

Chapitre B-V

Un peu de mécanique céleste : points de Lagrange, ellipse de Hohmann.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On illustre ici les lois de la mécanique du point et des mouvements à force centrale par deux exemples de mécanique céleste.

Le premier est celui des planètes troyennes et plus généralement des points de Lagrange qui forment avec le Soleil et Jupiter dans le plan de son orbite une configuration indéformable et où un astéroïde peut être confiné. On s'intéressera au fait paradoxal que ces positions sont énergétiquement instables (énergie potentielle maximale) mais mécaniquement stable, sous certaines conditions, grâce à la force de Coriolis qui ne contribue pas à l'énergie potentielle.

Le second concerne l'optimisation énergétique d'un voyage de la Terre vers Mars et retour, laquelle passe par le choix de l'ellipse de Hohmann dont on étudie ensuite les caractéristiques essentielles.

Table des matières

B-V Un peu de mécanique céleste : points de Lagrange, ellipse de Hohmann.	1
1 Points de Lagrange d'un système binaire.	4
1.a Planètes troyennes.	4
1.b Hypothèses simplificatrices.	4
1.c Recherche de positions d'équilibre relatif. Points de Lagrange. . .	5
1.d Stabilité des points de Lagrange.	9
2 Aller sur Mars.	13
2.a Hypothèses simplificatrices.	13
2.b Caractéristiques du voyage.	14
2.c Etudes de vitesses.	15
2.d Optimisation énergétique de la trajectoire.	18
2.e Caractéristiques géométriques de l'ellipse de Hohmann.	21
2.f Durée du voyage aller, fenêtre de lancement, durée de la mission. .	22
2.g Calculs des vitesses intéressantes.	24
2.h Solutions plus écologiques.	25

1 Points de Lagrange d'un système binaire.

1.a Planètes troyennes.

Au début du XX^e siècle, les astronomes ont observé deux groupements de milliers d'astéroïdes évoluant à proximité de l'orbite de Jupiter et avec la même période que celle de cette planète, le premier en avance de 60° sur elle et le second en retard de 60°. On a donné aux plus gros de ces astéroïdes des noms de héros de l'Iliade d'HOMÈRE, a priori les Grecs¹ pour un groupe et les Troyens pour l'autre mais les astronomes, pas tous cultivés, se sont mélangé les pinceaux et ont placé des espions dans les deux groupes. Nous allons essayer ici d'expliquer ce phénomène que l'on caractérise ainsi : dans un référentiel tournant par rapport au référentiel de COPERNIC à la vitesse angulaire moyenne de Jupiter sur son orbite, les planètes troyennes sont quasiment fixes.

1.b Hypothèses simplificatrices.

On réduit le système solaire au Soleil, ponctuel à l'échelle du système solaire, de masse m_1 et situé en un point mobile $S(t)$ dans un référentiel galiléen $Oxyz$, et à sa planète la plus grosse Jupiter, a fortiori ponctuelle elle aussi à cette échelle, de masse m_2 et situé en un point mobile $J(t)$ dans ce même référentiel.

On notera $G(t)$ le centre de gravité du système Soleil-Jupiter. Par définition, on a :

$$m_1 \overrightarrow{GS} + m_2 \overrightarrow{GJ} = \vec{0} \quad \text{ou encore} \quad m_1 \overrightarrow{OS} + m_2 \overrightarrow{OJ} = (m_1 + m_2) \overrightarrow{OG}$$

et par ailleurs, on a géométriquement :

$$\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{GS} = \overrightarrow{SJ}$$

d'où l'on déduit aisément :

$$\overrightarrow{GJ} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{SJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GS} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{SJ}$$

Le principe fondamental de la dynamique et la loi de gravitation universelle appliquée à ce système conduit à ce système d'équations :

$$\begin{cases} m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OJ}}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{\|\overrightarrow{SJ}\|^3} \overrightarrow{SJ} \\ m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OS}}{dt^2} = +\frac{G m_1 m_2}{\|\overrightarrow{SJ}\|^3} \overrightarrow{SJ} \end{cases}$$

1. Timeo Danaos et dona ferentes, comme dit le Laocoon de Virgile dans son Enéïde.

Par addition membre à membre et compte tenu de la seconde version de la définition de G , on a :

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \overrightarrow{0}$$

qui prouve que le référentiel barycentrique est lui aussi galiléen et l'on raisonnera désormais dans ce référentiel. Dans le système d'équations ci-dessus, on remplace donc l'origine O par G .

En reportant $\overrightarrow{GJ} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \overrightarrow{SJ}$ dans la première équation du système ou $\overrightarrow{GS} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \overrightarrow{SJ}$ dans la seconde, on arrive à la même équation :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \overrightarrow{SJ}}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{\|\overrightarrow{SJ}\|^3} \overrightarrow{SJ}$$

Le lecteur a reconnu l'approche classique utilisée dans le chapitre B-IV consacré au problème à deux corps dont nous reprenons maintenant les résultats sans les développer. Nous ferons ici une seconde hypothèse simplificatrice en remplaçant le mouvement plan elliptique (le Soleil à l'un des foyers) à faible excentricité ($e \approx 0,05$) de Jupiter par un mouvement plan circulaire de centre le soleil et de rayon R . L'accélération est alors centripète en $R\omega^2$ où ω est la vitesse angulaire constante du mouvement et en projetant la dernière équation sur l'axe radial, on arrive à :

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} = \frac{G(m_1 + m_2)}{\|\overrightarrow{SJ}\|^3}$$

où un œil exercé reconnaîtra une version « light » de la troisième loi de KEPLER.

Nous nous plaçons désormais dans un référentiel orthonormé non galiléen, d'origine G , tournant, par rapport au référentiel barycentrique que l'on vient d'introduire, à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Oz orthogonal au plan de l'orbite de Jupiter. L'axe Gx est confondu avec SJ et l'axe Gy choisi de sorte que le mouvement de Jupiter se fait dans le sens trigonométrique direct. On l'appellera référentiel tournant synchrone avec Jupiter.

1.c Recherche de positions d'équilibre relatif. Points de Lagrange.

Soit un astéroïde de masse m suffisamment faible pour qu'il ne perturbe pas les mouvements du Soleil et de Jupiter, situé au point M dont les projections sur Gz et xGy sont respectivement H et N . Il est soumis à la force d'attraction du Soleil $-\frac{G m_1 m}{\|\overrightarrow{SM}\|^3} \overrightarrow{SM}$, à la force d'attraction de Jupiter $-\frac{G m_2 m}{\|\overrightarrow{JM}\|^3} \overrightarrow{JM}$ et à la force d'inertie d'entraînement, qui compte tenu de l'expression de ω , est :

$$m \omega^2 \overrightarrow{HM} = \frac{G(m_1 + m_2) m}{\|\overrightarrow{SJ}\|^3} \overrightarrow{HM}$$

Remarquons qu'à l'équilibre, la vitesse relative est nulle ainsi que la force de CORIOLIS. Le tout est résumé par la figure 1 p. 6.

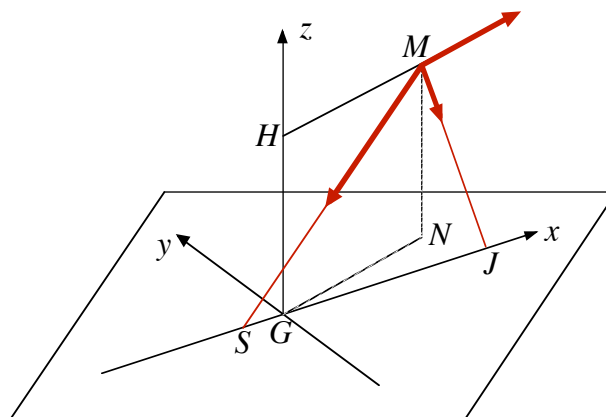


FIGURE 1 – Etude des forces.

La condition d'équilibre est donc, après simplification par Gm s'écrit :

$$-\frac{m_1}{\|\vec{SM}\|^3} \vec{SM} - \frac{m_2}{\|\vec{JM}\|^3} \vec{JM} + \frac{(m_1 + m_2)}{\|\vec{SJ}\|^3} \vec{HM} = \vec{0}$$

Si M est hors du plan xGy (par exemple au-dessus comme sur la figure), les deux forces d'attraction gravitationnelles ont des composantes non nulles de même signe selon Gz (négatives sur la figure) et la force d'inertie une composante nulle ; la somme est donc non nulle et l'équilibre n'est pas possible.

On cherche donc des positions où M appartient à xGy , H se confond alors avec G et compte tenu que, puisque G est barycentre, on a $(m_1 + m_2) \vec{GM} = m_1 \vec{SM} + m_2 \vec{JM}$, la condition d'équilibre s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} & -\frac{m_1}{\|\vec{SM}\|^3} \vec{SM} - \frac{m_2}{\|\vec{JM}\|^3} \vec{JM} + \frac{(m_1 + m_2)}{\|\vec{SJ}\|^3} \vec{GM} = \vec{0} \\ & -\frac{m_1}{\|\vec{SM}\|^3} \vec{SM} - \frac{m_2}{\|\vec{JM}\|^3} \vec{JM} + \frac{m_1}{\|\vec{SJ}\|^3} \vec{SM} + \frac{m_2}{\|\vec{SJ}\|^3} \vec{JM} = \vec{0} \\ & m_1 \left(\frac{1}{\|\vec{SJ}\|^3} - \frac{1}{\|\vec{SM}\|^3} \right) \vec{SM} + m_2 \left(\frac{1}{\|\vec{SJ}\|^3} - \frac{1}{\|\vec{JM}\|^3} \right) \vec{JM} = \vec{0} \end{aligned}$$

Si M , S et J ne sont pas alignés, les vecteurs \vec{SM} et \vec{JM} ne sont pas parallèles et forment une base ; la nullité de leur combinaison linéaire n'est possible que si leurs coefficients sont nuls, soit successivement :

$$\frac{1}{\|\vec{SJ}\|^3} - \frac{1}{\|\vec{SM}\|^3} = \frac{1}{\|\vec{SJ}\|^3} - \frac{1}{\|\vec{JM}\|^3} = 0$$

$$\frac{1}{\|\vec{SJ}\|^3} = \frac{1}{\|\vec{SM}\|^3} = \frac{1}{\|\vec{JM}\|^3}$$

$$\|\vec{SJ}\| = \|\vec{SM}\| = \|\vec{JM}\|$$

et les points d'équilibre sont les troisièmes sommets des triangles équilatéraux du plan xGy dont l'un des côté est SJ , ce qui explique l'angle de 60° trouvé expérimentalement. On appelle ces deux points les *points de LAGRANGE L4 et L5* ; la plupart des auteurs (mais pas tous) appellent $L4$ celui qui est, dans son mouvement autour du Soleil, en avance sur Jupiter et $L5$ celui qui est en retard.

Reste à explorer le cas où les points S , J et M (donc aussi G) sont alignés. Nous repartirons de :

$$-\frac{m_1}{\|\vec{SM}\|^3} \vec{SM} - \frac{m_2}{\|\vec{JM}\|^3} \vec{JM} + \frac{(m_1 + m_2)}{\|\vec{SJ}\|^3} \vec{GM} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe GX qui supporte les points S , G , J et M avec S comme origine et orienté de S vers J , en notant $X_J = R$, $M = m_1 + m_2$, $m_2 = a M$ (avec $0 < a < 1$) d'où $m_1 = (1 - a) M$ et $X_G = a R$ (revenir à la définition de G pour s'en convaincre), en notant enfin $X_M = R x$, on obtient aisément après simplification par $\frac{G}{R^2}$:

$$-\frac{(1 - a) x}{|x|^3} - \frac{a (x - 1)}{|x - 1|^3} + (x - a) = 0$$

que l'on note $f_a(x) = 0$. Avec un grapheur, nous avons effectué une résolution graphique en figure 2 p. 8 (asymptotes verticales en rouge) pour $a = 0,5$ soit $m_1 = m_2$ (en noir), pour $a = 0,25$ (en bleu) et $a = 0,1$ (en rouge) ; pour le véritable couple soleil-Jupiter où $a = 0,95 \cdot 10^{-3}$, le graphe serait illisible (deux solutions trop proches de $x = 1$). On voit qualitativement qu'il y a trois solutions, une entre le Soleil et la planète ($0 < x < 1$) d'autant plus proche de 1 que a est petit, une au delà de la planète ($x > 1$) d'autant plus proche de 1 que a est petit et une en deçà du Soleil ($x < 0$) d'autant plus proche de -1 que a est petit. Ce sont respectivement les *points de LAGRANGE L1, L2 et L3*.

Pour obtenir des valeurs numériques des solutions, on explicite les valeurs absolues dans les trois cas $x < 0$, $0 < x < 1$ et $x > 1$ et on se ramène à une équation polynomiale de degré 5 à résoudre numériquement (par dichotomie, par exemple) au cas par cas pour chaque valeur du paramètre a .

Remarque 1 : aux forces précédentes, correspond une énergie potentielle qui est, classiquement :

$$E = -\frac{m_1}{\|\vec{SM}\|} - \frac{m_2}{\|\vec{JM}\|} - \frac{(m_1 + m_2)}{\|\vec{SJ}\|^3} \frac{\overline{HM}^2}{2}$$

ce qui, pour les points de l'axe GX , avec les même notations, conduit à :

$$\frac{RE}{G} = g_a(x) = -\frac{1 - a}{|x|} - \frac{a}{|x - 1|} - \frac{(x - a)^2}{2}$$

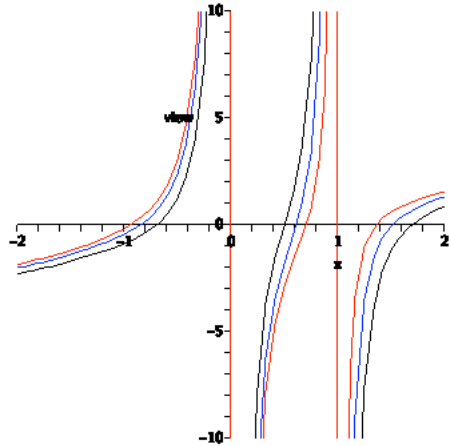


FIGURE 2 – Points de Lagrange L1, L2 et L3.

On en a tracé le graphe (pour $a = 0,5$; les autres valeurs donnent une même allure) en figure 3 p. 8 (excentrée par rapport à la précédente pour mieux voir les choses). Les positions d'équilibre (points de LAGRANGE) en sont les extremums et la figure montre qu'il s'agit de maximums. Il serait toutefois hâtif d'en déduire que l'équilibre est instable, on verra cela dans le prochain paragraphe.

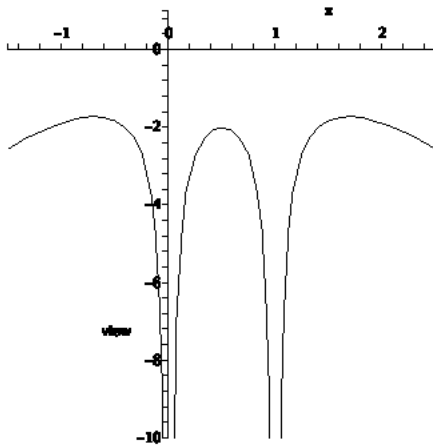


FIGURE 3 – Points de Lagrange, étude énergétique.

Remarque 2 : il en est de même (énergie maximale) pour les points de LAGRANGE L4 et L5, ce sera vu au cours des calculs dans le prochain paragraphe.

Remarque 3 : le satellite d'observation solaire SOHO est placé au point de LAGRANGE L1 du système Soleil-Terre, ce qui procure une géométrie relative constante d'un grand intérêt. Comme c'est la détestable habitude dans les revues et sites de vulgarisation scien-

tifiques, le site d'Astrium-EADS, responsable du projet, parle « du point où les champs de gravité du Soleil et de la Terre se neutralisent ». C'est scandaleusement faux, on a encore oublié qu'on est dans un référentiel non-galiléen et qu'intervient donc, comme on vient de le voir, la force d'inertie d'entraînement.

1.d Stabilité des points de Lagrange.

• Calcul des forces.

Commençons par les points de LAGRANGE L4 et L5 dont la position relative est indépendante du rapport des masses m_1 et m_2 , ce qui simplifiera considérablement l'étude.

Dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire ω calculée plus haut, choisissons ici l'origine au milieu de SJ , l'axe Sx confondu avec la droite SJ orientée de S vers J et notons $R = SJ$, l'axe Sy est dans le plan orbital de Jupiter dans le sens tel que Jupiter tourne dans le sens trigonométrique, enfin Sz est perpendiculaire au plan orbital orienté de façon que $Oxyz$ soit un trièdre direct.

Les points S et J ont donc pour coordonnées $x_S = -\frac{R}{2}$, $y_S = 0$ et $z_S = 0$ pour S et $x_J = \frac{R}{2}$, $y_J = 0$ et $z_J = 0$ pour J ; on se convainc aisément (plusieurs méthodes possibles) que les points de LAGRANGE forment avec S et J un triangle équilatéral dans le plan xGy ont pour coordonnées $x_L = 0$, $y_S = \pm R \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_L = 0$. Pour fixer les idées on choisira $y_S = +R \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enfin G barycentre de S de masse m_1 et J de masse m_2 a pour coordonnées (calcul classique) $x_G = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{R}{2}$, $y_G = 0$ et $z_G = 0$.

Soit un point matériel M , de masse m , très proche du point de LAGRANGE L dont on note les coordonnées $x_M = x$, $y_M = R \frac{\sqrt{3}}{2} + y$ et $z_M = z$ avec x , y et z petits devant R ; il est soumis, dans son mouvement à quatre forces :

- la force d'attraction par S , d'expression $-\frac{G m_1 m}{\|SM\|^3} \overrightarrow{SM}$ correspondant à l'énergie potentielle, d'expression $-\frac{G m_1 m}{\|SM\|}$
- la force d'attraction par J , d'expression $-\frac{G m_2 m}{\|JM\|^3} \overrightarrow{JM}$ correspondant à l'énergie potentielle, d'expression $-\frac{G m_2 m}{\|JM\|}$
- la force d'inertie d'entraînement d'expression ; on note H et N les projections de M sur Gz et xOy et l'on utilise l'expression de ω^2 obtenue un peu plus haut) ; cette force est donc $m \omega^2 \overrightarrow{HM} = m \omega^2 \overrightarrow{GN} = \frac{G(m_1 + m_2)m}{R^3} \overrightarrow{GN}$
- la force de CORIOLIS d'expression $-2 m (\omega \vec{e}_z) \wedge \vec{v}$

Nous allons calculer ces forces à l'ordre 1 en x , y et z ; pour les deux premières, nous passerons par un calcul à l'ordre 2 des énergies.

L'énergie d'interaction avec S est :

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{G m_1 m}{\|\vec{SM}\|^3} \vec{SM} = -G m_1 m \left[\left(\frac{R}{2} + x \right)^2 + \left(R \frac{\sqrt{3}}{2} + y \right)^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \dots \\
&\dots = -G m_1 m \left[R^2 + R(x + y\sqrt{3}) + (x^2 + y^2 + z^2) \right]^{-\frac{1}{2}} = \dots \\
&\dots = -\frac{G m_1 m}{R} \left[1 + \frac{x + y\sqrt{3}}{R} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Pour développer l'énergie à l'ordre 2, on utilise $(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2$, d'où successivement, en n'écrivant que² le terme d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{G m_1 m}{R} \left[\dots - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{x + y\sqrt{3}}{R} \right)^2 + \dots \right] \\
E &= -\frac{G m_1 m}{R^3} \left[\dots - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{8} (x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2) + \dots \right]
\end{aligned}$$

d'où, en en prenant l'opposé du gradient, les trois composantes de la force à l'ordre 1 (on n'écrit pas l'ordre 0 qui est inutile (cf supra) :

$$\begin{cases}
F_{1x} = -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{G m_1 m}{R^3} \left[\dots - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\sqrt{3}y + \dots \right] \\
F_{1y} = -\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{G m_1 m}{R^3} \left[\dots + \frac{5}{4}y + \frac{3}{4}\sqrt{3}x + \dots \right] \\
F_{1z} = -\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{G m_1 m}{R^3} [\dots - z + \dots]
\end{cases}$$

Pour l'énergie d'interaction avec J , il suffit de changer m_1 en m_2 et $(\frac{R}{2} + x)$ en $(\frac{R}{2} - x)$, ce qui changera, à l'ordre 2 $\left(\frac{x+y\sqrt{3}}{R}\right)^2$ en $\left(\frac{-x+y\sqrt{3}}{R}\right)^2$, d'où en brûlant les étapes les composantes de cette force :

$$\begin{cases}
F_{2x} = \frac{G m_2 m}{R^3} \left[\dots - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\sqrt{3}y + \dots \right] \\
F_{2y} = \frac{G m_2 m}{R^3} \left[\dots + \frac{5}{4}y - \frac{3}{4}\sqrt{3}x + \dots \right] \\
F_{2z} = \frac{G m_2 m}{R^3} [\dots - z + \dots]
\end{cases}$$

2. le terme d'ordre 0 disparaît dans le calcul de la force par dérivation ; le terme d'ordre 1 de l'énergie donne par dérivation le terme d'ordre 0 de la force et puisque l'ordre 0 correspond à la position d'équilibre, on sait, sans besoin de faire le calcul, que la somme des forces à l'ordre 0 est nul. Travaillons donc à l'économie !

La force d'inertie d'entraînement $\frac{G(m_1+m_2)m}{R^3} \overrightarrow{GN}$ (cf supra) se décompose par simple projection de \overrightarrow{GN} , projection de \overrightarrow{GM} sur xOy soit, en se limitant à l'ordre 1 (la position de G n'intervient qu'à ordre 0) :

$$\begin{cases} F_{3x} = \frac{G(m_1+m_2)m}{R^3} (\dots + x) \\ F_{3y} = \frac{G(m_1+m_2)m}{R^3} y \\ F_{3z} = 0 \end{cases}$$

Enfin, la force de CORIOLIS a pour composantes (calcul aisé, on ne reporte pas la valeur de ω qui n'apporterait aucune simplification à ce stade) :

$$\begin{cases} F_{4x} = 2m\omega \frac{dy}{dt} \\ F_{4y} = -2m\omega \frac{dx}{dt} \\ F_{4z} = 0 \end{cases}$$

Pour alléger les calculs, notons $ma = \frac{3}{4} \frac{G(m_1+m_2)m}{R^3}$, $mb = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{G(m_1-m_2)m}{R^3}$ et enfin $mc = \frac{9}{4} \frac{G(m_1+m_2)m}{R^3}$; après simplification par m les équations du mouvement sont, en revenant à ω^2 pour la troisième composante pour une meilleure interprétation physique :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = ax + by + 2\omega \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = bx + cy - 2\omega \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z \end{cases}$$

• Discussion sur la stabilité.

Le mouvement autour du point d'équilibre sera stable si, quelles que soient les conditions initiales (dans le respect de l'approximation), le mouvement reste borné. Vis-à-vis de z qui vérifie la troisième de ces équations, c'est acquis (mouvement sinusoïdal). Pour x et y , on a deux équations différentielles couplées, linéaires, d'ordre 2 à 2 variables dont les solutions forment un espace vectoriel de dimension $2 \times 2 = 4$ dont on va chercher une base sous forme de 4 solutions particulières de la forme $(x, t) = (x_0 e^{rt}, y_0 e^{rt})$ avec 4 valeurs pour r . En reportant ces expressions dans les équations, on arrive à :

$$\begin{cases} (-r^2 + a)x_0 + (2\omega r + b)y_0 = 0 \\ (-2\omega r + b)x_0 + (-r^2 + c)y_0 = 0 \end{cases}$$

qui n'admet comme solution en (x_0, y_0) autre chose que $(0, 0)$ que si le déterminant du système est nul, d'où r est l'une des 4 solutions de

$$(r^2 - a)(r^2 - c) = (b + 2\omega r)(b - 2\omega r)$$

soit encore :

$$r^4 + (4\omega^2 - a - b)r^2 + (ac - b^2) = 0$$

Considérons le discriminant Δ de cette équation bicarrée, en méprisant souverainement³ comme tout bon physicien le cas charnière $\Delta = 0$. Si Δ est négatif, les racines en r^2 sont imaginaires conjuguées, chacune donne deux racines opposées en r dont une à partie réelle positive qui donne un e^{rt} divergeant avec le temps ; ce cas est donc à exclure. Si Δ est positif, on a deux racines réelles en r^2 ; si l'une est positive, elle donne deux racines opposées en r dont l'une positive qui donne un e^{rt} divergeant avec le temps ; ce cas est donc à exclure. Si Δ est positif et les deux racines réelles en r^2 négatives, on a en r 4 valeurs imaginaires pures et aucun des e^{rt} qui diverge ; le mouvement est alors stable. En développant $(r^2 - A)(r^2 - B)$ on se convainc aisément que A et B sont négatifs si et seulement si les coefficients de l'équation bicarrée sont positifs.

Passons en revue les trois conditions :

Le coefficient de r^2 doit être positif, développons son expression :

$$4\omega^2 - a - b = 4 \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} - \frac{3}{4} \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} - \frac{9}{4} \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}$$

Il est bien positif.

Le coefficient constant doit être positif, développons son expression :

$$\begin{aligned} ac - b^2 &= \frac{3}{4} \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} \frac{9}{4} \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{G(m_1 - m_2)}{R^3} \right)^2 = \dots \\ &\dots = \frac{27}{16} \left(\frac{G}{R^3} \right)^2 [(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2] = \frac{27}{4} \frac{G^2 m_1 m_2}{R^6} \end{aligned}$$

Il est bien positif.

Enfin le discriminant doit être positif, développons son expression en y reportant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \Delta &= (4\omega^2 - a - b)^2 - 4(ac - b^2) = \left(\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} \right)^2 - 4 \frac{27}{4} \frac{G^2 m_1 m_2}{R^6} = \dots \\ &\dots = \frac{G^2}{R^6} [(m_1 + m_2)^2 - 27 m_1 m_2] = \frac{G^2}{R^6} [m_1^2 - 25 m_1 m_2 + m_2^2] \end{aligned}$$

3. Je m'en suis déjà expliqué : compte tenu des incertitudes, un paramètre ne prend jamais précisément une valeur particulière et quand bien même il le ferait, les tas de phénomènes parasites que l'on a négligés l'en écarteraient vite. Les cas charnières sont réservés à nos amis mathématiciens, ce qui ne nuit nullement à l'estime que nous leur portons.

La stabilité est donc assurée si l'on a $m_1^2 - 25 m_1 m_2 + m_2^2 > 0$, soit en notant m_1 la plus grande des deux masses (l'expression, symétrique en m_1 et m_2 , nous y autorise) et en divisant par m_2 puis en posant $\xi = \frac{m_1}{m_2}$ supérieur à 1 par construction, on doit avoir $\xi^2 - 25\xi + 1 > 0$, d'où, puisque le coefficient de ξ^2 est positif, soit $\xi < \frac{25 - \sqrt{621}}{2} \approx 0,040$ ce qui est exclu car $\xi > 1$ soit finalement $\xi > \frac{25 + \sqrt{621}}{2} \approx 25,0$. Pour le couple Soleil-Jupiter $\xi \approx 1005$ (on a donné plus haut l'inverse de cette valeur), il y a stabilité, ce qui explique les planètes troyennes.

Remarque 1 : Si l'on avait oublié la force de CORIOLIS, l'équation bicarrée en r eût été $r^4 + (-a - b)r^2 + (ac - b^2) = 0$ au lieu de $r^4 + (4\omega^2 - a - b)r^2 + (ac - b^2) = 0$, le coefficient central eût été négatif et l'équilibre instable (ce qui prouve du reste qu'aux points de LAGRANGE L4 et L5, l'énergie est aussi maximale). Ici, la force de CORIOLIS sans énergie potentielle associée⁴ et de puissance nulle a un rôle primordial de stabilisation. On trouvera un comportement analogue dans le piège de PENNING qui confine une charge en un maximum d'énergie potentielle électrostatique grâce à une force magnétique sans énergie potentielle associée et de puissance nulle (voir chapitre C-IX).

Remarque 2 : On ne prend pas au pied de la lettre la valeur critique $\frac{25 + \sqrt{621}}{2}$, car elle repose sur une approximation (développement à l'ordre 1) et car on a négligé l'ellipticité de la trajectoire de Jupiter et l'existence d'autres planètes.

Remarque 3 : Si l'on reprend la même méthode pour les trois autres points de LAGRANGE (on remplace $x_L = 0$, $y_S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_L = 0$ par $x_L = \ell$, $y_S = 0$ et $z_L = 0$ où ℓ se déduit aisément du paramètre de position introduit plus haut dans la recherche de leurs positions et qui était solution d'une équation de degré 5, obtenue par des méthodes numériques), on obtient le même type de calculs mais les coefficients de l'équation bicarrée qu'on obtient font intervenir ℓ qui doit être calculé numériquement pour chaque valeur de $\frac{m_1}{m_2}$, ce qui empêche tout traitement théorique simple.

2 Aller sur Mars.

Le lecteur est supposée avoir une maîtrise minimale sur les mouvements à force centrale en $\frac{1}{r^2}$ (voir le chapitre B-IV qui leur est consacré).

2.a Hypothèses simplificatrices.

On remplace les orbites elliptiques de la Terre (excentricité 0,017) et de Mars (excentricité 0,093 par des orbites circulaires centrées sur le Soleil et on les supposera coplanaires (en réalité les plans de orbites forment un angle de 1,85 degré⁵). On assimilera le rapport de rayons à celui des demi-grands axes que l'on arrondira à 1,5 (au lieu de 1,524). On ne

4. Je répugne à parler ici de force non-conservatrice car cette force a une puissance nulle et l'énergie mécanique se conserve.

5. L'usage est de mettre au pluriel seulement à partir de 2

prendra donc pas au pied de la lettre les résultats numériques que l'on déduira de cette simplification et que ne sont qu'une bonne approximation.

2.b Caractéristiques du voyage.

La figure 4 p. 14 montre le principe d'un voyage de la Terre vers Mars⁶. Il est impensable de faire fonctionner un moteur d'un bout à l'autre du voyage; le poids du carburant à emporter sera prohibitif; en fait l'essentiel du voyage a pour moteur l'attraction solaire et la trajectoire du véhicule spatial est une ellipse⁷ avec le Soleil à l'un des foyers.

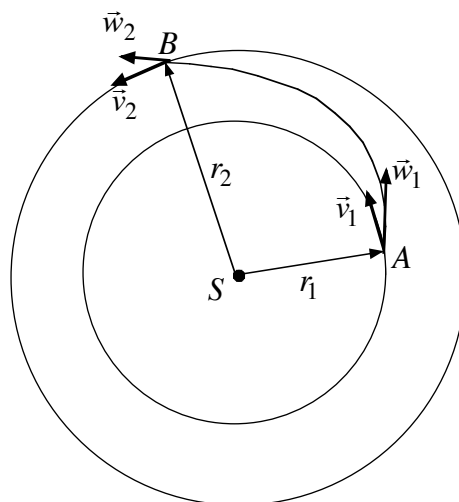


FIGURE 4 – Ellipse de transfert.

Les moteurs ne fonctionnent qu'au départ et à l'arrivée. Au départ, le véhicule spatial est sur Terre en A; dans le référentiel de COPERNIC il a la même vitesse \vec{v}_1 que celle-ci; le bref (quelques minutes) fonctionnement des moteurs fait passer sa vitesse à \vec{w}_1 avec un déplacement infime à l'échelle du système solaire. Les moteurs sont ensuite coupés jusqu'à l'arrivée à proximité de Mars au point B de son orbite (on verra plus loin comment faire pour qu'il soit au rendez-vous); la vitesse du véhicule spatial est alors \vec{w}_2 et l'on rallume les moteurs brièvement jusqu'à ce qu'elle devienne égale à \vec{v}_2 , vitesse de Mars sur son orbite; ainsi le véhicule reste-t-il près de Mars et peut-il effectuer une légère manœuvre pour atterrir⁸.

6. pour coller à l'actualité.

7. Rien n'empêche une hyperbole, mais en cas d'un rendez-vous manqué avec Mars, l'ellipse permet de ne pas trop s'éloigner de la Terre.

8. On atterrit sur une autre planète que la Terre; « alunir » a été un mauvais néologisme; en effet « terre » est opposé non pas à la Lune en temps que planète mais à la « mer » de amerrir en temps que type de surface.

2.c Etudes de vitesses.

Donnons quelques indications sur ces vitesses.

• Vitesses des planètes.

Pour le mouvement circulaire uniforme de rayon r_1 de la Terre de masse M_T attirée par la Soleil de masse M_S avec une vitesse de module (de norme v_1) v_1 , on a, en projection radiale :

$$M_T a_r = -\frac{M_T v_1^2}{r_1} = -\frac{G M_S M_T}{r_1^2}$$

d'où :

$$v_1 = \sqrt{\frac{G M_S}{r_1}}$$

De même pour Mars (rayon r_2 et module de vitesse v_2), l'on a :

$$v_2 = \sqrt{\frac{G M_S}{r_2}}$$

• Paramètres de l'orbite du véhicule spatial.

La trajectoire du véhicule spatial est portée par une ellipse de foyer le Soleil dont l'équation polaire, avec un choix convenable de l'origine des angles est classiquement, en notant p et e l'excentricité :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p et e restent à déterminer.

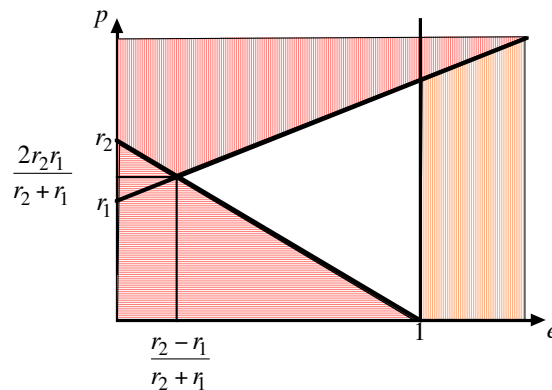


FIGURE 5 – Contraintes sur le paramètre et l'excentricité.

Cette équation prouve que l'on a

$$\frac{p}{1+e} \leq r \leq \frac{p}{1-e}$$

en tout point de l'ellipse, laquelle passe en A ($r = r_1$) et en B ($r = r_2 > r_1$). Puisque r_1 et r_2 sont des données du problème, p et e sont liés par la double contrainte :

$$p \leq r_1(1+e) \quad \text{et} \quad r_2(1-e) \leq p$$

à laquelle on rajoute la contrainte $e < 1$ pour avoir une ellipse.

La figure 5 p. 15 résume ces contraintes dans un diagramme avec e en abscisse et p en ordonnée, les zones interdites sont hachurées en rouge ou orange ; les coordonnées du point le plus intéressant (voir la suite) ont été indiquées (le calcul est aisé).

• Vitesses du véhicule spatial.

Recherchons maintenant un accès aux vitesses \vec{w}_1 et \vec{w}_2 de modules w_1 et w_2 . Intéressons-nous pour cela à l'énergie mécanique et redémontrant rapidement une formule classique.

La formule de BINET relative à la vitesse (voir le chapitre B-IV sur les mouvements à force centrale), en notant C la constante des aires (voir au même endroit) et en notant $u = \frac{1}{r}$ soit ici $u = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta)$, donne :

$$v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] = \frac{C^2}{p^2} [(1 + e \cos \theta)^2 + (-e \sin \theta)^2] = \frac{C^2}{p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$$

Par ailleurs, la formule de BINET relative à l'accélération radiale provoquée par la force \vec{F} d'attraction solaire donne successivement après simplifications :

$$-\frac{G M_S}{r^2} = -G M_S u^2 = \frac{F}{m} = a_r = -C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

$$G M_S = \frac{C^2}{p} [(1 + e \cos \theta) + (-e \cos \theta)] = \frac{C^2}{p}$$

On élimine aisément C^2 entre les deux derniers résultats pour arriver à :

$$v^2 = \frac{G M_S}{p} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$$

et l'énergie mécanique est :

$$E = -\frac{G M_S m}{r} + \frac{1}{2} m v^2 = -G M_S m u + \frac{1}{2} m v^2 = \dots$$

$$\dots = -G M_S m \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta) + \frac{1}{2} m \frac{G M_S}{p} (1 + 2e \cos \theta + e^2) = \dots$$

$$\dots = -\frac{G M_S m}{2p} [2(1 + e \cos \theta) - (1 + 2e \cos \theta + e^2)] = -\frac{G M_S m}{2p} (1 - e^2)$$

Ce résultat peut se lire, après simplification par m , masse du véhicule spatial :

$$-\frac{G M_S}{r} + \frac{1}{2} v^2 = -\frac{G M_S}{2p} (1 - e^2)$$

qui est un lien entre position et vitesse faisant intervenir les paramètres de l'orbite; c'est ce que nous visions.

En particulier, on en déduit, aux points A et B les modules des vitesses :

$$w_1^2 = \frac{2 G M_S}{r_1} - \frac{G M_S}{p} (1 - e^2)$$

$$w_2^2 = \frac{2 G M_S}{r_2} - \frac{G M_S}{p} (1 - e^2)$$

• Vitesses relatives.

Nous aurons besoin aussi des modules w_{r1} et w_{r2} des vitesses relatives $\overrightarrow{w_{r1}} = \overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{w_{r2}} = \overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{v_2}$. En élevant au carré on a :

$$w_{r1}^2 = \overrightarrow{w_{r1}}^2 = (\overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{v_1})^2 = \overrightarrow{w_1}^2 - 2 \overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1}^2$$

et une formule analogue pour w_{r2}^2 .

Pour aller plus loin, nous avons besoin, pour le produit scalaire du double produit, du cosinus l'angle α entre $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$, ce dernier étant orthoradial. Classiquement sur la trajectoire du véhicule spatial, on a $\overrightarrow{w} = \frac{dr}{dt} \overrightarrow{e_r} + r \frac{d\theta}{dt} \overrightarrow{e_\theta}$, d'où, compte tenu que par définition $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ et sans oublier qu'en A , on a $r = r_1$:

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{dt}}{w} = \frac{C}{r_1 w_1}$$

d'où successivement, en reportant les valeurs de v_1 et w_1 calculées plus haut puis la relation $C^2 = G M_S p$ établie plus haut (formule de Binet relative à l'accélération) :

$$\begin{aligned} w_{r1}^2 &= \overrightarrow{w_1}^2 - 2 \overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1}^2 = w_1^2 - 2 w_1 v_1 \cos \alpha + v_1^2 = \dots \\ &\dots = w_1^2 - 2 w_1 v_1 \frac{C}{r_1 w_1} + v_1^2 = w_1^2 - 2 v_1 \frac{C}{r_1} + v_1^2 = \dots \\ &\dots = \left[\frac{2 G M_S}{r_1} - \frac{G M_S}{p} (1 - e^2) \right] - \left[2 \frac{C}{r_1} \sqrt{\frac{G M_S}{r_1}} \right] + \left[\frac{G M_S}{r_1} \right] = \dots \\ &\dots = \left[\frac{2 G M_S}{r_1} - \frac{G M_S}{p} (1 - e^2) \right] - \left[2 \frac{\sqrt{G M_S p}}{r_1} \sqrt{\frac{G M_S}{r_1}} \right] + \left[\frac{G M_S}{r_1} \right] = \dots \\ &\dots = G M_S \left[\frac{3}{r_1} - \frac{1 - e^2}{p} - \frac{2 \sqrt{p}}{r_1 \sqrt{r_1}} \right] \end{aligned}$$

et l'on aura de même :

$$w_{r2}^2 = G M_S \left[\frac{3}{r_2} - \frac{1 - e^2}{p} - \frac{2\sqrt{p}}{r_2 \sqrt{r_2}} \right]$$

2.d Optimisation énergétique de la trajectoire.

On ne consomme de l'énergie que pendant les deux phases de fonctionnement des moteurs. Les moteurs fonctionnent à régime constant et la masse de carburant utilisée est donc proportionnelle la durée de fonctionnement ; c'est donc elle que l'on va chercher à optimiser.

Pendant la première de ces phases (voir le chapitre sur les bilans dans un volume de contrôle) au point A donc, la poussée \vec{F}_1 des moteurs vérifie $\vec{F}_1 = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt}$ avec m variable et \vec{F}_1 de module (de norme) F_1 constante. En A , par intégration sur la durée de fonctionnement (notons entre $t = 0$ et $t = \tau_1$), on a :

$$\vec{w}_{r1} = \vec{w}_1 - \vec{v}_1 = \int_0^{\tau_1} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_0^{\tau_1} \frac{\vec{F}_1}{m(t)} dt$$

On commet une erreur notable mais acceptable⁹ en remplaçant $m(t)$ par la masse initiale notée m_1 ; on en tire donc :

$$w_{r1} \approx \frac{1}{m_1} \left\| \int_0^{\tau_1} \vec{F}_1 dt \right\| \leq \frac{1}{m_1} \int_0^{\tau_1} \left\| \vec{F}_1 \right\| dt = \frac{1}{m_1} \int_0^{\tau_1} F_1 dt = \frac{F_1 \tau_1}{m_1}$$

On minimise τ_1 , en transformant l'inégalité en égalité ; pour cela, il suffit de demander aux ingénieurs de maintenir la direction de \vec{F}_1 constante ; c'est leur métier, ils y parviennent. Un estimateur correct de τ_1 , après cette optimisation est donc :

$$\tau_1 \approx \frac{m_1}{F_1} w_{r1}$$

Dans la pratique, à la fin de cette phase, on se débarrasse des réservoirs vides et du moteur qui a beaucoup souffert et en B on utilise un nouveau moteur, on a donc de même :

$$\tau_2 \approx \frac{m_2}{F_2} w_{r1}$$

avec une autre masse initiale m_2 (plus petite que m_1) et une nouvelle poussée F_2 , pas forcément le même débit massique de carburant, ni forcément le même carburant ; néanmoins, il apparaît que le coût énergétique estimatif est une combinaison linéaire de w_{r1} et w_{r2} à coefficients positifs que nous noterons :

$$W = a_1 w_{r1} + a_2 w_{r2}$$

9. On peut montrer par un développement limité, qu'elle est d'autant plus faible que l'on choisit un débit massique de combustion élevé à variation de vitesse donnée

et la suite prouvera que le lien entre a_1 et a_2 est sans conséquence sur l'optimisation.

Pour r_1 et r_2 donnés, nous allons chercher à trouver les paramètres p et e qui rendent minimal cet estimateur.

• **Optimisation de l'excentricité e à paramètre p donné.**

Pour r_1 donné et p fixés, l'expression $w_{r_1}^2 = G M_S \left[\frac{3}{r_1} - \frac{1-e^2}{p} - \frac{2\sqrt{p}}{r_2\sqrt{r_1}} \right]$ est manifestement une fonction croissante de e et il en est de même pour w_{r_2} ; il est donc clair que pour minimiser $W = a_1 w_{r_1} + a_2 w_{r_2}$ (où a_1 et a_2 sont positifs), il faut prendre e le plus petit possible; mais e le plus petit possible, ça n'est pas $e = 0$ car, comme on l'a vu plus haut, e et p sont liés par diverses contraintes. La figure 6 p. 19 reprend la figure 5 p. 15 en y ajoutant deux droites $p = Cte$, l'une pour $p > \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ qui montre que dans ce cas la plus petite valeur de e dans le domaine autorisé se trouve sur la droite $p = r_1(1+e)$ et elle vaut donc $e = \frac{p-r_1}{r_1}$ d'où $1-e^2 = \frac{2p}{r_1} - \frac{p^2}{r_1^2}$ et l'autre pour $p < \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ qui montre que dans ce cas la plus petite valeur de e dans le domaine autorisé se trouve sur la droite $p = r_2(1-e)$ et elle vaut donc $e = \frac{r_2-p}{r_2}$ d'où $1-e^2 = \frac{2p}{r_2} - \frac{p^2}{r_2^2}$. On remarque au passage que la contrainte $e < 1$ s'avère en fait tout à fait secondaire.

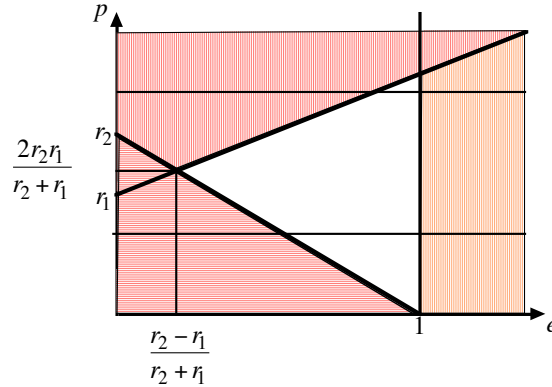


FIGURE 6 – Optimisation de l'excentricité.

• **Optimisation du paramètre p .**

Pour l'excentricité optimale, on a donc pour $p > \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$:

$$\begin{cases} w_{r_1}^2 = G M_S \left[\frac{3}{r_1} - \left(\frac{2}{r_1} - \frac{p}{r_1^2} \right) - \frac{2\sqrt{p}}{r_1\sqrt{r_1}} \right] = G M_S \left[\frac{1}{r_1} - \frac{2\sqrt{p}}{r_1\sqrt{r_1}} + \frac{p}{r_1^2} \right] \\ w_{r_2}^2 = G M_S \left[\frac{3}{r_2} - \left(\frac{2}{r_1} - \frac{p}{r_1^2} \right) - \frac{2\sqrt{p}}{r_2\sqrt{r_2}} \right] = G M_S \left[\frac{3}{r_2} - \frac{2}{r_1} - \frac{2\sqrt{p}}{r_2\sqrt{r_2}} + \frac{p}{r_1^2} \right] \end{cases}$$

Simplifions ces expressions en posant $r_2 = n^2 r_1$, où n est constant et supérieur à l'unité, et $p = \xi^2 r_1$ où ξ est supérieur à $\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} = \sqrt{\frac{2n^2}{n^2+1}}$; on arrive alors à :

$$\begin{cases} w_{r_1}^2 = \frac{GM_S}{r_1} [1 - 2\xi + \xi^2] \\ w_{r_2}^2 = \frac{GM_S}{r_1} \left[\frac{3}{n^2} - 2 - \frac{2\xi}{n^3} + \xi^2 \right] \end{cases}$$

La dérivée de $w_{r_1}^2$ par rapport à ξ , est abstraction faite du facteur positif $\frac{GM_S}{r_1}$ égale à $2(\xi - 1)$; elle est positive car, avec $n > 1$, on a $\xi > \sqrt{\frac{2n^2}{n^2+1}} > 1$ et $w_{r_1}^2$, donc w_{r_1} , est fonction croissante de ξ ; de même la dérivée de $w_{r_2}^2$ par rapport à ξ , est abstraction faite du facteur positif $\frac{GM_S}{r_1}$ égale à $2\left(\xi - \frac{1}{n^3}\right)$; elle est positive car, avec $n > 1$, on a $\xi > \sqrt{\frac{2n^2}{n^2+1}} > 1 > \frac{1}{n^3}$ et $w_{r_2}^2$, donc w_{r_2} , est fonction croissante de ξ , ainsi donc que la combinaison linéaire W à minimiser. Dans le domaine $\xi > \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$, le minimum est donc obtenu pour $\xi = \sqrt{\frac{2n^2}{n^2+1}}$ qui correspond à $p = r_1(1 + e)$ ou de façon plus parlante à la distance minimale du Soleil (le périhélie) égale à $r_{min} = \frac{p}{1+e} = r_1$.

De la même façon et plus rapidement, on a donc pour $p < \frac{2r_1 r_2}{r_1+r_2}$ et l'excentricité optimale :

$$\begin{cases} w_{r_1}^2 = GM_S \left[\frac{3}{r_1} - \left(\frac{2}{r_2} - \frac{p}{r_2^2} \right) - \frac{2\sqrt{p}}{r_1\sqrt{r_1}} \right] = GM_S \left[\frac{3}{r_1} - \frac{2}{r_2} - \frac{2\sqrt{p}}{r_1\sqrt{r_1}} + \frac{p}{r_2^2} \right] \\ w_{r_2}^2 = GM_S \left[\frac{3}{r_2} - \left(\frac{2}{r_2} - \frac{p}{r_2^2} \right) - \frac{2\sqrt{p}}{r_2\sqrt{r_2}} \right] = GM_S \left[\frac{1}{r_2} - \frac{2\sqrt{p}}{r_2\sqrt{r_2}} + \frac{p}{r_2^2} \right] \end{cases}$$

Puis en factorisant r_2 au lieu de r_1 et en notant toujours $r_2 = n^2 r_1$ mais cette fois $p = \xi^2 r_2$ doù $\xi < \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} = \sqrt{\frac{2}{n^2+1}} < 1 < n^3$

$$\begin{cases} w_{r_1}^2 = \frac{GM_S}{r_2} [3n^2 - 2 - 2n^3\xi + \xi^2] \\ w_{r_2}^2 = \frac{GM_S}{r_2} [1 - 2\xi + \xi^2] \end{cases}$$

Au facteur $\frac{GM_S}{r_2}$ près la dérivée par rapport à ξ de $w_{r_2}^2$ est $2\xi - 1$ négative car $\xi < 1$ et celle de $w_{r_1}^2$ est $2(\xi - n^3)$ négative car $\xi < n^3$. Cette fois la combinaison linéaire W est fonction décroissante de ξ et son minimum correspond à la valeur maximale de ξ sur l'intervalle d'étude soit pour $\xi = \sqrt{\frac{2}{n^2+1}}$ qui correspond ici à $p = r_2(1 - e)$ ou de façon plus parlante la distance maximale du Soleil (l'aphélie) égale à $r_{max} = \frac{p}{1-e} = r_2$.

Comme les deux optimums des deux domaines correspondent à la même valeur de p (c'est intersection des deux droites sur la figure), c'est LA configuration optimale recherchée ; elle correspond à une ellipse dont l'aphélie et le périhélie correspondent aux rayons de orbites de la Terre et de Mars ; cette ellipse est donc bi-tangente aux deux orbites circulaires (dans notre modèle) et elle est connue sous le nom de *ellipse de HOHMANN*.

2.e Caractéristiques géométriques de l'ellipse de Hohmann.

La figure 7 p. 21 résume la situation (toujours dans l'hypothèse simplificatrice d'orbites circulaires de même centre S , le Soleil, coplanaires pour la Terre et Mars). Le véhicule spatial part de la Terre à un instant initial $t = 0$, au périhélie de son orbite elliptique, la Terre étant alors au point T_0 de son orbite et Mars en M_0 , et arrive sur Mars à un instant final $t = T$ (à déterminer), à l'aphélie de son orbite elliptique de centre C (diamétralement opposé au périhélie), Mars étant alors au point M_1 de son orbite et la Terre en T_1 .

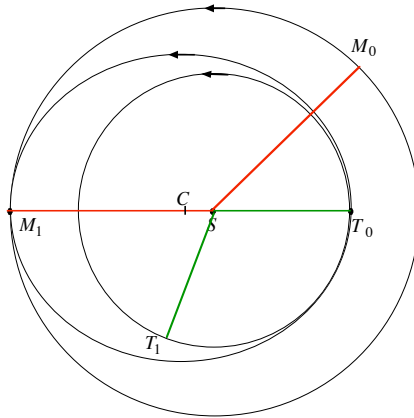


FIGURE 7 – Ellipse de Hohmann.

Le grand axe $2a$ de l'ellipse parcourue par le véhicule spatial est $T_0M_1 = ST_0 + SM_1$. ST_0 , assimilé au demi-grand axe de l'orbite terrestre, est par définition l'unité astronomique ($r_1 = 1$ UA) et SM_1 , assimilé au demi-grand axe de l'orbite martienne, est ici arrondi à ($r_2 = 1,500$ UA) ; l'on a donc :

$$CT_0 = CM_1 = a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1 + 1,500}{2} = 1,250 \text{ UA}$$

La distance focale $c = CS$ est :

$$c = CS = CT_0 - ST_0 = 1,250 - 1 = 0,250 \text{ UA}$$

ou aussi

$$c = CS = M_1S - M_1C = 1,500 - 1,250 = 0,250 \text{ UA}$$

On tire le demi-petit axe b par la formule classique $a^2 = b^2 + c^2$ d'où :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1,250^2 - 0,250^2} = 1,225 \text{ UA}$$

Voilà pour les paramètres cartésiens ; pour les paramètres polaires, on a, par définition, $\frac{c}{a}$ et l'on a classiquement $p = \frac{b^2}{a}$, d'où :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{0,250}{1,250} = 0,200 \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{1,225^2}{1,25} = 1,200 \text{ UA}$$

2.f Durée du voyage aller, fenêtre de lancement, durée de la mission.

• Voyage aller.

Par définition de l'année terrestre (que l'on note ici AT), la période de la Terre est 1 AT. Pour la suite, nous utiliserons la troisième loi de KEPLER (voir le chapitre sur les mouvements à force centrale), à savoir que tout ce qui tourne autour du Soleil a la même valeur de $\frac{T^2}{a^3}$ que l'on note ici K où T est la période et a le demi-grand-axe (ou le rayon pour un cercle). En prenant comme unités l'unité astronomique (UA) et l'année terrestre (AT), on a donc $K = 1 \text{ UA}^2 \cdot \text{AT}^{-3}$. On en déduit la période de Mars T_M ou année martienne :

$$T_M = K^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{3}{2}} = 1,5^{\frac{3}{2}} = 1,837 \text{ AT}$$

et la période théorique du véhicule spatial :

$$T_{veh.} = K^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} = 1,25^{\frac{3}{2}} = 1,398 \text{ AT}$$

et la durée T du voyage entre périhélie et aphélie en est la moitié par symétrie soit :

$$T = 0,699 \text{ AT}$$

soit environ huit mois et demi.

• Fenêtre de lancement.

A l'instant initial, la Terre est en T_0 pris comme origine des angles ($\theta_T(0) = 0^\circ$) ; en une année, elle parcourt 360° et en $T = 0,699 \text{ AT}$, elle parcourt $\frac{360}{1} \cdot 0,699 = 252^\circ$ et se trouve donc en T_1 repéré par $\theta_T(T) = 252^\circ$

A l'instant final, Mars est en M_1 diamétralement opposé à T_0 ($\theta_M(T) = 180^\circ$) ; en une année martienne soit 1,837 AT, il parcourt 360° et en $T = 0,699 \text{ AT}$, il a parcouru $\frac{360}{1,837} \cdot 0,699 = 137^\circ$ et se trouvait donc à l'instant initial en M_0 repéré par $\theta_M(0) = 180 - 137 = 43^\circ$.

Si l'on veut donc que Mars soit au rendez-vous, il faut donc programmer le lancement au jour où Mars se trouve exactement à 43° en avant de la Terre.

Que se passe-t-il si le départ est annulé pour un problème technique ou météorologique ? Il faut attendre la prochaine occurrence de cette configuration, la fameuse *fenêtre de lancement*. Par année terrestre, la Terre avance de 360° et Mars de période 1,837 AT avance de $\frac{360}{1,837} = 196^\circ$, il rétrograde donc de $360 - 196 = 164^\circ$ par an. Entre deux fenêtres successives, il doit rétrograder de 360° (bien sûr), pour cela, il lui faut $\frac{360}{164} = 2,195$ AT soit environ deux ans et deux mois et demi.

• Quand repartir ?

Pour répondre à cette question, qui est une nouvelle question de fenêtre de lancement, commençons par imaginer une mission de durée nulle : arrivé en M_1 , je me dégonfle, je ne modifie pas ma vitesse, je ne me pose pas sur Mars dont je prends juste des photos pour épater mes copains à mon retour. En $2T = 1,398$ AT, je parcours toute l'ellipse de HOHMANN et me retrouve en T_0 ; oui, mais pendant ce temps, la Terre a parcouru $360 \cdot 1,398 = 503^\circ$ identique à un tour près à $503 - 360 = 143^\circ$ et mes copains sont bien loin !

Donc je me pose et j'attends : le point de départ potentiel M_2 avance angulairement à la vitesse de Mars ainsi que le point d'arrivée potentiel T_3 diamétralement opposé à M_2 ; la Terre avance à sa propre vitesse et l'on a vu que cela se traduit par une rétrogradation de 164° par année terrestre ; on ne peut donc pas rattraper les 143° mais on peut en perdre $360 - 143 = 217^\circ$ en attendant $\frac{217}{164} = 1,323$ AT soit environ un an et quatre mois.

Vérifions tout cela. Avec les positions angulaires initiales calculées ci-dessus en degré et les vitesses angulaires en degré par année terrestre, les positions angulaires de la Terre et de Mars sont :

$$\theta_T(t) = 360t \quad \text{et} \quad \theta_M(t) = 43 + 360 \frac{t}{1,837}$$

A l'instant initial $t_0 = 0$, on a

$$\theta_T(t_0) = 0^\circ \quad \text{et} \quad \theta_M(t_0) = 43^\circ$$

Au bout du voyage aller qui dure 0,699 AT donc en $t_1 = t_0 + 0,699 = 0,699$ et l'on a

$$\theta_T(t_1) = 252^\circ \quad \text{et} \quad \theta_M(t_1) = 180^\circ$$

qui vérifie bien $\theta_M(t_1) - \theta_T(t_0) = 180^\circ$ (départ et arrivée diamétralement opposés).

Après un séjour de 1,323 AT sur Mars, soit en $t_2 = t_1 + 1,323 = 0,699 + 1,323 = 2,022$ et l'on a (on enlève 360° chaque fois que l'on a dépassé un tour)

$$\theta_T(t_2) = 8^\circ \quad \text{et} \quad \theta_M(t_2) = 79^\circ$$

Au bout du voyage retour qui dure 0,699 AT donc en $t_3 = t_2 + 0,699 = 2,022 + 0,699 = 2,721$ et l'on a

$$\theta_T(t_3) = 260^\circ \quad \text{et} \quad \theta_M(t_3) = 216^\circ$$

qui vérifie bien $\theta_T(t_3) - \theta_M(t_2) = 180^\circ$ aux arrondis près (départ et arrivée diamétralement opposés).

Le voyage aller-retour et le séjour minimal durent 2,721 AT soit environ deux ans et huit mois et demi.

2.g Calculs des vitesses intéressantes.

La vitesse v_1 de la Terre sur son orbite est aisée à calculer : en une période T_1 égale à une année terrestre, elle parcourt la circonférence soit $2\pi r_1$ de rayon égal à une unité astronomique, d'où :

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = 6,28 \text{ UA} \cdot \text{AT}^{-1}$$

Remarque : avec l'unité astronomique à cent cinquante millions de kilomètres et une année de 365 jours un quart (les bissextiles) de vingt-quatre heures, on a :

$$1 \text{ UA} \cdot \text{AT}^{-1} = \frac{150 \cdot 10^6}{365,25 \cdot 24} = 17,1 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 4,75 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

d'où $v_1 = 29,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Les autres conversions sont laissées à la charge du lecteur.

De la même façon, la vitesse v_2 de Mars sur son orbite est :

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} = \frac{6,28 \cdot 1,5}{1,837} = 5,18 \text{ UA} \cdot \text{AT}^{-1}$$

Pour calculer les vitesses w_1 et w_2 du véhicule spatial à son périhélie et son aphélie (cf supra), il faut se souvenir de la seconde loi de KEPLER : le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux et l'aire balayée \mathcal{A} est donc proportionnelle au temps et l'on se souvient aussi que la constante des aires n'est autre que $C = 2 \frac{d\mathcal{A}}{dt}$ (voir encore le chapitre sur les mouvements à forces centrales). Reste à remarquer que pendant la période $T_{veh.}$ de l'orbite elliptique l'aire balayée est l'aire de l'ellipse soit, classiquement $\pi a b$ où a et b sont les demi-grand axe et demi-petit axe. D'où en reportant les valeurs calculées plus haut :

$$C = \frac{2\pi a b}{T_{veh.}} = \frac{6,28 \cdot 1,25 \cdot 1,225}{1,396} = 6,89 \text{ UA}^2 \cdot \text{AT}^{-1}$$

Par ailleurs on sait aussi (même chapitre) que C est le rapport du moment cinétique (calculé au centre attracteur) à la masse, soit ici :

$$C = \|\vec{r} \wedge \vec{w}\| = \|(r \vec{e}_r) \wedge (w_r \vec{e}_r + w_\theta \vec{e}_\theta)\| = r w_\theta$$

qui donne accès à la composante orthoradiale de la vitesse qui, au périhélie et à l'aphélie, est la seule non nulle. Les vitesses w_1 et w_2 définies plus haut sont, dans le cas de l'ellipse de HOHMANN, égales à :

$$w_1 = \frac{C}{r_1} = \frac{6,89}{1} = 6,89 \text{ UA} \cdot \text{AT}^{-1} \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{C}{r_2} = \frac{6,89}{1,5} = 4,59 \text{ UA} \cdot \text{AT}^{-1}$$

et l'on remarque comme prévu que $w_1 > v_1$ et $w_2 < v_2$.

Remarque : en tout point M de l'ellipse repéré par $r = SM$, la composante orthoradiale w_θ est donnée (cf supra) par $w_\theta = \frac{C}{r}$. Oui, mais quelle est la composante radiale? C'est facile, il suffit de reprendre (toujours le même chapitre) la première ligne de calcul relatif aux formules de BINET :

$$w_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -C \frac{du}{d\theta} = -\frac{C}{p} \frac{d}{d\theta} (1 + e \cos \theta) = \frac{C e}{p} \sin \theta$$

Il suffit donc de connaître les caractéristiques de l'ellipse (on a vu comment procéder) et connaître ici θ (r et θ sont liés par l'équation de l'ellipse, bien sûr).

2.h Solutions plus écologiques.



FIGURE 8 – Véhicule spatial écologique.

La figure 8 p. 25 donne celle qu'Antoine de SAINT-EXUPERY préconise dans *Le Petit Prince*.

D'autres méthodes, uniquement pour aller sur la Lune ont été proposées par le vrai Cyrano de BERGERAC¹⁰ et ont été mises en vers par Edmont ROSTAND dans sa pièce

10. Hercule Savinien Cyrano, dit Cyrano de Bergerac, écrivain français, 1619–1655, auteur de *Histoire comique des États et Empires de la Lune* (1650).

Cyrano de Bergerac, où c'est du reste le seul point commun entre le personnage et son modèle historique. Les voici :

*Je pouvais, mettant mon corps nu comme un cierge,
Le caparaçonner de fioles de cristal
Toutes pleines des pleurs d'un ciel matutinal,
Et ma personne, alors, au soleil exposée,
L'astre l'aurait humée en humant la rosée !*

[...]

*Et je pouvais encor
Faire engouffrer du vent, pour prendre mon essor,
En raréfiant l'air dans un coffre de cèdre
Par des miroirs ardents, mis en icosaèdre !*

[...]

*Ou bien, machiniste autant qu'artificier,
Sur une sauterelle aux détentes d'acier,
Me faire, par des feux sucessifs de salpêtre,
Lancer dans les prés bleus où les astres vont paître !*

[...]

*Puisque la fumée a tendance à monter,
En souffler dans un globe assez pour m'emporter !*

[...]

*Puisque Phoebé, quand son acte est le moindre,
Aime sucer, ô boeufs, votre moelle... m'en oindre !*

[...]

*Enfin, me plaçant sur un plateau de fer,
Prendre un morceau d'aimant et le lancer en l'air !
Ça, c'est un bon moyen : le fer se précipite,
Aussitôt que l'aimant s'envole, à sa poursuite ;
On relance l'aimant bien vite, et cadédis !
On peut monter indéfiniment.*

[...]

*A l'heure où l'onde par la lune est attirée,
Je me mis sur le sable — après un bain de mer —
Et la tête partant la première, mon cher,
— Car les cheveux, surtout, gardent l'eau dans leur franges ! —
Je m'enlevai dans l'air, droit, tout droit, comme un ange.
Je montais, je montais, doucement, sans efforts*

[...]