hat{a}$$

soit en notant $\varphi = \frac{2 \pi a X}{\lambda f'}$

$$A_N(X) = (1 + \exp(-i \varphi) + \exp(-2i \varphi) + \dots + \exp[-(N-1)i \varphi]) A(X) = \frac{1 - \exp(-N i \varphi)}{1 - \exp(-i \varphi)} A(X)$$

où l'on retrouve, bien sûr, le résultat connu.

• Peigne de Dirac.

On rappelle que vis-à-vis de φ , la fonction $\frac{1 - \exp(-N i \varphi)}{1 - \exp(-i \varphi)}$ est périodique de période 2π et que sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, elle est négligeable sauf autour de $\varphi = 0$ dans un voisinage dont la largeur est en $\frac{1}{N}$ et qu'elle maximale et vaut N quand $\varphi = 0$. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, elle ressemble donc à la fonction g_n exhibée plus haut et qui tend vers δ (sf le sous-paragraphe introduisant δ comme limite de fonctions). Par périodicité on lui ajoutera les distributions $\delta_{2q\pi}$ où q est entier positif, nul ou négatif. On peut démontrer plus rigoureusement ce résultat suggéré mais ce serait trop en dehors⁷ du cadre de ce cours.

7. Ça passe par une définition pertinente de la transformée de Fourier d'une distribution. L'art du mathématicien est de chercher à rendre vrai ce qui semble faux. Ce que je dis là n'est pas une critique : donner un sens à $\sqrt{-1}$ relève du génie.

Nous admettrons donc que la transformée de FOURIER de la somme infinie

$$P_\tau(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{p\tau}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(t - p\tau)$$

que l'on appelle peigne de DIRAC de pas τ est un autre peigne de pas $\frac{1}{\tau}$, à la constante multiplicative $\frac{1}{\tau}$ près soit :

$$\widehat{P}_\tau(\nu) = \frac{1}{\tau} P_{\frac{1}{\tau}}(\nu) = \frac{1}{\tau} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{q}{\tau}}(\nu) = \frac{1}{\tau} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta\left(\nu - \frac{q}{\tau}\right)$$

• **Retour sur la diffraction par un réseau.**

Reprenons, avec une nouvelle origine et un changement de numérotation le réseau précédent avec, pour alléger, un nombre impair de fentes centrées en des points espacés de d entre $-Nd$ et Nd . On peut considérer que ce réseau est un réseau infini dont on occulte les fentes éloignées par un diaphragme de largeur légèrement supérieure à $2Nd$ et centré sur 0. Sa fonction de transfert sera donc de la forme :

$$a_N = b(P \star a)$$

où

- a est une fonction créneau de faible largeur devant le pas du réseau et dont la transformée de FOURIER A est un sinus cardinal de grande largeur
- b est une fonction créneau de grande largeur devant le pas du réseau et dont la transformée de FOURIER B est un sinus cardinal de petite largeur
- P est un peigne de DIRAC et dont la transformée de FOURIER est un autre un peigne de DIRAC Q

Les règles de transformation de FOURIER des produits simples et de convolution conduisent à :

$$A_N = \hat{b} \star (\hat{P} \hat{a}) = B \star (Q A)$$

Par convolution avec B , chaque terme de Q , qui est une somme infinie, recopie par translation, ce sinus cardinal étroit mais le A qui multiplie ce terme module ce qu'on obtient par un large sinus cardinal. Ce qui fait que l'on obtient (on est en fait passé à l'intensité pour nous rappeler la diffraction) la figure 1 p. 22 où l'on a fait figurer le facteur modulant et la courbe donnant l'intensité en fonction de la position. On a utilisé la parité en ne dessinant que la moitié de la courbe (uniquement le début) et comme d'habitude, on a sacrifié la véracité des proportions entre largeur d'une fente, pas du réseau et largeur du réseau à la lisibilité de la figure.

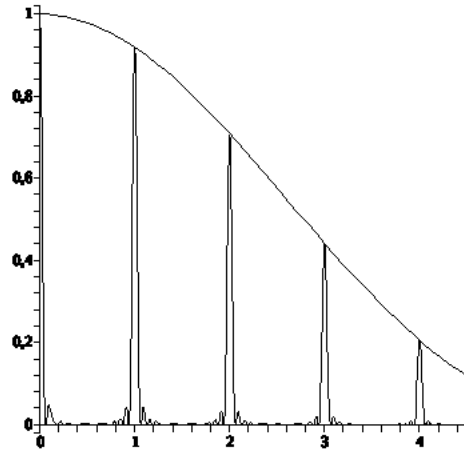


FIGURE 1 – Réseau de diffraction.

5 Echantillonnage.

5.a Principe.

Echantillonner une fonction $f(t)$ c'est se contenter d'en donner les valeurs en des instants précis distants les uns des autres d'un même intervalle de temps, appelé *période d'échantillonnage* et noté ici τ . On notera donc $f_p = f(p\tau)$ avec p entier négatif, nul ou positif.

Sur la figure 2 p. 23, la fonction f a son graphe tracé avec un trait mince et noir et les f_p sont visualisés par des segments verticaux en gros traits rouges.

L'échantillonnage permet, bien sûr, l'enregistrement numérique du signal. A la restitution de la fonction, on a perdu l'information des valeurs entre les instants $p\tau$. On convient de donner à la fonction restituée, notée g , la valeur du f_p immédiatement précédent, soit :

$$\text{pour } p\tau \leq t < (p+1)\tau \quad g(t) = f(p\tau) = f_p$$

Sur la même figure, la fonction g a son graphe en traits de grosseur intermédiaire et en orange.

5.b Comparaison des transformées de Fourier.

Bien évidemment g diffère de f et on aimerait savoir à quel point ce sera gênant. C'est en musique que l'approche est la plus évidente : il s'agit d'entendre des notes donc des fréquences. On va donc comparer les spectres en fréquence de f et g , c'est-à-dire leurs transformées de FOURIER. On veut donc comparer \hat{g} et \hat{f} , transformées de FOURIER de g et f .



FIGURE 2 – Echantillonnage.

Etablissons dans un premier temps une relation exploitable entre f et g . Soit $C(t)$ une fonction créneau qui vaut 1 entre 0 et τ et est nulle ailleurs. Alors $C(t - p\tau)$ une fonction créneau qui vaut 1 entre $p\tau$ et $(p + 1)\tau$ et est nulle ailleurs et l'on peut donc écrire :

$$g(t) = \sum_p f_p C(t - p\tau)$$

Avec les propriétés de la fonction de DIRAC vis-à-vis de la convolution, on a aussi :

$$g(t) = \sum_p f_p [\delta(t - p\tau) \star C(t)]$$

En reprenant la démonstration concernant cette propriété de la fonction de DIRAC, on montre aisément que l'on peut aussi écrire :

$$g(t) = \sum_p [f(t) \delta(t - p\tau)] \star C(t)$$

soit par distributivité du produit :

$$g(t) = \left[f(t) \sum_p \delta(t - p\tau) \right] \star C(t)$$

où l'on reconnaît le peigne de DIRAC étudié plus haut et noté $P(t)$. On peut donc affirmer que :

$$g = [f P] \star C$$

d'où, comme on l'a vu plus haut dans la diffraction par un réseau :

$$\hat{g} = [\hat{f} \star \hat{P}] \hat{C}$$

Résultat qui reste à interpréter.

5.c Théorème de Shannon.

Reportons à un peu plus tard l'influence du terme multiplicatif \hat{C} , un sinus cardinal puisque C est un créneau. Comme pour la diffraction par un réseau c'est un facteur modulant.

La transformée de FOURIER du peigne de DIRAC P de pas τ est, à un facteur multiplicatif près que nous ne mentionnerons pas, un autre peigne de DIRAC de pas (cf supra) $\frac{1}{\tau}$. Par la convolution, chacun des termes du peigne \hat{f} translate le spectre \hat{f} du signal f d'un multiple de $\frac{1}{\tau}$ en fréquence et l'on doit faire la somme de toutes ces fonctions décalées les unes par rapport aux autres de $\nu_e = \frac{1}{\tau}$ appelée *fréquence d'échantillonnage*. Normalement cela doit donner une bouillie de sons parfaitement inaudible, sauf que . . .

Dans le domaine sonore, les sons audibles le sont jusqu'à une fréquence maximale ν_m de l'ordre de 20 kHz, variable selon les individus et leur âge. Dans la pratique donc, les enregistrements sont limités à cette fréquence par un comportement de filtre passe-bas de fréquence de coupure ν_m . Le signal f est par nature réel et son spectre (ou transformée de FOURIER) est alors une fonction paire de la fréquence (c'est aisé à démontrer), limitée par ce filtre à l'intervalle $[-\nu_m, \nu_m]$. Pour que la sommation de fonctions identiques décalées d'un multiple de la fréquence d'échantillonnage ν_e donc dans des intervalles $[q\nu_e - \nu_m, q\nu_e + \nu_m]$ avec q entier ne conduisent pas à une bouillie, il suffit que ces intervalles ne se chevauchent pas, donc que $\nu_e > 2\nu_m$. Ceci constitue l'important théorème de SHANNON. Par exemple les CD audio, conçus pour une fréquence audible maximale de 20 kHz sont échantillonnés à 40 kHz. Plus ne servirait à rien.

Revenons au facteur modulant (multiplicatif donc) \hat{C} , un sinus cardinal. Il aura tendance à affaiblir les sons aigus, ce qui est aisément compensé par la chaîne de restitution⁸. Du reste ce n'est pas le seul problème : la fonction à enregistrer n'est pas éternelle mais une durée finie, comme le réseau qui n'a qu'un nombre fini de fentes, ce qui amène de nouvelles complications qu'on esquivait dans ce chapitre purement incitatif : le lecteur qui se sent à l'aise avec ces concepts très mathématiques saura trouver de quoi satisfaire sa curiosité.

8. On sait, voir chapitre C-VII sur l'induction, que le haut-parleur n'a pas une fonction de transfert « plate » et qu'une bonne chaîne a des enceintes à trois voies (grave, médium, aigu) avec des réglages indépendants.