

# Chapitre B-IX

## Solides en mouvement.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## *RÉSUMÉ :*

*La mécanique des solides est un vaste domaine. Il ne s'agit pas ici de le parcourir en entier mais d'en donner les outils et méthodes au travers d'exemples significatifs pour permettre au lecteur de le faire ultérieurement avec rigueur et efficacité.*

*On commence donc par rappeler les théorèmes de la mécanique du solide puis on présente le modèle de la liaison parfaite et les lois de Coulomb pour les interactions de contact entre solides.*

*On étudie ensuite, sur quelques exemples, successivement la statique des solides, les mouvements autour d'un axe fixe, les mouvements d'un solide posé sur un support, les mouvements autour d'un point fixe dans le cas général et dans l'approximation gyroscopique.*

*On évoque enfin les solides articulés.*

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>B-IX Solides en mouvement.</b>                                  | <b>1</b> |
| 1 Objectifs de ce chapitre. . . . .                                | 5        |
| 2 Rappel des outils et théorèmes disponibles. . . . .              | 5        |
| 3 Modélisation des actions subies par un solide. . . . .           | 7        |
| 3.a Réalisation pratique d'un axe de rotation. . . . .             | 7        |
| 3.b Liaisons. Généralisation. . . . .                              | 8        |
| 3.c Contact ponctuel entre solides. . . . .                        | 9        |
| 3.d Lois de Coulomb. . . . .                                       | 10       |
| 3.e Cas d'un contact non ponctuel. . . . .                         | 13       |
| 4 Statique du solide. . . . .                                      | 13       |
| 4.a Les lois de la mécanique en échec. . . . .                     | 13       |
| 4.b Phénomènes d'arc-boutement. . . . .                            | 16       |
| 4.c Exemple de contact non ponctuel. . . . .                       | 17       |
| 4.d La statique peut se cacher derrière la dynamique. . . . .      | 18       |
| 5 Mouvements autour d'un axe fixe. . . . .                         | 20       |
| 5.a Mouvement pendulaire. . . . .                                  | 20       |
| 5.b Equilibrage d'une pièce tournante. . . . .                     | 22       |
| 6 Mouvement d'un solide posé sur un support. . . . .               | 26       |
| 6.a Mouvement avec symétrie par rapport à un plan fixe. . . . .    | 26       |
| 6.b Cas général. . . . .   | 34       |
| 7 Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. . . . .            | 37       |
| 7.a Repérage de l'orientation du solide. Vecteur rotation. . . . . | 37       |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 7.b | Equations d'Euler. . . . .                              | 39 |
| 7.c | Mouvement à la Poinsot, étude analytique. . . . .       | 40 |
| 7.d | Solutions permanentes. . . . .                          | 42 |
| 7.e | Etude géométrique. . . . .                              | 44 |
| 7.f | Stabilité des axes. Polhodie. . . . .                   | 46 |
| 7.g | Mouvement de l'axe de rotation. Herpolhodie. . . . .    | 48 |
| 7.h | Cas particulier du solide de révolution. . . . .        | 50 |
| 7.i | Approximation gyroscopique dans le cas général. . . . . | 52 |
| 8   | Solides articulés. . . . .                              | 54 |
| 8.a | Modélisation des articulations. . . . .                 | 54 |
| 8.b | Paramétrage des mouvements. . . . .                     | 56 |
| 8.c | Résolution. . . . .                                     | 56 |
| 8.d | Discussion. . . . .                                     | 59 |

## 1 Objectifs de ce chapitre.

Il ne s'agit pas ici d'explorer le vaste univers de la mécanique du solide mais de donner au lecteur toutes les bases suffisantes pour s'y plonger bien armé. On lui donnera donc les outils et théorèmes nécessaires mais aussi tous les « angles d'attaque » classiques sur quelques exemples bien choisis explorant les différentes situations standards.

On se limite au solide parfait. Pour un solide réel, le chapitre B-VIII a montré que la gestion de l'agitation thermique ne pose pas problème car il y a découplage entre mécanique et thermodynamique. Pour les déformations élastiques, le chapitre B-X y sera consacré dans le cadre de la statique. Les déformations élastiques d'un solide en mouvement débordent largement le niveau de ce cours, sauf à se ramener à un problème de statique dans un référentiel non galiléen de mouvement relatif simple par exemple de rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Les situations étudiées ici seront classées dans un ordre de difficulté croissante.

## 2 Rappel des outils et théorèmes disponibles.

On rappelle ici brièvement et sans justification les conclusions du chapitre B-VIII.

Quelque soit le mouvement d'un solide, il existe un vecteur  $\vec{\omega}$ , dépendant a priori du temps, appelé vecteur rotation et les vitesses de ses points sont reliées par la relation donnée ici sous ses deux formes équivalentes :

$$\forall B \forall A \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\forall B \forall A \vec{v}_B = \vec{v}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega}$$

Pour un solide de masse  $M$ , de centre de gravité  $G$ , on peut exploiter les trois théorèmes suivants :

- le théorème du centre de gravité :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext.}}$$

où  $\vec{p}$  est la quantité de mouvement du solide et  $\sum \vec{F}_{\text{ext.}}$  la somme des forces extérieures.

- le théorème du moment cinétique
  - soit au centre de gravité :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext}}(G)$$

où  $\vec{\sigma}^*$  est le moment cinétique du solide dans le référentiel barycentrique (il est indépendant du point de calcul) et  $\vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext}}(G)$  la somme des moments dynamiques extérieurs et calculés en  $G$ .

- soit en un point lié au solide et fixe dans le référentiel du laboratoire, noté ici  $O$  :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O) = \sum \vec{\mathfrak{M}}_{ext}(O)$$

où  $\vec{\sigma}(O)$  est le moment cinétique du solide dans le référentiel du laboratoire et calculé en  $O$ .

- le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext.}$$

où  $E_{cin}$  est l'énergie cinétique du solide et  $\sum \mathcal{P}_{ext.}$  la somme des puissances extérieures.

Pour exploiter ces théorèmes, on exprime ainsi les éléments cinétiques du solide qui sont dérivés au premier membre :

- la quantité de mouvement du solide se calcule par  $\vec{p} = M \vec{v}_G$  où  $v$  est la vitesse du centre de gravité.
- le moment cinétique barycentrique se déduit du vecteur rotation par une relation linéaire dont la matrice, dans une base de projection liée au solide, est appelée matrice d'inertie ( $J_G$ ), donnée du problème et diagonalisable. On note  $(\vec{\sigma}^*) = (J_G)(\vec{\omega})$ , résultat dont la dérivation est délicate (voir au paragraphe 7.a p. 37).
- le moment cinétique calculé en un point lié au solide et fixe dans le référentiel du laboratoire, noté ici  $O$ , se déduit du vecteur rotation par une relation linéaire dont la matrice, dans une base de projection liée au solide, est appelée matrice d'inertie ( $J_O$ ), donnée du problème et diagonalisable. On note  $(\vec{\sigma}_O) = (J_O)(\vec{\omega})$ , résultat dont la dérivation est elle aussi délicate. Remarque : on peut déduire la valeur de ( $J_O$ ) de celle de ( $J_G$ ) par les formules de HUYGENS.
- L'énergie cinétique peut toujours se calculer par la formule  $E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}^*$  et s'il existe un point lié au solide et fixe dans le référentiel du laboratoire, noté ici  $O$ , elle peut aussi se calculer par la formule  $E_{cin} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_O$ , la première restant valable.

Pour le second membre des théorèmes, l'action de l'extérieur sur le solide est en pratique décomposée en somme d'actions de parties de l'extérieur. Pour chacune d'elle, la théorie sous-jacente des torseurs, qui restera tacite dans ce chapitre, permet de résumer l'action par la donnée d'une force résultante  $\vec{F}$  et d'un champ de moment  $\vec{\mathfrak{M}}$  dont il suffit de connaître le valeur  $\vec{\mathfrak{M}}(A)$  en un seul point, quelconque, noté ici  $A$  et choisi en pratique de façon pertinente ; en effet sa valeur en un autre point  $B$  sera calculée par la formule :

$$\vec{\mathfrak{M}}(B) = \vec{\mathfrak{M}}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

La puissance d'une telle action sur un solide est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}(A)$$

formule dont le résultat est indépendant du choix du point  $A$ .

Un premier type particulier d'action est une force  $\vec{F}$  localisée en un point, noté ici  $A$ ; la résultante est, bien sûr,  $\vec{F}$  et la valeur du moment est nulle en  $A$ ; il en résulte que la puissance est  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$ . En particulier l'action de pesanteur sur un solide est une force  $M \vec{g}$  localisée en  $G$  de puissance  $M \vec{g} \cdot \vec{v}_G$ .

Un second type particulier d'action, appelé couple, a une force résultante nulle et donc un moment indépendant du point de calcul noté ici  $\vec{T}$ ; il en résulte que la puissance est  $\mathcal{P} = \vec{\omega} \cdot \vec{T}$ .

On peut toujours se ramener à une somme de forces localisées et de couples.

### 3 Modélisation des actions subies par un solide.

#### 3.a Réalisation pratique d'un axe de rotation.

On appelle *liaison-pivot* le dispositif pratique qui permet uniquement la rotation du solide autour d'un axe géométrique  $Oz$  fixe ce qui entraîne que le vecteur rotation soit parallèle à cet axe  $Oz$ . Une des façons les plus simples est de rendre solidaire du solide une tige cylindrique terminée par deux cônes et placée entre deux cônes creux plus évasés comme sur la figure 1 p. 7; il n'y a alors que deux points de contacts  $A$  et  $B$  qui sont les sommets des cônes et qui définissent l'axe de rotation sur lequel on choisit une origine  $O$ .

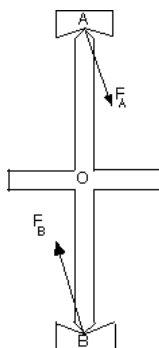


FIGURE 1 – Liaison-pivot.

En  $A$  et  $B$  s'exercent deux forces extérieures  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ . Le moment par rapport à  $O$  de ces forces est  $\vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B$  dont chaque terme est perpendiculaire à l'axe  $AB$  donc, après projection sur l'axe, le moment de ces forces par rapport à l'axe de rotation est nul. De même la puissance de ces forces est  $\vec{F}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_B \cdot \vec{v}_B = 0$  car  $\vec{v}_A$  et  $\vec{v}_B$  sont nulles puisque  $A$  et  $B$  sont sur l'axe.

Il y a toutes sortes de liaisons permettant la rotation autour d'un axe et nous définirons le modèle de la *liaison-pivot parfaite* comme une liaison-pivot telle que la puissance des actions extérieures soit nulle. Comme ces actions peuvent être décrites par une résultante  $\vec{F}$

et un champ de moment dont la valeur en  $O$  de l'axe, de vitesse  $\vec{v}(O)$  nulle donc, est  $\vec{\mathfrak{M}}(O)$ , le fait que la puissance soit nulle entraîne que :

$$0 = \vec{F} \cdot \vec{v}(O) + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}(O) = \vec{\omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}(O)$$

on en déduit que la projection de  $\vec{\mathfrak{M}}(O)$  sur l'axe de rotation est nulle.

Un point qui déroute quand on commence à étudier la mécanique du solide est que la force  $\vec{F}$  et la composante de  $\vec{\mathfrak{M}}(O)$  perpendiculaire à l'axe de rotation ne sont forcément constantes au cours du temps, ni ne sont des données du problèmes, elles font partie des inconnues.

L'essentiel réside en ceci : la puissance des forces de liaison est nulle et la projection sur l'axe de leur moment, calculé en un point de l'axe, est nul.

### 3.b Liaisons. Généralisation.

De façon générale, une liaison est un dispositif technologique qui permet à un solide d'effectuer certains types de mouvements et en interdit d'autres. En règle générale, on peut présenter les choses ainsi : sur six grandeurs cinématiques que sont les trois composantes  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sur trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  bien choisis du vecteur rotation et les trois composantes  $v_x(O)$ ,  $v_y(O)$  et  $v_z(O)$  de la vitesse d'un point  $O$  bien choisi, certaines sont obligatoirement nulles et les autres peuvent absolument quelconques.

Pour une liaison de bonne qualité, la puissance des forces exercées par la liaison sur le solide est négligeable ; on définit donc une *liaison parfaite* comme une liaison pour laquelle cette puissance est nulle. Si l'on décrit l'action globale de la liaison par sa force résultante  $\vec{F}$  de composantes  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  et son moment  $\vec{\mathfrak{M}}(O)$  au point  $O$  de composantes  $\mathfrak{M}_x(O)$ ,  $\mathfrak{M}_y(O)$  et  $\mathfrak{M}_z(O)$ , soit six grandeurs dynamiques, la liaison est parfaite si :

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{F} \cdot \vec{v}(O) + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}(O) = \dots \\ &\dots = F_x v_x(O) + F_y v_y(O) + F_z v_z(O) + \omega_x \mathfrak{M}_x(O) + \omega_y \mathfrak{M}_y(O) + \omega_z \mathfrak{M}_z(O) \end{aligned}$$

Si la liaison interdit, par exemple, la translation selon  $Ox$ , alors  $v_x(O)$  est nulle donc  $F_x v_x(O)$  aussi et ceci quel que soit  $F_x$  qui est donc une inconnue du problème dépendant a priori du temps ; inversement si la liaison permet cette translation alors  $v_x(O)$  peut être non nul, quels que soient les autres termes de la puissance, ce qui impose que  $F_x$  soit nul. De même, si la liaison interdit, par exemple, la rotation selon  $Ox$ , alors  $\omega_x$  est nulle donc  $\omega_x \mathfrak{M}_x(O)$  aussi et ceci quel que soit  $\mathfrak{M}_x(O)$  qui est donc une inconnue du problème dépendant a priori du temps ; inversement si la liaison permet cette translation alors  $\omega_x$  peut être non nul, quels que soient les autres termes de la puissance, ce qui impose que  $\mathfrak{M}_x(O)$  soit nul. Donc les grandeurs dynamiques correspondant aux grandeurs cinématiques nulles sont des fonctions inconnues du temps et les grandeurs dynamiques correspondant aux grandeurs cinématiques non nulles sont nulles.



Remarque : il y a des exemples plus compliqués comme la liaison entre une vis et un taraudage d'axe  $Oz$  et de même pas  $h$  pour laquelle, la vis, dont le centre de gravité  $G$  est situé sur l'axe, a pour seuls éléments cinématiques non nuls  $\omega_z$  et  $v_z(G)$ . On a alors  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $\mathfrak{M}_x(G)$  et  $\mathfrak{M}_y(G)$  inconnus ; par contre puisque la rotation et la translation sont liées par  $v_z(G) = h \frac{\omega_z}{2\pi}$  (on progresse de  $h$  quand on fait un tour soit  $2\pi$ ), la liaison est parfaite si :

$$0 = \vec{F} \cdot \vec{v}(O) + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}(O) = F_z v_z(O) + \omega_z \mathfrak{M}_z(O) = \omega_z \left( \frac{h}{2\pi} F_z + \mathfrak{M}_z(O) \right)$$

ce qui impose  $\mathfrak{M}_z(O) = -\frac{h}{2\pi} F_z$  avec  $F_z$  fonction inconnue du temps. Pour une liaison atypique comme celle-ci, dans la mesure où elle lie deux types de mouvement, inutile d'apprendre par cœur tout un bestiaire, il suffit de raisonner comme ici.

### 3.c Contact ponctuel entre solides.

Soit un solide  $\mathcal{S}$  en contact en un point  $I$  avec un support  $\mathcal{S}_0$  immobile . Grâce à la formule de changement de point, on connaît la vitesse de tous les points du solide si l'on connaît le vecteur rotation et la vitesse en un point particulier. Un point particulier intéressant est, bien sûr, le barycentre car il joue un rôle privilégié dans les théorèmes de la dynamique. Un autre est désormais le point de contact  $I$ .

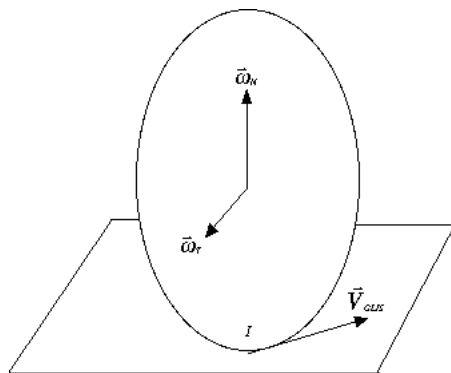


FIGURE 2 – Mouvement relatif par rapport au support.

Dans la mesure où l'on s'intéresse à un contact qui perdure, la vitesse du point du solide en contact avec le support lui est tangentielle, on l'appelle vitesse de glissement et on la note  $\vec{v}_{glis.}$  ou  $\vec{v}_{I \in \mathcal{S}}$

Selon que cette vitesse est non nulle ou nulle, on dit qu'il y a glissement ou non.

Bien sûr, si le support  $\mathcal{S}_0$  est lui même mobile (tapis roulant par exemple), la vitesse de glissement est définie comme une vitesse relative, soit  $\vec{v}_{glis.} = \vec{v}_{I \in \mathcal{S}} - \vec{v}_{I \in \mathcal{S}_0}$

De même, on décompose le vecteur rotation en une composante normale  $\vec{\omega}_N$  qui décrit un mouvement de *pivotement* et une composante tangentielle  $\vec{\omega}_T$  qui décrit un mouvement de *roulement*. Dans ce cours, on explorera surtout des mouvements sans pivotement, donc des mouvements de roulement avec ou sans glissement.

Attention, une source d'erreurs graves consiste à croire que la dérivée par rapport au temps de la vitesse de glissement est l'accélération du point de contact ; c'est faux car le point de contact à l'instant  $t$  et le point de contact à  $t + dt$  sont deux points différents du solide. La façon la plus simple de ne pas tomber dans ce piège est de considérer comme un **tabou absolu** la dérivation temporelle de la vitesse de glissement.

Remarque sur les contacts non ponctuels : dans le cas d'un mouvement sans glissement, si le solide est en contact en plus d'un point avec son support, en prenant deux points  $I$  et  $J$  du solide en contact avec le support, donc de vitesse nulle, on peut dire successivement :

$$\begin{aligned}\vec{v}_J &= \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IJ} \\ \vec{0} &= \vec{\omega} \wedge \vec{IJ}\end{aligned}$$

On en déduit, toujours dans le contexte du non-glissement, que si le solide est en contact avec le sol selon un segment, le vecteur rotation a la direction de ce segment et s'il est en contact avec une surface (comme une caisse posée sur le sol), alors le vecteur rotation est nul.

### 3.d Lois de Coulomb.

- **Le modèle le plus simple.**

Il s'agit d'établir la loi de force entre le support et le solide. Le mécanisme élémentaire est encore mal précisé, car il relève de forces à court rayon d'action entre matériaux électriquement neutres à l'échelle microscopique, c'est-à-dire des forces de VAN DER WAALS. Ces forces sont très sensibles à l'état de surface des deux corps (rugueux ou lisses et à quelle échelle) et à la présence d'impuretés (poussières) ou de fluides (eau, gras) et elles ne sont reproductibles expérimentalement qu'avec de larges fluctuations (plusieurs pour-cent).

On peut la plupart du temps se contenter du modèle suivant, connu sous le nom de *lois de COULOMB*, dont il ne faut pas espérer plus qu'un ordre de grandeur dans les prédictions quantitatives. Le support exerce sur le solide une force unique localisée au point de contact  $I$ , donc de moment nul en ce point ; on la décompose en une composante normale  $\vec{N}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}$ .

C'est une source d'erreurs graves dans l'apprentissage de cette mécanique de croire que les lois de Coulomb explicitent ces composantes ; elles restent des inconnues du mouvement et même pire, elles ne sont pas forcément constantes, ce sont des fonctions du temps inconnues dans le problème traité. Il importe de bien avoir cette affirmation présente à l'esprit.

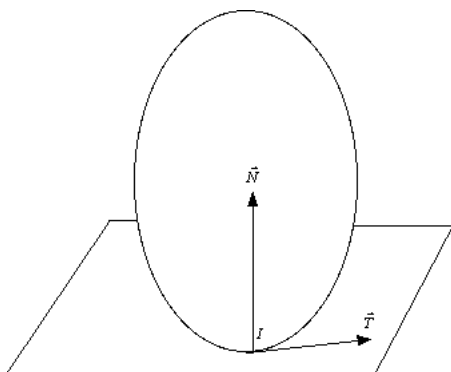


FIGURE 3 – Force de contact.

Les lois de COULOMB précisent les points suivants :

- pour la composante normale  $\vec{N}$  : celle-ci est toujours dirigée du support vers le solide. Si l'hypothèse du contact qui perdure conduit à un résultat dans l'autre sens c'est qu'il y a rupture du contact et le solide *décolle*. Toutefois, on conçoit bien que si le support est recouvert d'un fluide gluant,  $\vec{N}$  puisse exceptionnellement être dans l'autre sens, ce qui du reste sera une façon objective de définir le qualificatif « gluant ».
- pour la composante tangentielle  $\vec{T}$ , dans le cas du non-glissement
  - sa direction et son sens sont inconnus.
  - son module  $\|\vec{T}\|$  est au plus égal à  $f \|\vec{N}\|$  où  $f$ , appelé *coefficient de frottement*, est une constante qui dépend de la nature des matériaux de support et du solide ainsi que de leur état de surface<sup>1</sup>. Si l'hypothèse du non-glissement conduit à un résultat qui dépasse cette limite c'est que le solide glisse.
- pour la composante tangentielle  $\vec{T}$ , dans le cas du glissement
  - sa direction est celle de la vitesse de glissement et son sens opposé.
  - son module est égal à  $f \|\vec{N}\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement

Retenons :

Non-glissement :  $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$ , direction et sens inconnus.  
 Glissement :  $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$ , même direction que  $\vec{v}_{glis.}$  et sens opposé.

Remarque : les puristes distinguent un coefficient statique  $f_S$  dans le cas du non-glissement et un coefficient dynamique  $f_D$  dans le cas du glissement avec  $f_D < f_S$  mais, vu le peu de reproductibilité des expériences, c'est guère utile, sauf dans quelques cas particuliers (mouvements collé-glissé par exemple).

<sup>1</sup>. Il existe ainsi un coefficient « métal sur bois lisse sec » et un coefficient « caoutchouc mouillé sur bois rugueux ».

• **Puissance des forces de contact.**

La définition générale de la puissance s'applique, on a donc :

$$\mathcal{P} = (\vec{N} + \vec{T}) \cdot \vec{v}_{I \in S} = \vec{T} \cdot \vec{v}_{glis.}$$

car  $\vec{N}$  est normale et  $\vec{v}_{glis.}$  tangentielle.

En particulier dans le cas du non-glissement,  $\vec{v}_{glis.}$  est nulle et donc  $\mathcal{P}$  aussi ; il faut insister là-dessus car le point de contact se déplace et l'on a un travail nul avec un déplacement non-nul. L'apparent paradoxe se résout en remarquant que le point de contact n'est pas un point matériel fixe (même explication que pour la dérivation temporelle de la vitesse de glissement, cf supra). Pour éviter une erreur grave dans l'étude énergétique, on considérera comme un **tabou absolu** de parler de travail<sup>2</sup> en mécanique du solide ; à la place, on utilisera le concept de puissance. Retenons :

Les forces de contact ont une puissance nulle en cas de non-glissement.

• **Amélioration du modèle simple.**

Le modèle simple n'explique pas qu'une boule qui roule sans glisser sur un plan horizontal ou qu'une boule posée sur un plan horizontal et qui pivote sur elle-même finissent par s'arrêter. C'est qu'en fait le contact prétendument ponctuel ne l'est pas : la boule et le sol se déforment au niveau du point de contact théorique, de façon certes minime mais assez pour créer une petite zone de contact. La force de contact n'est plus localisée au point de contact théorique (on le notera toujours  $I$ ) et son moment en  $I$  n'est donc plus forcément nul. Pour décrire l'interaction, on donne donc la force décrite par les lois de COULOMB détaillées ci-dessus et le moment en  $I$ , noté  $\vec{T}$  (pour ceux qui préfèrent les torseurs, on modélise par une force localisée en  $I$  et un couple  $\vec{T}$ ) que l'on décompose en une composante normale  $\vec{T}_N$  appelée *moment ou couple de résistance au pivotement* et une composante tangentielle  $\vec{T}_T$  *moment ou couple de résistance au pivotement* qui vérifient les lois suivantes, appelées elles aussi lois de COULOMB :

Pour le couple de résistance au roulement  $\vec{T}_T$ ,

- s'il y a roulement, c'est-à-dire que la composante tangentielle du vecteur rotation, notée  $\vec{\omega}_T$ , est non nulle ce qui, en dehors de la statique, est le cas le plus fréquent
  - sa direction est celle de  $\vec{\omega}_T$  et son sens opposé.
  - son module est égal à  $h \|\vec{N}\|$  où  $h$ , homogène à une longueur, est le *coefficient de résistance au roulement* et  $\vec{N}$  la composante normale de la force de COULOMB
- s'il n'y a pas roulement, soit  $\vec{\omega}_T = \vec{0}$ , ce qui, en dehors de la statique, est rare
  - sa direction et son sens sont inconnus.

---

2. Un des théorèmes que mes élèves apprenaient sans problème est qu'en sciences physiques, le travail est interdit.

- son module est au plus égal à  $h \|\vec{N}\|$  où  $h$  est le coefficient de résistance au roulement

Pour le couple de résistance au pivotement  $\vec{T}_N$ ,

- s’il y a pivotement, c’est-à-dire que la composante normale du vecteur rotation, notée  $\vec{\omega}_N$ , est non nulle
  - son sens est opposé à celui de  $\vec{\omega}_N$ .
  - son module est égal à  $k \|\vec{N}\|$  où  $k$ , homogène à une longueur, est le *coefficient de résistance au pivotement* et  $\vec{N}$  la composante normale de la force de COULOMB
- s’il n’y a pas pivotement, soit  $\vec{\omega}_N = \vec{0}$ 
  - son sens est inconnu.
  - son module est au plus égal à  $k \|\vec{N}\|$  où  $k$  est le coefficient de résistance au pivotement

On n’utilise le modèle amélioré que si le modèle simple conduit, dans le cadre de ce que l’on étudie, à des conclusions contraires à l’expérience.

### 3.e Cas d’un contact non ponctuel.

Si le contact est non ponctuel, on peut décomposer l’interaction totale comme somme d’interactions quasi-ponctuelles sur des surfaces infiniment petites. On peut remplacer les composantes normales, toutes dans le même sens par un vecteur unique de même sens et les composantes tangentiels par une composante tangentielle unique, mais les points d’application de ces sommes sont des inconnues du problème. Si le calcul donne un point d’application de la composante verticale totale en dehors du « polygone de sustentation » ce n’est pas possible<sup>3</sup> et il faut comprendre que le solide bascule (voir le paragraphe 4.c p. 17). L’adaptation rigoureuse des lois de COULOMB est délicate car à deux dimensions pour les composantes tangentiels, le module (la norme) de la somme n’est pas la somme des modules. Cela dit, les lois du frottement sont approximatives et peu reproductibles; admettre que les composantes tangentielle et normale totales vérifient les lois de COULOMB est une bonne approximation.

## 4 Statique du solide.

### 4.a Les lois de la mécanique en échec.

Soit un solide au repos. Les vitesses de tous ses points et son vecteur rotation sont nuls donc tous ses éléments cinétiques, quantité de mouvement, moment cinétique et énergie

---

3. S’inspirer de la démonstration qui, dans le chapitre B-VIII, permet d’appliquer le poids total au centre de gravité et qui fait apparaître une structure de barycentre à coefficients tous de même signe; pour toute droite qui laisse d’un même côté tous les points de contact, leur barycentre est de ce côté. On laisse au lecteur le soin de se convaincre à partir de là du lien avec le polygone de sustentation et d’établir la signification de ce terme.

cinétique, sont nuls ainsi que la puissance des actions extérieures.

Le théorème du centre de gravité nous apprend alors que la somme des forces extérieures est nulle et le théorème du moment cinétique nous apprend que la somme des moments dynamiques extérieurs est nulle, ce qu'il suffit d'explicitier en un seul point ; le théorème de l'énergie cinétique ne nous apprend que  $0 = 0$ , ce qui est tautologique en diable.

Tout semble donc se présenter sous les meilleurs auspices mais cela va vite s'avérer décevant : dans la quasi-totalité des cas, le problème n'a pas une solution unique.

Prenons un exemple simple : une tige rectiligne homogène d'épaisseur négligeable, de masse  $m$ , de centre de gravité  $G$  situé en son milieu, est posée sur un sol horizontal en un point  $A$  et contre un mur vertical en un point  $B$  ; les points  $A$  et  $B$  sont ici des données du problème. Elle n'est soumise qu'à trois forces, son poids  $m \vec{g}$  localisé en  $G$ , la réaction du sol qui est une force  $\vec{R}_A$  localisée en  $A$  et la réaction du mur qui est une force  $\vec{R}_B$  localisée en  $B$  et la symétrie du problème autorise à penser que ces trois forces sont dans le plan vertical passant par la tige. Ceci est résumé dans la figure 4 p. 14.

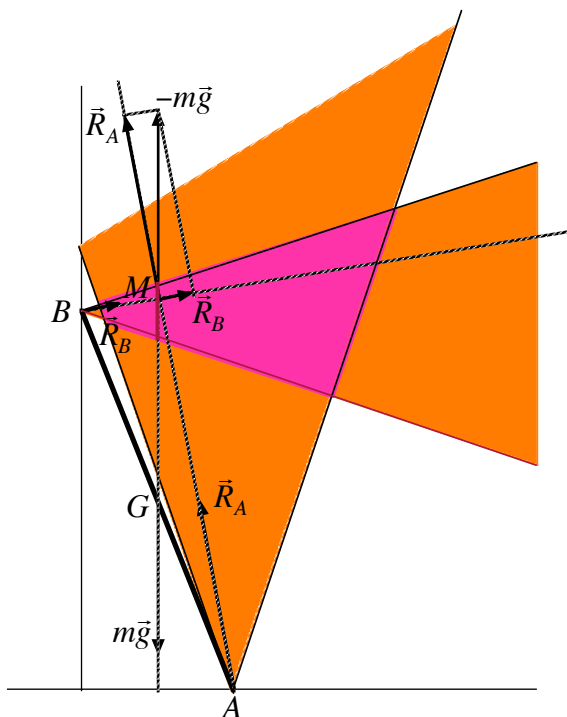


FIGURE 4 – Une tige contre un mur.

Le fait que le solide ne soit soumis qu'à trois forces coplanaires permet une résolution graphique qui illustrera mon propos simplement sans le noyer sous les calculs. Appelons  $M$  le point d'intersection de la verticale parallèle à  $m \vec{g}$  passant par  $G$  et de la droite passant

par  $A$  et parallèle à  $\vec{R}_A$ . Le moment dynamique total, calculé en  $M$  est nul, donc :

$$\vec{MA} \wedge \vec{R}_A + \vec{MB} \wedge \vec{R}_B + \vec{MG} \wedge m \vec{g} = \vec{0}$$

Or  $\vec{MA} \wedge \vec{R}_A$  et  $\vec{MG} \wedge m \vec{g}$  sont nuls car par construction  $\vec{MG}$  est parallèle à  $m \vec{g}$  et  $\vec{MA}$  à  $\vec{R}_A$  donc  $\vec{MB} \wedge \vec{R}_B$  est lui aussi nul,  $\vec{MB}$  est parallèle à  $\vec{R}_B$ ,  $M$  appartient à la droite passant par  $B$  et parallèle à  $\vec{R}_B$ . Sur la figure les trois forces sont donc concourantes.

La somme des trois forces est nulle donc :

$$-m \vec{g} = \vec{R}_A + \vec{R}_B$$

Si l'on dessine comme sur la figure, les trois vecteurs en  $M$ , cela revient à décomposer le vecteur  $-m \vec{g}$  sur deux axes  $MA$  et  $MB$ , en traçant les parallèles à ces axes par l'extrémité du vecteur. Il ne reste plus qu'à quitter la casquette de géomètre à celle de physicien en reportant les vecteurs obtenus en  $A$  et  $B$ .

Oui mais, il reste à trouver la position du point  $M$ . Il est sur la verticale passant par  $G$  milieu de  $AB$ , ça c'est sûr.  $MA$  est parallèle à  $\vec{R}_A$  dont la composante normale, ici verticale,  $\vec{N}_A$  et la composante tangentielle, ici horizontale,  $\vec{T}_A$  vérifient la loi de COULOMB  $\|\vec{T}_A\| \leq f_A \|\vec{N}_A\|$ ; on en déduit aisément que  $\vec{R}_A$  fait avec la verticale un angle inférieur à  $\alpha = \arctan f_A$  où  $f_A$  est le coefficient de frottement de la tige sur le sol, traditionnellement appelé *angle de frottement*. Le point  $M$  se trouve donc à l'intérieur d'un cône de sommet  $A$  d'axe vertical et de demi-angle au sommet  $\alpha$ , soit, puisqu'on est dans un plan, dans le dièdre de sommet  $A$ , de bissectrice verticale et de demi-angle  $\alpha$ , dessiné en orange sur la figure. Pour des raisons identiques, le point  $M$  se trouve aussi à l'intérieur d'un dièdre de sommet  $B$ , de bissectrice horizontale et de demi-angle  $\beta = \arctan f_B$  où  $f_B$  est le coefficient de frottement de la tige sur le mur, pas forcément identique à celui avec le sol, dessiné lui aussi en orange.

Le point  $M$  doit donc se trouver à l'intérieur du quadrilatère contenu dans les deux dièdres et dessiné en rose sur la figure et sur la verticale de  $G$ , soit sur le segment (s'il existe) de cette verticale contenu dans ce quadrilatère et dessiné en rouge. Il y a autant de solutions au problème que de points sur ce segment soit une infinité et il n'y a aucune loi supplémentaire à exploiter dans le cadre strict de la mécanique du solide parfait. Le problème est dit *hyperstatique* et rares sont les problèmes qui ne le soient pas, si rares qu'il ne sont pas significatifs et qu'on n'en exhibera pas. Pour résoudre un problème hyperstatique, il faudra tenir compte des déformations du solide et des lois de l'élasticité qui les relient aux forces subies; un tel problème n'est donc pas un problème de mécanique du solide mais d'élasticité du solide.

Remarque : si la tige est accotée plus bas, c'est-à-dire que  $B$  est plus bas et surtout  $A$  plus à droite, le quadrilatère « autorisé » se déforme et surtout se décale vers la droite deux fois plus que la verticale de  $G$ ; il arrive donc un moment où cette verticale ne traverse plus le quadrilatère et l'équilibre n'est plus possible, la tige glisse en  $A$  vers la droite et en  $B$

vers le bas<sup>4</sup>.

#### 4.b Phénomènes d'arc-boutement.

Soit le dispositif décrit ci-après, quelque peu improbable, je le concède, mais qui permet une explication simple et claire. Une sphère homogène de centre  $O$  de rayon  $R$  et de masse  $m$  est maintenue plaquée en un point  $I$  contre un mur vertical par un dispositif quelconque accroché au mur en un point  $A$  et exerçant une force  $\vec{R}$  parallèle à  $OA$ <sup>5</sup>; on appelle  $\alpha$  l'angle  $\widehat{IOA}$ . On essaie de faire tourner la sphère en exerçant au point  $J$  diamétralement opposé à  $I$  une force  $\vec{F}$ , supposée connue, verticale vers le bas. Le « but du jeu » est de montrer que si  $\alpha$  est assez petit, cette mise en mouvement sera impossible et donc l'équilibre toujours possible. Le mur exerce en  $I$  une réaction décomposée en une composante normale  $\vec{N}$  vers la droite (axe  $Ox$ ) selon la loi de COULOMB et une composante tangentielle  $\vec{T}$  comptée positivement vers le bas (axe  $Oz$ ). Tout ceci est résumé par la figure 5 p. 16.

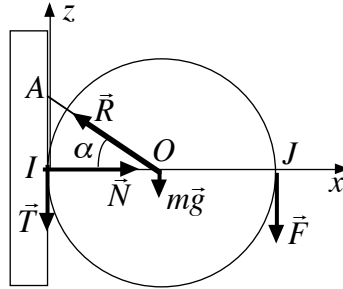


FIGURE 5 – Arc-boutement.

On note  $\vec{F} = -F \vec{e}_z$ ,  $\vec{N} = N \vec{e}_x$ ,  $\vec{T} = -T \vec{e}_z$  et  $\vec{R} = R \frac{\vec{OA}}{\|OA\|}$ . Le poids est  $m \vec{g} = -m g \vec{e}_z$ .

A l'équilibre la somme des forces est nulle ce qui donne par projection sur les axes les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} R \sin \alpha - T - F - m g = 0 \\ N - R \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

La somme des moments en  $O$  est nulle, ceux de  $\vec{R}$ ,  $\vec{N}$  et  $m \vec{g}$  sont nuls car ces forces sont appliquées en  $O$  ou leur « support » passe par  $O$ ; il reste donc  $\vec{OI} \wedge \vec{T} + \vec{OJ} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  dont on déduit aisément :

$$T = F$$

4. le bas... daboum?

5. on peut imaginer la sphère montée sur un axe perpendiculaire à la figure et passant par son centre, cet axe lui-même articulé sur un étrier semi-circulaire contournant la sphère et accroché en son milieu à un fil accroché en  $A$ .



On en déduit, en fonction des données que sont  $m g$  et  $F$ , les forces inconnues :

$$\begin{cases} T = F \\ R = \frac{2F + mg}{\sin \alpha} \\ N = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (2F + mg) = \frac{2F + mg}{\tan \alpha} \end{cases}$$

L'équilibre n'est possible, en appelant  $f$  le coefficient de frottement de la sphère sur le mur, que si  $T < f N$  soit :

$$\tan \alpha < f \frac{2F + mg}{F} = 2f \left( 1 + \frac{mg}{2F} \right)$$

donc, si  $\alpha$  est inférieur à  $\arctan(2f)$ , la condition d'équilibre est toujours vérifiée, quelle que soit la valeur de  $F$ , et l'on ne peut faire tourner la sphère de cette façon. On dit qu'il y a *arc-boutement*.

L'application la plus connue de ce phénomène est la vis ou le boulon, que on peut enfoncer en exerçant sur elle ou lui non pas une force verticale (coup de marteau) mais un couple (tournevis ou clef), et qui donc ne peut pas se desserrer spontanément. L'explication demande toutefois pour le rédacteur un dessin en coupe et en perspective qui soit lisible et pour le lecteur une habitude de lecture en trois dimensions, épargnons-nous cela.

#### 4.c Exemple de contact non ponctuel.

La figure 6 p. 17 montre une caisse parallélépipédique de hauteur  $2h$ , de longueur  $2\ell$ , de centre de gravité  $G$ , de masse  $m$ , posée sur le sol. On exerce sur elle une force horizontale  $F$  en un point  $A$  au même niveau que  $G$ . La force de contact avec le sol s'exerce en un point  $I$  inconnu de la surface de contact, à une distance  $x$  en avant de l'aplomb de  $G$  (par exemple, c'est ici pour faciliter les calculs), sa composante normale est  $N$  et sa composante tangentielle est  $T$ .

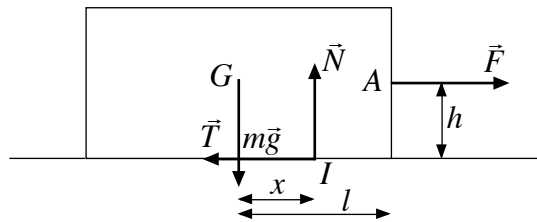


FIGURE 6 – Se remuer la caisse.

A l'équilibre la somme des forces est nulle d'où par projection  $N = mg$  et  $T = F$  et le moment cinétique en  $G$  est nul d'où  $x N = h T$  soit encore  $x m g = h F$ .

Si  $f$  est le coefficient de frottement, la condition de non-glissement est  $T < f N$  soit  $F < f m g$ . Par ailleurs, la condition de non basculement est (voir le paragraphe 3.e p. 13)

$x < \ell$  soit  $F < \frac{mg\ell}{h}$ . En augmentant progressivement  $F$  à partir de zéro et faute d'avoir pensé à mettre un casque de chantier, on aimerait que la caisse glisse sans basculer au lieu de basculer sans glisser. Pour cela il faut que la géométrie de la caisse vérifie<sup>6</sup> la condition  $\frac{l}{h} > f$ .

#### 4.d La statique peut se cacher derrière la dynamique.

Une platine en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe vertical  $Oz$  fait tourner le support vertical confondu avec  $Oz$  d'une tige homogène de masse  $m$  de longueur  $l$  pouvant tourner, grâce à une liaison parfaite, autour d'un axe horizontal  $Oy$  au sommet du support et entraîné dans le mouvement de rotation. On étudie la possibilité que la tige s'écarte d'un angle  $\theta$  fixe sous l'effet de la force centrifuge, après un régime transitoire de mise à l'équilibre. La situation est résumée par la figure 7 p. 18.

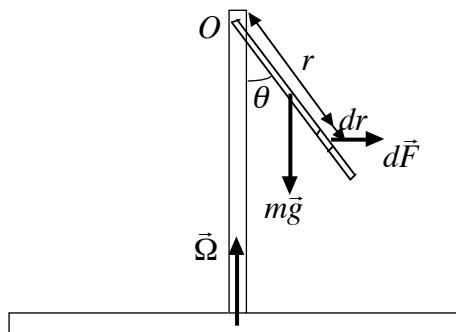


FIGURE 7 – Pendule en rotation.

On se place dans le plan tournant  $Oxz$  dans lequel évolue la tige. Dans ce plan, il y a équilibre relatif et l'on peut donc appliquer les lois de la statique, en n'oubliant pas la force d'inertie d'entraînement et en remarquant qu'à l'équilibre relatif, il n'y a pas de vitesse relative donc pas de forces de CORIOLIS. La somme des moments dynamique en  $O$  est nulle, celui exercé par la liaison parfaite est nul par définition, celui du poids  $m\vec{g}$  appliqué à mi-longueur a pour projection sur l'axe de la liaison  $-mg\frac{l}{2}\sin\theta$  et pour celui des forces d'inertie, on procède par intégration. Un segment de longueur  $dr$  donc de masse  $dm = \frac{m dr}{l}$ , à une distance  $r$  du point  $O$  donc  $\rho = r\sin\theta$  de l'axe, subit une force centrifuge radiale de module  $dF = dm\rho\omega^2 = \frac{m}{l}\omega^2\sin\theta r dr$  et de moment projeté sur l'axe de la liaison égal à  $r\cos\theta dF = \frac{m}{l}\omega^2\sin\theta\cos\theta r^2 dr$  d'où par intégration de  $r = 0$  à  $r = l$ , un moment total  $\frac{ml^2}{3}\omega^2\sin\theta\cos\theta$ .

La condition d'équilibre est donc :

$$0 = \frac{ml^2}{3}\omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta = \frac{ml^2}{3}\left(\omega^2\cos\theta - \frac{3g}{2l}\right)\sin\theta$$

6. A force de se prendre des armoires normandes sur le crâne, on finit par visualiser cette condition sans calculette.

qui a deux solutions possibles,  $\sin \theta_1 = 0$  soit  $\theta_1 = 0$  qui existe toujours et  $\cos \theta_2 = \frac{3g}{2l\omega^2}$  qui donne une solution en  $\theta$  uniquement si  $\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ .

Dans le cas où il y a deux solutions, il est intéressant d'en discuter la stabilité et la méthode énergétique est particulièrement adaptée à la discussion. L'énergie potentielle de pesanteur, avec origine en  $O$  est  $E_1 = mg z_G = -mg \frac{l}{2} \cos \theta$  et à la force radiale élémentaire  $dF = dm \rho \omega^2$  correspond une énergie potentielle élémentaire (attention au signe, ce n'est pas une force de rappel)  $dE_2 = -\frac{1}{2} dm \rho^2 \omega^2 = -\frac{1}{2} \frac{m}{l} \omega^2 \sin^2 \theta r^2 dr$  dont l'intégration conduit à  $E_2 = -\frac{1}{6} m l^2 \omega^2 \sin^2 \theta$  pour une énergie potentielle totale :

$$E = -mg \frac{l}{2} \cos \theta - \frac{1}{6} m l^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

Les équilibres, stables ou instables sont obtenus pour une énergie minimale soit  $\frac{dE}{d\theta} = 0$  ce qui redonne bien sûr l'équation précédente (avec inversion des signes) et la dérivée seconde est :

$$\frac{d^2E}{d\theta^2} = +\frac{mgl}{2} \cos \theta - \frac{m l^2}{3} \omega^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = +\frac{mgl}{2} \cos \theta + \frac{m l^2}{3} \omega^2 (1 - 2 \cos^2 \theta)$$

Pour  $\theta = \theta_1 = 0$ , on a  $\frac{d^2E}{d\theta^2} = \frac{mgl}{2} - \frac{m l^2}{3} \omega^2$  qui est positif (stabilité) pour  $\omega > \sqrt{\frac{3g}{2l}}$  (on retrouve la valeur charnière précédente) et négatif (instabilité) sinon.

Pour  $\theta = \theta_2$ , si cette valeur existe ( $\omega > \omega_c$ ) en mettant  $\frac{d^2E}{d\theta^2}$  sous la forme sous la forme suivante :  $\frac{mgl}{2} \left( \cos \theta + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} (1 - 2 \cos^2 \theta) \right)$  et  $\cos \theta_2$  sous la forme  $\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ , en posant enfin  $X = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$  on arrive, dans ce contexte où  $X > 1$ , à  $\frac{d^2E}{d\theta^2} = \frac{mgl}{2} \left( X - \frac{1}{X} \right)$  en  $\theta = \theta_2$  qui est positif (stabilité).

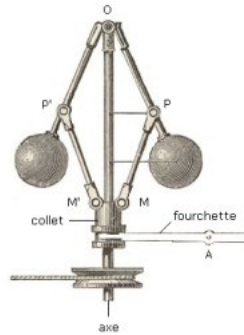


FIGURE 8 – Régulateur de Watt.

Le régulateur de WATT (voir figure 8 p. 19), inventé par le physicien éponyme<sup>7</sup> pour

7. Seule une personne qui donne son nom à quelque chose est qualifiée d'*éponyme* et non la chose. Dans une étude sur *Eugénie Grandet*, on peut parler d'héroïne éponyme. Par contre, la phrase « Eugénie Grandet, dans le roman éponyme » est une faute grossière que l'on rencontre trop souvent ; on doit dire le roman homonyme.

réguler le régime des machines à vapeur, fonctionne sur ce principe. Il comporte deux tiges symétriques alourdies par des masselottes qui lorsqu'elles s'écartent trop entraînent vers le haut, par l'intermédiaire d'un parallélogramme déformable une tringlerie de commande qui diminue le débit de vapeur injecté dans la machine et la ralentit donc.

## 5 Mouvements autour d'un axe fixe.

### 5.a Mouvement pendulaire.

Soit un pendule articulé sur un axe horizontal  $Oy$ ,  $O$  étant choisi de sorte que le plan  $Ozx$  contienne le centre de gravité  $G$ ;  $Oz$  est vertical descendant. On note  $\overrightarrow{OG} = a \vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_r$  et  $\theta$  l'angle orienté  $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OG})$ . La liaison est supposée parfaite et exerce sur le pendule une force  $\vec{F}$  supposée appliquée en  $O$ ; le poids  $Mg \vec{e}_z$  s'applique en  $G$ . La situation est résumée par la figure 9 p. 20.

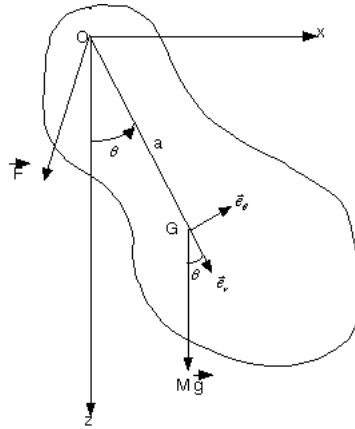


FIGURE 9 – Pendule pesant.

La position du pendule est définie par la donnée du seul scalaire  $\theta$ , c'est un système à un seul *degré de liberté* et il suffit d'une seule équation scalaire pour mettre en équation le problème; dans cette situation, le théorème de l'énergie cinétique s'impose. En appelant  $J$  le moment d'inertie du solide par rapport à  $Oy$ , l'énergie cinétique est alors égale à  $(1/2) J \omega^2 = (1/2) J \dot{\theta}^2$ ; le poids dérive de l'énergie potentielle  $-Mg z_G = -Mg a \cos \theta$  (avec un signe moins car l'axe vertical est descendant). Enfin la puissance de la force de liaison est nulle, donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - M g a \cos \theta \right) = 0$$

d'où

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - M g a \cos \theta = Cte$$

la constante étant déterminée par les conditions initiales. Par exemple, si, à  $t = 0$ , on a  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = \omega_0$ , alors :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - M g a \cos \theta = \frac{1}{2} J \omega_0^2 - M g a$$

Ce type de relation est encore une équation différentielle mais d'ordre un et non plus deux, on l'appelle *intégrale première du mouvement*<sup>8</sup>

En dérivant par rapport au temps, on tire :

$$J \dot{\theta} \ddot{\theta} + M g a \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

soit en simplifiant par  $\dot{\theta}$  :

$$J \ddot{\theta} = -M g a \sin \theta$$

équation que l'on obtiendrait directement par application du théorème du moment cinétique en  $O$  et projection sur l'axe.

Malheureusement, on ne sait pas résoudre explicitement ces équations différentielles<sup>9</sup>. Il ne faudrait surtout pas considérer cela comme un échec car il existe des algorithmes très performants de résolution d'équations différentielles et un traitement informatique permet d'étudier la solution. Par ailleurs, même si l'on ne sait rien expliciter en fonction du temps, on peut le faire en fonction de la position de  $\theta$ , ce qui n'est pas si mal<sup>10</sup> ; pour la vitesse et l'accélération, c'est déjà fait puisqu'on dispose des relations qui précèdent :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2 M g a}{J} (1 - \cos \theta)}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{M g a}{J} \sin \theta$$

On peut même calculer la force de liaison en fonction de la position de  $\theta$  par :

$$\vec{F} + M g \vec{e}_z = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = M a (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{e}_r)$$

---

8. On n'oubliera pas de remarquer que si  $(1/2) J \omega_0^2 > 2 M g a$  le pendule arrive en haut ( $\theta = \pi$ ) avec une vitesse angulaire résiduelle  $\omega_1$  telle que  $(1/2) J \omega_1^2 = (1/2) J \omega_0^2 - 2 M g a$  et le pendule a alors un mouvement toujours dans le même sens et sinon, il a un mouvement alternatif d'amplitude  $\theta_m$  telle que  $(1/2) J \omega_0^2 = M g a (1 - \cos \theta_m)$ .

9. Le classique « si c'était vrai, ça se saurait » est pour une fois un argument recevable : les mouvements pendulaires sont connus depuis Galilée (la légende raconte qu'il les étudiait en cathédrale de Pise, avec son pouls comme chronomètre) et si l'on avait trouvé une solution, il y aurait longtemps qu'elle serait enseignée ; or vous ne l'avez jamais rencontrée, cette solution.

10. On ne sait pas quand le pendule passera en tel point, mais quand il y passera, on sait déjà quelles seront sa vitesse et son accélération.

En reportant les résultats précédents et en projetant  $\vec{e}_z$  sur la base locale, la valeur de  $\vec{F}$  est :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \dots \\ &- M g (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) + M a \left[ -\frac{M g a}{J} \sin \theta \vec{e}_\theta - \left( \omega_0^2 - \frac{2 M g a}{J} (1 - \cos \theta) \right) \vec{e}_r \right] \\ \dots &= \left[ -M g \cos \theta - M a \omega_0^2 + 2 M g \frac{M a^2}{J} (1 - \cos \theta) \right] \vec{e}_r + M g \sin \theta \left[ 1 - \frac{M a^2}{J} \right] \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

L'essentiel a été dit. On reviendra plus en détail sur les mouvements d'oscillation dans le cours mécanique vibratoire et ondulatoire (chapitre D-I).

## 5.b Equilibrage d'une pièce tournante.

Soit un solide de masse  $M$ , mis en rotation, par un dispositif moteur non précisé, à vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un axe fixe (par rapport au solide et par rapport au laboratoire) choisi comme axe  $Oz$ , le vecteur rotation est donc  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ . En pratique, le solide est maintenu par deux liaisons parfaites centrées en des points  $A$  et  $B$  de l'axe. Pour alléger les calculs, on suppose que le centre de gravité du solide est dans le plan médiateur de  $AB$ . On modélise l'action des liaisons par deux forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  localisées en  $A$  et  $B$ ; on suppose pour alléger les calculs que le poids du solide est négligeable (vérification en fin de calcul).

### • La situation idéale.

On suppose d'une part que le centre de gravité  $G$  est sur l'axe (donc avec notre hypothèse simplificatrice, au milieu de  $AB$ ) et d'autre part que l'axe  $Gz$  est un axe principal de la matrice d'inertie du solide de sorte que le moment cinétique calculé en  $G$  soit  $\vec{\sigma}_G = J_{Gz} \omega \vec{e}_z$  et soit donc un vecteur constant (on rappelle que l'on suppose ici que  $\omega$  soit constant). La situation est résumée par la figure 10 p. 22.

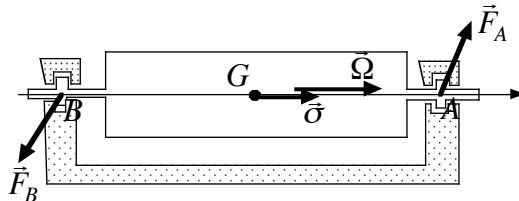


FIGURE 10 – Pièce tournante équilibrée.

Le centre de gravité  $G$  est sur l'axe et donc immobile, le théorème du centre de gravité

nous apprend donc que :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0}$$

donc  $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ .

Le théorème du moment cinétique appliqué au centre de gravité  $G$  nous apprend que :

$$\vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{0}$$

soit en reportant  $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$  :

$$\vec{0} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A - \vec{GB} \wedge \vec{F}_A = \vec{BA} \wedge \vec{F}_A$$

donc  $\vec{F}_A$  est parallèle à  $AB$  donc à l'axe. On ne peut aller plus loin (voir le paragraphe 4.a p. 13 sur les dispositifs hyperstatiques) sans savoir comment sont conçues les liaisons. Dans la pratique, si les liaisons sont bien conçues,  $\vec{F}_A$  et donc  $\vec{F}_B$  sont de l'ordre du poids et donc négligeables.

Résumons : dans la situation idéale, les forces exercées par les liaisons sur le solide donc par réaction les forces exercées par le solide sur les liaisons sont négligeables et les liaisons ne souffrent pas.

#### • Equilibrage statique.

On suppose cette fois que le centre de gravité n'est plus sur l'axe, se projette sur celui-ci en  $O$  milieu de  $AB$  et l'on notera, en coordonnées cylindriques que  $\vec{OG} = a \vec{e}_r$ . Par contre, on suppose toujours que l'axe  $Oz$  est un axe principal de la matrice d'inertie du solide de sorte que le moment cinétique calculé en  $O$  soit  $\vec{\sigma}_O = J_{Oz} \omega \vec{e}_z$  et soit donc un vecteur constant. La situation est résumée par la figure 11 p. 23.

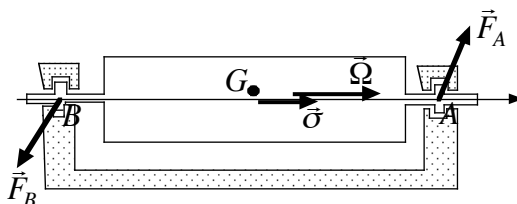


FIGURE 11 – Equilibrage statique.

Le moment cinétique, calculé cette fois en  $O$ , est ici aussi constant et puisque l'on a ici  $\vec{OB} = -\vec{OA}$  :

$$\vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{0} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A - \vec{GA} \wedge \vec{F}_B = \vec{OA} \wedge (\vec{F}_A - \vec{F}_B)$$

donc  $\vec{F}_A - \vec{F}_B$  est parallèle à l'axe et, comme plus haut, faute de connaître les liaisons, nous admettrons que si elles sont bien conçues, cette différence est de l'ordre du poids donc négligeable, d'où  $\vec{F}_B \approx \vec{F}_A$ . De toute façon, la suite fera apparaître des composantes radiales, en plus de cette inconnue axiale, et ce sont elles qui sont dramatiquement élevées.

Dans ce contexte,  $G$  a un mouvement circulaire uniforme d'accélération connue et non nulle :

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = -M a \omega^2 \vec{e}_r = \vec{F}_A + \vec{F}_B \approx 2 \vec{F}_A$$

d'où

$$\vec{F}_B \approx \vec{F}_A \approx -\frac{1}{2} M a \omega^2 \vec{e}_r$$

que l'on va comparer au poids  $\vec{P} = M \vec{g}$  par

$$\frac{\|\vec{F}_B\|}{M \|\vec{g}\|} \approx \frac{\|\vec{F}_A\|}{M \|\vec{g}\|} \approx \frac{a \omega^2}{2g}$$

Par exemple pour un vilebrequin de voiture tournant à six mille tours par minute soit cent tours par seconde, soit  $\omega = 100 \cdot 2\pi$  et avec  $g = 8,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , le rapport au poids des forces sur les liaisons, pour un décentrement  $a$  d'un millimètre est de l'ordre de 20, c'est beaucoup.

Remarque : Il est aisé de vérifier que  $G$  est sur l'axe en débrayant le dispositif moteur. Si oui, le solide est en équilibre indifférent, sinon, il tourne jusqu'à ce que  $G$  soit en dessous. Un dispositif statique suffit pour la vérification d'où le nom d'*équilibrage statique*.

### • Equilibrage dynamique.

On suppose cette fois que le centre de gravité  $G$  est à nouveau sur l'axe au milieu de  $AB$  mais cette fois  $Gz$  n'est plus axe principal de la matrice d'inertie. Le vecteur rotation  $\omega \vec{e}_z$  porté par  $Oz$  est fixe par rapport au solide. Comme dans un repère lié au solide le moment cinétique est produit de la matrice d'inertie et du vecteur rotation constant, c'est un vecteur fixe par rapport au solide qui tourne donc par rapport au laboratoire. La situation est résumée par la figure 12 p. 25.

Le centre de gravité  $G$  est sur l'axe et donc immobile, le théorème du centre de gravité nous apprend donc que :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0}$$

donc  $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ .



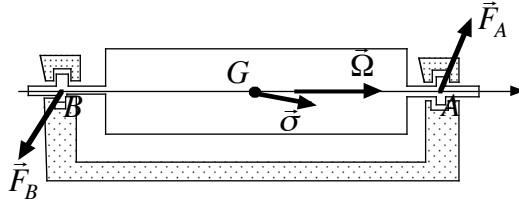


FIGURE 12 – Equilibrage dynamique.

Le théorème du moment cinétique appliqué au centre de gravité  $G$  nous apprend que :

$$\overrightarrow{GA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{GB} \wedge \vec{F}_B = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}$$

soit en reportant  $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$  :

$$\overrightarrow{GA} \wedge \vec{F}_A - \overrightarrow{GB} \wedge \vec{F}_A = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}$$

Plutôt que d'utiliser, parce qu'on l'a oubliée par exemple, la formule de changement de référentiel pour la dérivée d'un vecteur qui donnerait ici  $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$ , on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_G = \sigma_z \vec{e}_z + \sigma_r \vec{e}_r = J_{zz} \omega \vec{e}_z + J_{zr} \omega \vec{e}_r$$

où seul  $\vec{e}_r$  varie avec une dérivée temporelle égale classiquement à  $\omega \vec{e}_\theta$ , d'où, en notant  $\overrightarrow{AB} = l \vec{e}_z$  :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = J_{zr} \omega^2 \vec{e}_\theta = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A = l \vec{e}_z \wedge \vec{F}_A$$

qui a pour solution  $\vec{F}_A = \frac{J_{zr}}{l} \omega^2 \vec{e}_r$  à une constante selon  $\vec{e}_z$  près que nous considérerons négligeable comme dans les deux cas précédents. Là encore les forces exercées par le solide sur les liaisons croissent comme le carré de la vitesse de rotation et sont donc dangereuses à haut régime.

Remarque : la vérification que  $Gz$  est axe principal ne peut se faire qu'en faisant tourner le solide assez vite mais pas trop et en mettant en évidence ces forces par des capteurs appropriés. C'est pourquoi l'on parle d'*équilibrage dynamique*.

## 6 Mouvement d'un solide posé sur un support.

### 6.a Mouvement avec symétrie par rapport à un plan fixe.

- Conséquences de la symétrie.

Supposons que la forme d'un solide, la répartition de ses masses, la forme du support sur lequel il est posé et les conditions initiales permettent que le mouvement se fasse avec un plan de symétrie indépendant du temps. Une première conséquence immédiate est que le centre de gravité appartient à ce plan, une seconde, tout aussi immédiate est que le vecteur poids appartient à ce plan donc que le plan est vertical ; on le choisira comme plan  $xOz$  avec  $Oz$  vertical, par exemple descendant.

De façon plus générale toutes les grandeurs vectorielles vraies auront une symétrie par rapport à ce plan ce plan ; c'est le cas des vitesses, des quantités de mouvement, des forces et les théorèmes faisant intervenir de vrais vecteurs, comme le théorème du centre de gravité n'auront que deux projections non nulles (je veux dire donnant autre chose que  $0 = 0$ ) sur  $Ox$  et  $Oz$ . Par contre, tous les pseudo-vecteurs<sup>11</sup> seront orthogonaux au plan de symétrie, donc parallèle à  $Oy$  ; c'est le cas du vecteur rotation, des moments cinétiques et des moments dynamiques et les théorèmes faisant intervenir de tels pseudo-vecteurs n'auront qu'une seule projection non nulle, sur  $Oy$ .

Le mouvement d'un solide est connu dès que l'on connaît son vecteur rotation (une seule composante non nulle) et la vitesse de son centre de gravité  $G$  (deux composantes non nulles), ce qui donne trois inconnues mais le support impose une contrainte sur la position de  $G$  qui, en pratique, en supprime une ; il reste donc deux inconnues pour le mouvement. La force de contact (deux composantes non nulles) est aussi une inconnue (voir paragraphe 3.d p. 10), ce qui porte le nombre d'inconnues à quatre.

Pour résoudre le problème, la mécanique nous donne deux théorèmes, celui du centre de gravité (deux projections) et celui du moment cinétique (une projection) donc trois équations ; il en manque une qui ne peut pas être fournie par le théorème de l'énergie mécanique car celui-ci se déduit des deux autres.

L'équation manquante peut être donnée dans le cas de glissement par le lien entre composante tangentielle et normale (lois de COULOMB au paragraphe 3.d p. 10) et dans le cas du non glissement en exprimant que la vitesse du point de contact est nulle, ce qui donnera une relation entre vitesse du centre de gravité et vecteur rotation.

On a donc autant d'équations scalaires que d'inconnues scalaires ; les vents sont favorables, levons l'ancre ! On a choisi un exemple classique qui permet d'explorer toutes les facettes de ce type de situations.

---

11. dont la définition, à partir de vrais vecteurs utilise un produit vectoriel.

• **Exemple du roulement d'une sphère dans un cylindre creux.**

Une sphère pleine, homogène, de masse  $m$ , de rayon  $a$ , de centre  $C$ , de moment d'inertie  $J = \frac{2}{5} m a^2$  par rapport à l'axe  $Cy$  roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre fixe creux de rayon  $R$ , de centre  $O$  et d'axe  $Oy$ .  $Oz$  est la verticale descendante et  $Ox$  horizontal et orthogonal à l'axe. On note  $\theta$  l'angle orienté entre  $Oz$  et  $OC$  et  $\varphi$  l'angle dont tourne le cylindre mobile dans le repère barycentrique  $Cxyz$ . On appelle  $I$  le point de contact entre la sphère et le cylindre,  $\vec{N} = -N \vec{e}_r$  et  $\vec{T} = T \vec{e}_\theta$  les composantes normale et tangentielle de la force exercée par le cylindre fixe sur la sphère (cf figure 13 p. 27).

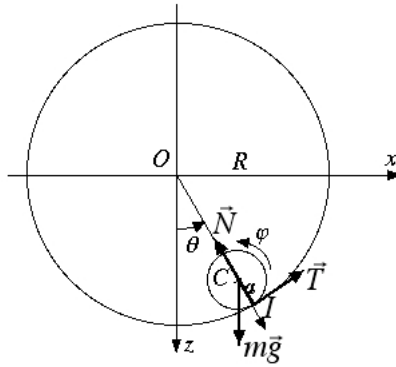


FIGURE 13 – Sphère dans cylindre creux.

La position de  $C$  est donnée par  $\theta$  et la rotation de la sphère par  $\varphi$ , les deux variables de mouvement sont identifiées et les variables de la force de contact sont  $N$  et  $T$ .

• **Hypothèse de non-glissement.**

Attention, si l'on se fie à son intuition, on se trompe aisément en considérant tacitement et fautivement que  $\varphi$  est compté à partir de  $CI$  et non de  $Cz$ .

Le vecteur rotation est identique dans le référentiel barycentrique et dans le référentiel du laboratoire. Par définition, dans le premier donc aussi dans le second, il vaut  $\omega = \dot{\varphi} \vec{e}_y$

Il n'y a pas de glissement en  $I$ , donc par définition du non-glissement,  $\vec{v}_I = \vec{0}$

Le point  $C$  décrit un cercle de centre  $O$ , de rayon  $(R - a)$  et sa position est repérée par l'angle  $\theta$ , donc classiquement, en introduisant la base locale formée de  $\vec{e}_r$ , vecteur unitaire de  $OC$ , radial et  $\vec{e}_\theta$  orthoradial,  $\vec{v}_C = (R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

La formule de changement de point, pour le champ des vitesses du cylindre mobile, donne successivement :

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_I + \vec{CI} \wedge \vec{\omega} \\ (R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta &= \vec{0} + a \vec{e}_r \wedge \dot{\varphi} \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$(R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0} - a \dot{\varphi} \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{R - a}{a} \dot{\theta}$$

• **Résolution énergétique.**

La relation précédente réduit à un seul le nombre d'inconnues du mouvement et le non-glissement a pour autre conséquence que la force de contact inconnue a une puissance nulle. Dans ces conditions, l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique ou mieux de son cousin celui de l'énergie mécanique en utilisant l'énergie potentielle de pesanteur, s'impose.

Pour la sphère de centre de gravité  $C$  et en rotation autour de l'axe fixe  $Cy$  dans son référentiel barycentrique  $Cxyz$ , on a

$$E_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + E_C^* = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Ici  $\omega = \dot{\varphi} = -\frac{R-a}{a} \dot{\theta}$  et  $\vec{v}_C = (R - a) \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  et enfin  $J = \frac{2}{5} m a^2$  d'où :

$$E_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (R - a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m a^2 \frac{(R - a)^2}{a^2} \dot{\theta}^2 = \frac{7}{10} m (R - a)^2 \dot{\theta}^2$$

par ailleurs, avec un axe vertical descendant (attention au signe), l'énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_P = -m g z_C = -m g (R - a) \cos \theta$$

La seule autre force subie par le cylindre mobile est la force de contact  $\vec{N} + \vec{T}$ , appliquée au point  $I$  de vitesse nulle puisqu'il n'y a pas glissement ; sa puissance est donc nulle et il y a conservation de l'énergie mécanique, soit

$$\frac{7}{10} m (R - a)^2 \dot{\theta}^2 - m g (R - a) \cos \theta = Cte$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\frac{7}{5} m (R - a)^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + m g (R - a) \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

Soit après simplifications par  $\dot{\theta}$ ,  $m$ ,  $(R - a)$ ,

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R - a)} \sin \theta$$

• **Période des petites oscillations.**

Si au cours du mouvement  $\theta$  reste petit alors  $\sin \theta \approx \theta$  et

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-a)}\theta$$

qui donne un mouvement sinusoïdal de pulsation  $\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-a)}}$  et de période

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-a)}{5g}}$$

Le cas de plus grandes amplitudes sera traité dans le cours de physique vibratoire et ondulatoire au chapitre D-I.

• **Nature du mouvement le plus général. Approche énergétique.**

Alors que  $\theta = 0$ , on communique à la sphère une vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega_0$ . A quelle condition le cylindre peut-il faire un tour complet ?

La conservation de l'énergie et les conditions initiales conduisent à

$$\frac{7}{10} m (R-a)^2 \dot{\theta}^2 - m g (R-a) \cos \theta = \frac{7}{10} m (R-a)^2 \omega_0^2 - m g (R-a)$$

soit après dérivation et simplification par  $\dot{\theta}$

$$\frac{7}{5} m (R-a)^2 \ddot{\theta} + m g (R-a) \sin \theta = 0$$

Aucune de ces équations ne peut être résolues explicitement ; par contre elles donnent respectivement une relation entre l'accélération angulaire et la position angulaire et entre la vitesse angulaire et la position angulaire :

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 - \frac{10g}{7(R-a)}(1 - \cos \theta)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-a)} \sin \theta$$

Une première condition pour que le cylindre arrive en haut (et fasse donc un tour complet) est qu'il ait l'énergie suffisante pour le faire. Quand il monte, son énergie potentielle augmente et son énergie cinétique diminue. Si cette dernière s'annule avant d'arriver en haut, le cylindre s'arrête puis redescend et amorce un mouvement pendulaire périodique ;

par contre, si elle reste positive jusqu'en haut, le cylindre tourne toujours dans le même sens.

La charnière entre les deux comportements est obtenue quand l'énergie cinétique, et donc aussi  $\dot{\theta}^2$ , s'annule exactement pour  $\theta = \pi$  soit  $\cos \theta = -1$ , c'est à dire, selon la relation donnant  $\dot{\theta}^2$  en fonction de  $\theta$ , pour une valeur  $\omega_1$  de  $\omega_0$  égale à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{20g}{7(R-a)}}$$

En deça de cette valeur, le cylindre s'arrête pour l'angle  $\theta_1$  qui annule  $\dot{\theta}^2$ , soit

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{10g - 7(R-a)\omega_0^2}{10g}\right)$$

• **Condition de non-décollement.**

Les conclusions de l'étude énergétique supposent que la sphère ne décolle pas, pour cela il faut la composante normale de la réaction du support ne s'annule pas (voir les lois de COULOMB au paragraphe 3.d p. 10) ; on la calcule à partir du théorème du centre de gravité appliqué au cylindre.

$$m \vec{a}_C = \vec{N} + \vec{T} + m \vec{g}$$

soit en projection sur les directions radiales et orthoradiales :

$$-m(R-a)\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta$$

$$m(R-a)\ddot{\theta} = T - mg \sin \theta$$

On en déduit, en reportant les résultats obtenus plus haut et donnant  $\dot{\theta}^2$  et  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $\theta$

$$N = mg \cos \theta + m(R-a) \left[ \omega_0^2 - \frac{10g}{7(R-a)}(1 - \cos \theta) \right] = mg \frac{17 \cos \theta - 10}{7} + m(R-a)\omega_0^2$$

$$T = mg \sin \theta + m(R-a) \frac{5g}{7(R-a)} \sin \theta = \frac{12}{7} mg \sin \theta$$

Le premier résultat montre que la valeur de  $N$  décroît de  $\theta = 0$  à  $\theta = \pi$ . Si elle ne s'annule jamais le cylindre ne décolle pas et les conclusions de l'étude énergétique restent valables ; sinon le cylindre décolle et quitte la piste, on assiste alors à une chute libre.

La charnière entre les deux comportements est obtenue quand  $N$  s'annule exactement pour  $\theta = \pi$  soit  $\cos \theta = -1$ , c'est à dire pour une valeur  $\omega_2$  de  $\omega_0$  égale à  $\omega_2 = \sqrt{\frac{27g}{7(R-a)}}$

En deçà de cette valeur, le cylindre décolle pour l'angle  $\theta_2$  qui annule  $N$ , soit

$$0 = m g \frac{17 \cos \theta_2 - 10}{7} + m (R - a) \omega_0^2$$

$$10 - 17 \cos \theta_2 = \frac{7 (R - a) \omega_0^2}{g}$$

$$\theta_2 = \arccos \left( \frac{10 g - 7 (R - a) \omega_0^2}{17 g} \right)$$

Pour que le cylindre puisse arriver en haut sans décoller, il faut  $\omega_0 > \omega_1$  et  $\omega_0 > \omega_2$ ; or  $\omega_2 > \omega_1$ , la condition pour que le mouvement puisse être toujours dans le même sens est donc  $\omega_0 > \omega_2$ .

Pour  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ , le cylindre a l'énergie suffisante pour arriver en haut mais il décolle avant.

Pour  $\omega_0 < \omega_1$ , le cylindre n'a l'énergie que pour aller en  $\theta_1$  mais il peut décoller en  $\theta_2$ ; reste à savoir si  $\theta_2$  peut être atteint c'est à dire s'il est inférieur à  $\theta_1$

L'étude est facilitée si l'on remarque que  $\cos \theta_2 = \frac{10}{17} \cos \theta_1$ .

Ou bien  $\cos \theta_1 > 0$  (soit  $\theta_1 < \pi/2$ ) alors  $\cos \theta_2 = \frac{10}{17} \cos \theta_1 < \cos \theta_1$  et  $\theta_2 > \theta_1$  et le point de décollage n'est pas atteint : le mouvement est alternatif périodique.

Ou bien  $\cos \theta_1 < 0$  (soit  $\theta_1 > \pi/2$ ) alors  $\cos \theta_2 = \frac{10}{17} \cos \theta_1 > \cos \theta_1$  et  $\theta_2 < \theta_1$  et le point de décollage est atteint : le cylindre quitte la piste.

La charnière entre les deux comportements est obtenue quand  $\cos \theta_1$  s'annule c'est à dire pour une valeur  $\omega_3$  de  $\omega_0$  égale à

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{10 g}{7 (R - a)}}$$

En résumé

- pour  $\omega_0 < \omega_3$ , le mouvement est alternatif périodique.
- pour  $\omega_3 < \omega_0 < \omega_2$ , le cylindre décolle et tombe en chute libre parabolique et peu importe si énergétiquement, il pouvait ou non atteindre le point le plus haut.
- pour  $\omega_0 > \omega_2$ , le cylindre tourne toujours dans le même sens.

On remarque au passage que la charnière énergétique à  $\omega_1$  n'est finalement pas pertinente.

#### • Condition de non-glissement.

L'étude ci-dessus suppose qu'il n'y a pas glissement. Est-ce le cas ?

Si  $f$  est le coefficient de frottement, la condition de non-glissement est  $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ , soit  $|T| < f N$  et en reportant les expressions de  $N$  et  $T$  en fonction de  $\theta$  et pour  $0 < \theta < \pi$

$$\frac{12}{7} m g \sin \theta < f m \left( g \frac{17 \cos \theta - 10}{7} + (R - a) \omega_0^2 \right)$$

$$\text{soit } 12 \sin \theta < f (7 \cos \theta - 10 + \alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{7(R - a) \omega_0^2}{g}$$

Un résolution graphique s'impose : on trace le graphe des deux membres en fonction de  $\theta$

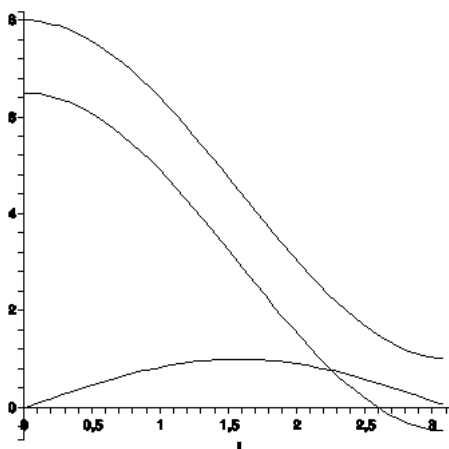


FIGURE 14 – Résolution graphique.

On a ici tracé (figure 14 p. 32) le graphe de  $12 \sin \theta$  et deux graphes pour le second membre, avec la même valeur pour  $f = 0,5$ , le premier (celui du haut) avec une valeur de  $\alpha$  plus élevée que pour le second (celui du bas). Dans le premier cas, pas d'intersection et le mouvement et celui qui a été prévu plus haut. Dans le second, il y a une intersection (à gauche de l'éventuelle position où  $N$  s'annule donc avant l'éventuel décollement) et à un moment donné le cylindre commence à glisser ; à partir de ce moment l'étude cesse d'être valable.

Remarque : on peut résoudre explicitement l'équation réécrite

$$a \cos \theta - b \sin \theta = c$$

Successivement

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta \right) = c$$



Soit  $\phi$  l'angle compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  tel que  $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$  et  $\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  donc  $\tan \phi = \frac{b}{a}$  ou  $\phi = \arctan(\frac{b}{a})$ . On a

$$\begin{aligned}\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi &= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos(\theta + \phi) &= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \theta + \phi &= \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

Ces solutions existent si  $|c| < \sqrt{a^2+b^2}$ . En y reportant les expressions de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on en déduit une condition sur  $\omega_0$  pour que le glissement s'amorce; l'expression littérale de la valeur charnière est monstrueuse mais le calcul numérique précis est possible. On peut aisément poursuivre (surtout numériquement) et en déduire les valeurs de  $\theta$  puis de  $\dot{\theta}$  serviront éventuellement à raccorder la solution valable jusqu'au début du glissement avec la solution qu'on peut rêver trouver pour le mouvement avec glissement. On préfère ici ne pas endormir le lecteur.

#### • Etude du glissement.

Comme plus haut, le théorème du centre de gravité donne

$$\begin{cases} -m(R-a)\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ m(R-a)\ddot{\theta} = T - mg \sin \theta \end{cases}$$

Ici puisqu'il y a glissement  $T = \pm f N$ , l'étude précédente montre que la limite du non-glissement est atteinte avec le signe positif. On a donc :

$$\begin{cases} -m(R-a)\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ m(R-a)\ddot{\theta} = f N - mg \sin \theta \end{cases}$$

On multiplie la seconde relation par  $f$  et on lui ajoute la première, d'où successivement :

$$\begin{aligned}m(R-a)\ddot{\theta} - f m(R-a)\dot{\theta}^2 &= mg(f \cos \theta - \sin \theta) \\ \ddot{\theta} - f \dot{\theta}^2 &= \frac{g}{R-a}(f \cos \theta - \sin \theta)\end{aligned}$$

Faute de pouvoir résoudre explicitement cette équation, on cherche un lien entre vitesse et position. A cet effet, on pose  $\dot{\theta}^2 = F(\theta)$ . Cette idée provient de l'étude précédente où l'on avait trouvé un lien entre  $\dot{\theta}^2$  et  $\theta$ .

Dérivons  $\dot{\theta}^2 = F(\theta)$  par rapport au temps : on en tire  $2\dot{\theta}\ddot{\theta} = F'(\theta)\dot{\theta}$  soit  $\ddot{\theta} = F'(\theta)/2$  et l'équation devient

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\theta} - f F = \frac{g}{R-a}(f \cos \theta - \sin \theta)$$

qui est linéaire à coefficients constants. L'équation homogène a des solutions de la forme  $Cte \exp(2f\theta)$  et l'on cherche une solution particulière par la méthode des amplitudes complexes, soit en posant,  $F = \Re(\underline{F} \exp i\theta)$  :

$$\left(\frac{i}{2} - f\right) \underline{F} = \frac{g}{R - a} (f + i)$$

On en tire l'expression de la solution particulière comme d'habitude et la constante multiplicative de la solution de l'équation homogène sera calculée à partir des conditions initiales calculées par la méthode exposée plus haut. Bien sûr, pour cette phase, on prendra l'origine des temps au début du glissement. Qu'on me permette de ne pas pousser plus loin les calculs ; l'essentiel a été dit.

• **Conclusion.**

Cet exemple nous a permis de faire le tour des problématiques de ce genre de situation. En étudier d'autres n'apporterait rien de plus.

## 6.b Cas général

On ne peut raisonner simplement que dans le cas d'un sphère pour laquelle tous les axes étant équivalents, la matrice d'inertie est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit  $\vec{\sigma}_G^* = J \vec{\omega}$ .

Soit donc une sphère pleine, homogène, de masse  $m$ , de rayon  $a$ , de centre  $G$ , de moment d'inertie  $J = \frac{2}{5} m a^2$  en contact avec un sol horizontal ; on note  $Oz$  la verticale ascendante,  $I$  le point de contact avec le sol et  $\vec{N} = N \vec{e}_z$  et  $\vec{T}$  parallèle à  $xOy$  les composantes normale et tangentielle de la force exercée par le sol sur la sphère.

Le théorème du centre de gravité donne :

$$\vec{N} + \vec{T} - m \vec{g} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

En projection verticale, on en déduit ( $G$  a une altitude  $a$  constante) que  $N = mg$ . La relation précédente se simplifie donc, puisqu'on sait désormais que  $\vec{N} - m \vec{g} = \vec{0}$  :

$$\vec{T} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

Le théorème du moment cinétique au centre de gravité donne, avec  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  appliqués en  $I$  et le poids en  $G$  :

$$\vec{GI} \wedge \vec{N} + \vec{GI} \wedge \vec{T} - \vec{GG} \wedge (m \vec{G}) = \frac{d\vec{\sigma}_G^*}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{2}{5} m a^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

d'où successivement, puisque  $\vec{GG} = \vec{0}$  et que  $\vec{N}$  est parallèle à  $\vec{GI} = -a \vec{e}_z$  :

$$-a \vec{e}_z \wedge \vec{T} = \frac{2}{5} m a^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{T} \wedge \vec{e}_z = \frac{2}{5} m a \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

On en déduit que la composante verticale de  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  est nulle, donc que la vitesse angulaire de pivotement est constante, dans le modèle adopté où il n'y a pas de résistance au pivotement (voir les lois de COULOMB au paragraphe 3.d p. 10). Pour la suite nous supposons que cette composante est nulle.

Dans l'hypothèse du non glissement soit  $\vec{v}_I = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_G$  et  $\vec{\omega}$  sont liés par :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{GI} \wedge \vec{\omega} = -a \vec{e}_z \wedge \vec{\omega}$$

Dérivons puis reportons les résultats des théorèmes de la mécanique, simplifions et utilisons la formule du double produit vectoriel :

$$\frac{d\vec{v}_G}{dt} = -a \vec{e}_z \wedge \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\frac{1}{m} \vec{T} = -a \vec{e}_z \wedge \left( \frac{5}{2ma} \vec{T} \wedge \vec{e}_z \right)$$

$$\frac{2}{5} \vec{T} = \vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{T}) = \vec{e}_z (\vec{T} \cdot \vec{e}_z) - \vec{T} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) = -\vec{T}$$

d'où  $\frac{7}{5} \vec{T} = \vec{0}$ ,  $\vec{T} = \vec{0}$  puis  $\frac{d\vec{v}_G}{dt}$ ,  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  nuls et  $\vec{v}_G$  et  $\vec{\omega}$  constants. Bref il s'agit d'un mouvement uniforme de roulement sans glissement sans intérêt.

Par contre, s'il y a glissement, le module de  $\vec{T}$  est connu, c'est le produit de celui de  $\vec{N}$  soit  $mg$  par le coefficient de frottement  $f$  et sa direction est celle de  $\vec{v}_I$  et de sens opposé. Le seul problème est que  $\vec{v}_I$  est inconnue, qu'elle dépend du temps et qu'a priori sa direction aussi (ce dernier point n'est pas évident à subodorer). Prenons en notre parti en notant  $\vec{u}(t)$  (puis  $\vec{u}$  en gardant à l'esprit qu'il varie) le vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $\vec{v}_I$  ; on a donc :

$$\vec{T} = -f m g \vec{u}(t)$$

et en reportant dans les résultats des théorèmes de la mécanique, après simplification par  $m$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = -f g \vec{u} \\ a \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{5}{2} f g \vec{u} \wedge \vec{e}_z \end{cases}$$

Notons maintenant  $\vec{v}_I = v(t) \vec{u}(t)$  (puis  $v \vec{u}$ ); le champ des vitesses d'un solide permet d'écrire :

$$\vec{v}_I = v(t) \vec{u}(t) = \vec{v}_G + \vec{IG} \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_G + a \vec{e}_z \wedge \vec{\omega}$$

Dérivons cette dernière relation pour exploiter les résultats précédents, d'où successivement :

$$\begin{aligned} \frac{d(v \vec{u})}{dt} &= \frac{d\vec{v}_G}{dt} + a \vec{e}_z \wedge \frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \vec{u} + v \frac{d\vec{u}}{dt} &= -f g \vec{u} - \frac{5}{2} f g \vec{e}_z \wedge (\vec{u} \wedge \vec{e}_z) \\ \frac{dv}{dt} \vec{u} + v \frac{d\vec{u}}{dt} &= -f g \vec{u} - \frac{5}{2} f g [\vec{u} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) - \vec{e}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{u})] \\ \frac{dv}{dt} \vec{u} + v \frac{d\vec{u}}{dt} &= -f g \vec{u} - \frac{5}{2} f g \vec{u} = -\frac{7}{2} f g \vec{u} \end{aligned}$$

On se souvient que  $\vec{u}(t)$  est un vecteur unitaire d'où  $\vec{u}^2 = 1$  et en dérivant par rapport au temps (abstraction faite du facteur 2)  $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ ; donc en multipliant scalairement la dernière relation par  $\vec{u}$ , on tire :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{7}{2} f g$$

qui apporte une simplification dans cette même relation qui aboutit à :

$$v \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0}$$

d'où  $\frac{d\vec{u}}{dt}$  est nul et  $\vec{u}$  un vecteur constant que nous noterons  $\vec{u}_0$ .

De  $\frac{dv}{dt} = -\frac{7}{2} f g$ , on déduit, en notant  $v_0$  la valeur initiale :

$$v(t) = v_0 - \frac{7}{2} f g t$$

(qui s'annule pour  $t = \frac{2v_0}{7fg}$  après quoi on retrouve le roulement sans glissement unilatérale).

Le plus spectaculaire reste à venir; en effet on a  $\vec{T} = -f m g \vec{u}_0$  qui est donc un vecteur constant et non nul et le théorème du centre de gravité conduit alors à :

$$\frac{d\vec{v}_G}{dt} = -f g \vec{u}_0$$

ce qui montre que  $G$  a un mouvement uniformément accéléré donc décrit a priori une trajectoire parabolique. Fignolons. En appelant  $\vec{v}_{G_0}$  la vitesse initiale de  $G$  et  $G_0$  sa position initiale, on tire en intégrant successivement :

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \vec{v}_{G_0} - f g t \vec{u}_0 \\ \overrightarrow{G_0G} &= \vec{v}_{G_0} t - \frac{1}{2} f g t^2 \vec{u}_0\end{aligned}$$

qui est une vraie parabole dès que  $\vec{v}_{G_0}$  et  $\vec{v}_{I_0} = v_0 \vec{u}_0$  ne sont pas parallèles, soit grâce à la relation fondamentale du champ des vitesses d'un solide, dès que  $\overrightarrow{GI} \wedge \omega_0$  est non parallèle à  $\vec{v}_{G_0}$  donc  $\vec{\omega}_0$  non orthogonal à  $\vec{v}_{G_0}$ .

Les champions de billard<sup>12</sup> arrivent à donner à la bille de telles conditions initiales et arrivent à lui imposer de contourner une seconde pour toucher la troisième qui se cache derrière. Ce coup s'appelle un « massé » et on peut trouver avec un peu de chance des vidéos spectaculaires sur internet.

## 7 Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Cette partie est d'un abord ardu. Je n'en voudrais donc pas au lecteur qui décrocherait ; qu'il n'oublie toutefois pas d'aller lire la partie 8 qui débute p. 54.

### 7.a Repérage de l'orientation du solide. Vecteur rotation.

A deux dimensions, il est aisé de repérer l'orientation d'un objet et un seul angle suffit à le faire. Donner l'orientation d'un solide dans l'espace est notablement plus compliqué. La méthode la plus couramment appliquée est celle des *angles d'EULER*. On choisit un repère  $Ox'y'z'$  quelconque lié au solide (toutefois, il est adroit de choisir  $O$  au centre de gravité ou en un point fixe du solide s'il en existe un et de choisir comme axes les axes principaux de la matrice d'inertie en  $O$  pour la rendre diagonale). On compare son orientation à celle d'un repère  $Oxyz$  dont les axes sont parallèles à ceux du repère choisi dans le laboratoire.

Pour cela, on considère que l'on passe de  $Oxyz$  à  $Ox'y'z'$  par trois rotations successives, dessinées sur la figure 15 p. 38 :

- une rotation d'un angle  $\psi$ , appelé *angle de précession*, autour de  $Oz$  amenant  $Ox$  en  $Ou$  et  $Oy$  en  $Ov$ , ces quatre derniers axes sont dans le plan dessiné en jaune pâle.
- une rotation d'un angle  $\theta$ , appelé *angle de nutation*, autour de  $Ou$  amenant  $Ov$  en  $Ow$  et  $Oz$  en  $Oz'$  (ces quatre derniers axes sont dans le plan dessiné en rouge) et le plan  $uOv$  (jaune pâle) en  $uOw$  (jaune orangé).
- une rotation d'un angle  $\varphi$ , appelé *angle de rotation propre*, autour de  $Oz'$  amenant  $Ou$  en  $Ox'$  et  $Ow$  en  $Oy'$ , ces quatre derniers axes sont dans le plan dessiné en jaune orangé.

---

12. le vrai, à trois billes.

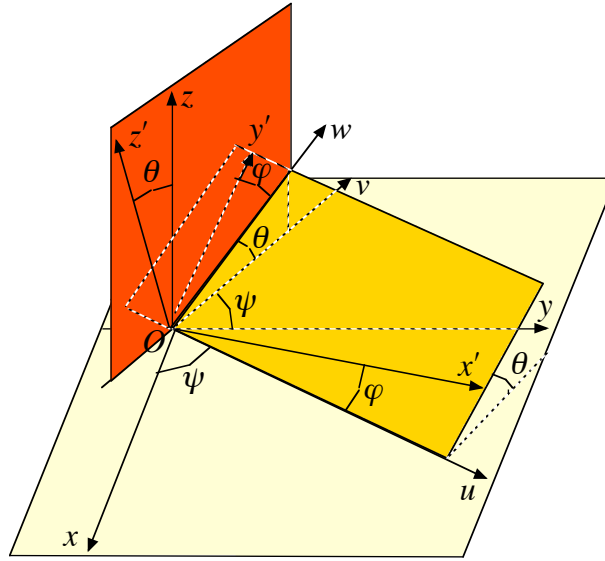


FIGURE 15 – Angles d'Euler.

La formule de composition des vecteurs rotation (voir chapitre B-VIII), appliquée en cascade, nous convainc rapidement que le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  du solide est somme des trois vecteurs des trois rotations élémentaires soit :

$$\vec{\omega} = \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_u + \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'}$$

Dans le cas général ce n'est pas aisé à exploiter car pour exprimer  $\vec{\sigma}_O$ , il faut se placer dans une base vectorielle liée au solide ; donc on exprime  $\vec{e}_z$  en fonction de  $\vec{e}_{z'}$  et  $\vec{e}_w$  puis  $\vec{e}_u$  et  $\vec{e}_w$  en fonction de  $\vec{e}_{x'}$  et  $\vec{e}_{y'}$ . On vous passe les calculs et l'on arrive à l'expression suivante pour  $\vec{\omega}$  :

$$\left( \sin \theta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_{x'} + \left( \sin \theta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_{y'} + \left( \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{e}_{y'}$$

si l'on a pris la précaution de choisir la base  $Ox'y'z'$  qui diagonalise la matrice d'inertie, on en déduit rapidement l'expression du moment cinétique en  $O$  dans cette base vectorielle et, pour utiliser le théorème du moment cinétique, il faudra la dériver dans le référentiel du laboratoire par :

$$\frac{d\sigma}{dt} \Big|_{Oxyz} = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{Ox'y'z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}$$

Inutile de dire que le résultat sera inexploitable, sauf approximation (voir plus loin l'approximation gyroscopique).

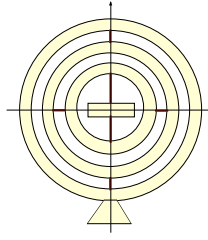


FIGURE 16 – Suspension à la Cardan.

Remarque : la figure 16 p. 39 montre un dispositif classique, appelé suspension à la CARDAN qui permet à la fois de maintenir fixe un point  $O$  d'un solide et de lui permettre toutes les orientations possibles dans l'esprit des angles d'EULER<sup>13</sup>.

Un anneau vertical fixe représentant le plan  $Oxy$  de la figure 15 p. 38 est relié par une liaison selon  $Oz$  à un second anneau qui peut tourner de l'angle  $\psi$  de précession et représente le plan  $Ouz$ . Le second anneau est relié par une liaison horizontale selon  $Ou$  à un troisième anneau qui peut tourner de l'angle  $\theta$  de nutation et représente le plan  $Ovz'$ . Ce dernier anneau est relié par une liaison selon  $Oz'$  à un solide qui peut tourner de l'angle  $\varphi$  de rotation propre. Le point fixe du solide est le centre commun aux trois anneaux.

## 7.b Equations d'Euler.

On peut rêver de travailler en deux temps. On appelle<sup>14</sup>  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les composantes de  $\vec{\omega}$  dans la base liée au solide. Si l'on a travaillé avec la base qui rend la matrice d'inertie diagonales avec les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on a successivement, en notation par des vecteurs colonnes relatifs à la base  $Ox'y'z'$  :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O = \begin{pmatrix} A X \\ B Y \\ C Z \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{Ox'y'z'} = \begin{pmatrix} A \frac{dX}{dt} \\ B \frac{dY}{dt} \\ C \frac{dZ}{dt} \end{pmatrix}$$

13. Euler ayant vécu deux cents ans après Cardan, il est plus raisonnable de dire que les angles d'Euler sont dans l'esprit de la suspension à la Cardan.

14. La tradition est de les appeler  $p$ ,  $q$  et  $r$  mais cela nuit à la lisibilité de la résolution géomètre qui suit.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \Big|_{Oxyz} = \begin{pmatrix} A \frac{dX}{dt} \\ B \frac{dY}{dt} \\ C \frac{dZ}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} AX \\ BY \\ CZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \frac{dX}{dt} + (C - B) Y Z \\ B \frac{dY}{dt} + (A - C) Z X \\ C \frac{dZ}{dt} + (B - A) X Y \end{pmatrix}$$

Si  $O$  est un point fixe ou le centre de gravité, et en notant  $\mathcal{M}_X$ ,  $\mathcal{M}_Y$  et  $\mathcal{M}_Z$  les projections du moment dynamique en  $O$ , on arrive aux *équations d'EULER* :

$$\begin{cases} A \frac{dX}{dt} + (C - B) Y Z = \mathcal{M}_X \\ B \frac{dY}{dt} + (A - C) Z X = \mathcal{M}_Y \\ C \frac{dZ}{dt} + (B - A) X Y = \mathcal{M}_Z \end{cases}$$

Si l'on donne les expressions du moment dynamique et si l'on pouvait en déduire par résolution de ce système les expressions de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , il suffirait de résoudre ensuite, au vu du paragraphe précédent, le système suivant :

$$\begin{cases} \sin \theta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\theta}{dt} = X \\ \sin \theta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} = Y \\ \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = Z \end{cases}$$

mais ce dernier point se présente plutôt mal.

De toute façon, la première étape n'est pas linéaire et il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les systèmes d'équations non-linéaires. Pire encore, sa forme simple masque le fait que le moment dynamique au second membre est fonction par exemple des angles d'EULER qui n'ont pas de lien immédiat avec les variables choisies au premier membre et, en fait, on n'a pas progressé du tout. Toutefois, elle permet, malgré la non-linéarité, des remarques pertinentes dans le cas où le moment dynamique est nul et où l'on peut rêver résoudre les équations d'EULER car le problème qui vient d'être évoqué disparaît.

### 7.c Mouvement à la Poinsot, étude analytique.

#### • Définition.

On appelle *mouvement à la POINSOT*<sup>15</sup> le mouvement d'un solide dont un point, noté  $O$ , est soit fixe dans le référentiel du laboratoire, soit confondu avec le centre de gravité et soumis à des forces localisées en  $O$  et dont le moment en  $O$  est donc nul et la puissance nulle. C'est en particulier le cas d'un solide isolé, par exemple la Terre dans le référentiel de FOUCAULT (voir le chapitre B-III sur le choix d'un référentiel), tout au moins en première approximation.

15. La tradition utilise « à la » au lieu de « de » ; sans doute une gentille moquerie.



• **Etude analytique.**

Le théorème du moment cinétique est valable en un point fixe ou au centre de gravité donc les équations d'EULER sont valables et donnent ici :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} + (C - B) Y Z = 0 \\ \frac{dY}{dt} + (A - C) Z X = 0 \\ \frac{dZ}{dt} + (B - A) X Y = 0 \end{cases}$$

Multiplions la première par  $X$ , la deuxième par  $Y$  et la dernière par  $Z$ , on arrive à :

$$\begin{cases} X \frac{dX}{dt} + (C - B) X Y Z = 0 \\ Y \frac{dY}{dt} + (A - C) X Y Z = 0 \\ Z \frac{dZ}{dt} + (B - A) X Y Z = 0 \end{cases}$$

Appelons  $s(t)$  une primitive du produit  $X Y Z$ , par exemple la primitive qui s'annule en  $t = 0$ ; bien sûr c'est une fonction inconnue. On a donc :

$$\begin{cases} X \frac{dX}{dt} + (C - B) \frac{ds}{dt} = 0 \\ Y \frac{dY}{dt} + (A - C) \frac{ds}{dt} = 0 \\ Z \frac{dZ}{dt} + (B - A) \frac{ds}{dt} = 0 \end{cases}$$

D'où par intégration, en appelant  $X_0$ ,  $Y_0$  et  $Z_0$  les valeurs à  $t = 0$  de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  qui font partie, directement ou indirectement, des données du problème et en rappelant que l'on a choisi  $s$  de sorte que  $s(0) = 0$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} X^2 + (C - B) s = \frac{1}{2} X_0^2 \\ \frac{1}{2} Y^2 + (A - C) s = \frac{1}{2} Y_0^2 \\ \frac{1}{2} Z^2 + (B - A) s = \frac{1}{2} Z_0^2 \end{cases}$$

Supposons pour fixer les idées que  $A > B > C$ , on peut alors écrire :

$$\begin{cases} X^2 = 2(B - C) s + X_0^2 = 2(B - C)(s + s_1) \\ Y^2 = -2(A - C) s + Y_0^2 = 2(A - C)(s_2 - s) \\ Z^2 = 2(A - B) s + Z_0^2 = 2(A - B)(s + s_3) \end{cases}$$

où les grandeurs positives  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  sont définies par les égalités ci-dessus et s'avèrent connues à partir des données du problème ( $s_1 = \frac{X_0^2}{2(B-C)}$  et analogues).

En supposant pour fixer les idées que  $s_3 > s_1$ , les relations qui précèdent supposent que  $-s_3 < -s_1 < s < s_2$ , d'où pour  $s$  entre  $-s_1$  et  $s_2$  et au signe près (la suite prouvera

que la solution contient quatre branches, deux correspondant au signe positif et deux au signe négatif) avec  $K = \sqrt{8(A-C)(A-B)(B-C)}$  :

$$\frac{ds}{dt} = X Y Z = K \sqrt{(s+s_1)(s_2-s)(s+s_3)}$$

d'où par séparation des variables puis intégration avec  $s(0) = 0$

$$K t = \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\sqrt{(\tilde{s}+s_1)(s_2-\tilde{s})(\tilde{s}+s_3)}}$$

Le temps est une « intégrale elliptique » de  $s$  dont la fonction réciproque  $s(t)$  est appelée « fonction elliptique ». Tout ceci ne peut être explicité et relève d'algorithmes numériques mais le progrès est immense : les algorithmes numériques de calcul d'intégrales sont plus aisés à mettre en œuvre et il est plus facile d'y encadrer les erreurs commises que pour la résolution d'équations différentielles, non-linéaires de surcroît.

En reportant  $s(t)$  ainsi calculé dans la dernière version du système on en déduit, au moins numériquement,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  en fonction du temps donc l'évolution de vecteur rotation dans le référentiel lié au solide. Par contre, en déduire les angles d'EULER en fonction du temps restera mission impossible.

Voyons donc les choses autrement.

## 7.d Solutions permanentes.

On se place toujours dans le cadre d'un mouvement à la POINSONOT.

On appelle solution permanente une solution pour laquelle la direction du vecteur rotation est indépendante du temps, par rapport au référentiel du laboratoire bien sûr, car constante dans un référentiel dont le mouvement est inconnu, ça n'avance guère les choses.

La formule  $\frac{d\vec{V}}{dt}\Big|_{Oxyz} = \frac{d\vec{V}}{dt}\Big|_{Ox'y'z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$  donne ici :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{Oxyz} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{Ox'y'z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \frac{d\omega}{dt}\Big|_{Ox'y'z'}$$

qui montre que  $\vec{\omega}$  a la même dérivée dans les deux référentiels. Notons  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire fixe par rapport au laboratoire et a priori mobile par rapport au solide. Le vecteur  $\vec{u}$  a des dérivées a priori différentes dans les deux référentiels mais  $\omega$ , scalaire, la même. De  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{Oxyz} = \frac{d\omega}{dt}\Big|_{Ox'y'z'}$ , on tire successivement :

$$\frac{d(\omega \vec{u})}{dt}\Big|_{Oxyz} = \frac{d(\omega \vec{u})}{dt}\Big|_{Ox'y'z'}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} \vec{u} + \omega \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Oxyz} &= \frac{d\omega}{dt} \vec{u} + \omega \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Ox'y'z'} \\ \omega \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Oxyz} &= \omega \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Ox'y'z'} \\ \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Oxyz} &= \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Ox'y'z'} \end{aligned}$$

Or par hypothèse  $\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Oxyz}$  est nul, donc  $\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{Ox'y'z'}$  aussi. Si le vecteur rotation a une direction fixe par rapport au laboratoire, il a aussi une direction fixe par rapport au solide.

Le chapitre précédent montre que l'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire se calcule aisément dans la base de projection liée au solide par une forme quadratique, soit, sous forme matricielle (on calcule pour alléger l'écriture le double de l'énergie) :

$$2E = {}^t(\vec{\omega})(J)(\vec{\omega}) = \omega^2 {}^t(\vec{u})(J)(\vec{u}) = Cte\omega^2$$

en utilisant le fait que  $\vec{u}$  est constant par rapport au solide. Par ailleurs la puissance des forces toutes appliquées en  $O$  de vitesse nulle est nulle donc l'énergie est constante,  $\omega$  aussi et finalement  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$  aussi. Si la direction du vecteur rotation est constante dans le référentiel du laboratoire, le vecteur rotation est constant dans ce référentiel et dans celui du solide.

On cherche donc des mouvements pour lesquels  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont constants et les équations d'EULER deviennent alors :

$$\begin{cases} (C - B) Y Z = 0 \\ (A - C) Z X = 0 \\ (B - A) X Y = 0 \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

- Les trois moments d'inertie  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont deux à deux différents. On vérifie alors aisément que le système d'équations entraîne que deux des composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont nulles. Le vecteur rotation est dirigé selon un axe principal de la matrice d'inertie (et alors le moment cinétique lui est parallèle).
- Deux moments d'inertie, disons  $B$  et  $C$ , sont égaux et différents du troisième (c'est la cas d'un solide de révolution mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre le contre-exemple d'un parallélépipède à deux cotés égaux). Une des équations disparaît et il reste deux type de solutions :
  - $Y = Z = 0$  et le vecteur rotation est dirigé selon l'axe principal  $Ox'$  de la matrice d'inertie.
  - $X = 0$  et le vecteur rotation est dans le plan  $y'Oz'$ , or dans ce plan, puisque les deux moments sont égaux, toutes les directions sont des directions propres de la matrice d'inertie.

- Les trois moments d’inertie sont égaux (une sphère ou un cube). Certes toutes les valeurs de  $\vec{\omega}$  sont solutions, mais toutes les directions sont des directions propres.

Bref les seules solutions permanentes sont celles pour lesquelles le vecteur rotation est dirigé selon une direction propre de la matrice d’inertie et le moment cinétique est alors constant et parallèle au vecteur rotation.

## 7.e Etude géométrique.

On se place toujours dans le cadre d’un mouvement à la POINSOT mais pas dans celui d’une solution permanente.

### • Conséquences géométriques des conservations.

Dans ce cas, la méthode analytique n’est pas adaptée. On doit à Louis POINSOT une résolution géométrique élégante. Certes l’enseignement de la géométrie a été sacrifié, mais je crois pouvoir rendre les choses accessibles avec des figures détaillées et commentées et un « rappel » mathématique rédigé en italique, avec une démonstration adapté à notre seul point de vue.

Dans le référentiel du laboratoire le théorème du moment cinétique, avec uniquement des forces appliquées en  $O$  donc de moment dynamique nul en ce point, nous apprend que le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  est une constante. De même, le théorème de l’énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire, avec uniquement des forces appliquées en  $O$  de vitesse nulle, donc avec une puissance nulle, nous apprend que cette énergie cinétique est constante, d’où après multiplication par deux  $2E = \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_O$  est constant.

La norme du vecteur constant  $\vec{\sigma}_O$  et la valeur de l’énergie cinétique ne dépendent pas de la base de projection choisie pourvue qu’elle soit orthonormée ; prenons donc celle liée au solide qui rende la matrice d’inertie diagonale. En reprenant les notations définies plus haut, si les composantes de  $\vec{\omega}$  y sont  $X, Y$  et  $Z$ , celle de  $\vec{\sigma}_O$  y sont  $AX, BY$  et  $CZ$  ; on peut donc affirmer que :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_O^2 = A^2 X^2 + B^2 Y^2 + C^2 Z^2 = Cte \\ 2E_C = \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_O = AX^2 + BY^2 + CZ^2 = Cte \end{cases}$$

Dans la figure 17 p.45, dessinée dans le référentiel lié au solide, le vecteur rotation est représenté par un point  $R$  de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  de sorte que  $\vec{\omega} = \vec{OR}$ . Les relations qui précèdent montre que le point  $R$  appartient à deux ellipsoïdes. Un ellipsoïde est une surface qui est à la sphère ce que l’ellipse est au cercle. Ils ont en commun trois axes de symétries selon  $X$ , selon  $Y$  et selon  $Z$  ; pour le premier, les demi-longueurs des axes sont respectivement  $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}$  et  $\frac{1}{C}$  et pour le second, elles sont respectivement  $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{C}}$ .

Sur la figure, en perspective, seul le second est dessiné avec  $R$  sur l’avant donc en dehors

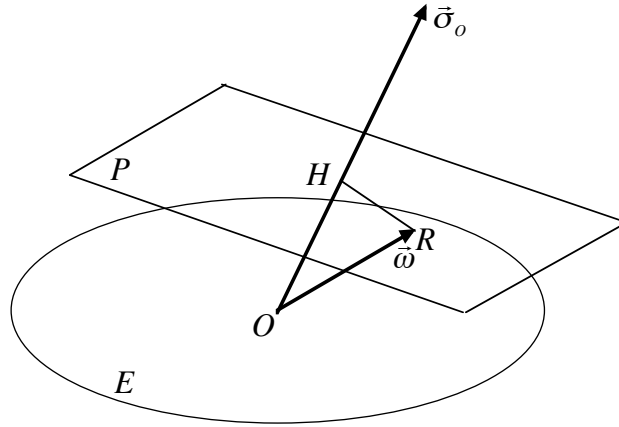


FIGURE 17 – Mouvement à la Poinsot.

du « contour visible ». Nous l'appellerons ici *ellipsoïde d'inertie*<sup>16</sup> par commodité. On l'a choisi à cause de la propriété qui suit.

### Plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie.

*Rappel mathématique adapté : Soit un point  $R$  de cet ellipsoïde de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  dans le référentiel du solide, vérifiant donc  $A X^2 + B Y^2 + C Z^2 = 2 E_C$  et un point  $R'$  de l'ellipsoïde, infiniment voisin de  $R$ , de coordonnées  $X' = X + dX, Y' = Y + dY$  et  $Z' = Z + dZ$ , vérifiant donc  $A X'^2 + B Y'^2 + C Z'^2 = 2 E_C$ . Par différence, entre les deux dernières relations, différence assimilée à une différentielle, on a :*

$$0 = d(A X^2 + B Y^2 + C Z^2) = 2 A X dX + 2 B Y dY + 2 C Z dZ$$

*soit aussi, après division par 2 :*

$$0 = A X (X' - X) + B Y (Y' - Y) + C Z (Z' - Z)$$

*que nous noterons sous la forme  $f(X', Y', Z') = 0$  puisque l'on s'intéresse à tous les points  $R'$  infiniment proches d'un point  $R$  donné. Comme  $f(X', Y', Z')$  est du premier degré vis-à-vis des trois variables, il s'agit aussi d'un plan qui par construction s'identifie, au second ordre près à l'ensemble des points de l'ellipsoïde proche de  $R$ . On reconnaît là l'équation du plan tangent en  $R$  à l'ellipsoïde.*

L'équation du plan tangent à l'ellipsoïde au point  $R$  est donc :

$$0 = A X (X' - X) + B Y (Y' - Y) + C Z (Z' - Z)$$

<sup>16</sup>. Le véritable ellipsoïde d'inertie correspond à l'équation  $A X^2 + B Y^2 + C Z^2 = 1$ .

que l'on peut interpréter comme le produit scalaire de  $\overrightarrow{RR'}$  et de  $\overrightarrow{\sigma_O}$  soit  $\overrightarrow{RR'} \cdot \overrightarrow{\sigma_O} = 0$ , ce qui prouve que ce plan tangent est orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{\sigma_O}$  fixe dans le référentiel du laboratoire.

Appelons  $H$  la projection de  $O$  sur ce plan tangent ; la distance  $h = OH$  est donc (voir figure) la projection de  $\vec{\omega} = \overrightarrow{OR}$  sur la direction de  $\overrightarrow{\sigma_O}$  soit :

$$h = OH = \vec{\omega} \cdot \frac{\overrightarrow{\sigma_O}}{\|\overrightarrow{\sigma_O}\|} = \frac{\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\sigma_O}}{\|\overrightarrow{\sigma_O}\|} = \frac{2E_C}{\|\overrightarrow{\sigma_O}\|} = \frac{Cte}{Cte} = Cte$$

Le plan tangent à l'ellipsoïde en  $R$  est donc perpendiculaire en un point fixe à un vecteur fixe ; c'est donc un plan fixe dans le référentiel du laboratoire. On peut présenter les choses en disant que l'ellipsoïde d'inertie, lié au solide est posé, tête en bas sur la figure, sur ce plan fixe.

A un instant donné, le point  $R$  tel que  $\omega = \overrightarrow{OR}$  et considéré comme point du solide, a une vitesse donnée par :

$$\vec{v}_R = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OR} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

que l'on peut présenter ainsi :

Dans un mouvement à la POINSOT,  
l'ellipsoïde d'inertie lié au solide  
roule sans glisser sur un plan fixe  
orthogonal au moment cinétique en  $O$ .

Ce qui permettra au moins de nombreuses conclusions qualitatives intéressantes.

## 7.f Stabilité des axes. Polhodie.

Le vecteur rotation n'est fixe ni dans le référentiel du laboratoire, ni dans celui lié au solide. L'ensemble des directions qu'il prend dans ce second référentiel s'appelle la polhodie<sup>17</sup>. Ce chemin sera décrit, pour des conditions initiales données donc des valeurs données du moment cinétique et de l'énergie cinétique, par la courbe suivie par le point  $R$  sur l'ellipsoïde d'inertie.

Ce point  $R$  appartient (cf supra) aux deux ellipsoïdes d'équations :

$$\begin{cases} A^2 X^2 + B^2 Y^2 + C^2 Z^2 = \overrightarrow{\sigma_O}^2 \\ A X^2 + B Y^2 + C Z^2 = 2 E_C \end{cases}$$

et la polhodie est donc l'intersection de ces deux ellipsoïdes<sup>18</sup>.

17. mot de fabrication moderne sur les mots grecs « polos » (le pivot, qui a donné le mot « pôle ») et « hodos » (le chemin comme dans « cathode ») donc le chemin suivi par l'axe des pôles.

18. pas de panique!

Supposons ici que les trois moments d'inertie soient deux à deux différentes et choisissons les axes de sorte que  $A > B > C$  et éliminons  $Y$  entre ces équations en multipliant la seconde par  $B$  et en la soustrayant à la première. Qu'obtient-on ? Une relation entre  $X$  et  $Z$  qui est tout simplement l'équation de la projection de la polhodie sur le plan  $OXZ$ , soit :

$$A(A - B) X^2 + C(C - B) Z^2 = \vec{\sigma}_O^2 - 2 B E_C = Cte$$

Puisque  $A - B$  et  $C - B$  sont de signe opposés, il s'agit d'une hyperbole, ou tout au moins la portion d'hyperbole à l'intérieur de la projection de l'ellipsoïde.

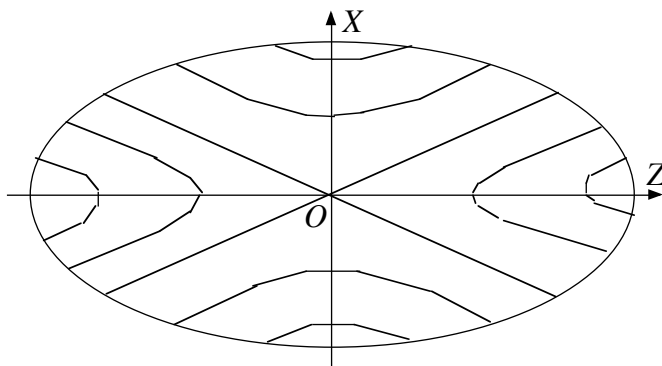


FIGURE 18 – Polhodie.

La figure 18 p.47 montre<sup>19</sup> différentes projections de polhodies correspondant à différentes conditions initiales ; dans l'espace, cela correspond à des courbes non planes qui font le tour soit de l'axe  $OX$  soit de l'axe  $OZ$ , comme le montre la figure, composées d'une moitié au dessus du plan de figure et d'une moitié en dessous avec la même projection. Les polhodies possibles sont donc toutes des courbes fermées avec deux plans de symétrie orthogonaux.

Remarque : Chaque courbe possible a quatre portions où le produit  $XYZ$  a un signe alterné, ce qui justifie, dans la résolution analytique ci-dessus, que ce signe n'est pas imposé.

La figure montre que l'on peut trouver des polhodies qui restent voisines des directions des solutions permanentes en  $OX$  et  $OZ$  (le grand axe et le petit axe) mais pas de la solution permanente en  $OY$  (l'axe moyen). En ce sens le grand axe et le petit axe sont des axes permanents stables et l'axe moyen instable. Sans liaison, on ne peut pas espérer faire tourner une boîte d'allumettes autour d'un axe perpendiculaire aux grattoirs.

Les mesures de la polhodie de l'axe des pôles terrestres montre effectivement un mouvement périodique connu sous le nom d'*oscillation de CHANDLER* d'une période de quatorze mois, mais on a peu de recul sur les mesures car les pôles sont des régions hostiles et la mesure est perturbée par la dérive des plaques tectoniques.

19. Les hyperboles ne sont que suggérées.

## 7.g Mouvement de l'axe de rotation. Herpolhodie.

Le vecteur rotation n'est fixe ni dans le référentiel du laboratoire, ni dans celui lié au solide, avons-nous vu plus haut. Intéressons-nous maintenant à l'ensemble des directions qu'il prend dans le premier référentiel et que l'on appelle l'herpolhodie<sup>20</sup>. Nous allons préciser ce mouvement par l'étude des angles d'Euler (voir la figure 15 p.38) en choisissant dans le référentiel du laboratoire la direction fixe de  $\vec{\sigma}_O$  comme axe  $Oz$  et dans celui du solide l'un des axes de l'ellipsoïde d'inertie, disons  $OZ$ , comme axe  $Oz'$ . On ne peut ici donner que des conclusions qualitatives mais elles sont intéressantes.

La figure 17 p.45 montre que le vecteur rotation  $a$ , par rapport au plan tangent, a une composante tangentielle; il y a donc roulement (sans glissement rappelons-le) qui va faire progresser le point  $R$  autour de  $H$ , ce qui génère un mouvement de précession. La même figure montre que le vecteur rotation  $a$ , par rapport au plan tangent, a une composante normale; il y a donc aussi pivotement et nous allons montrer que cela entraîne, sauf cas particulier, un phénomène de nutation.

Commençons par cette remarque : le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie en  $R$  tel que  $\vec{\omega} = \vec{OR}$  est fixe et orthogonal à  $\vec{\sigma}_O$  qu'il coupe en un point fixe  $H$ ; il est donc tangent à la sphère de centre  $O$  et de rayon  $h = OH$ . Dans le référentiel du solide ou tout autre référentiel, ce plan est mobile mais est tangent à la fois à l'ellipsoïde et à cette sphère.

Pour nous aider, plaçons nous dans le plan mobile dans les deux référentiels contenant  $Oz$  parallèle à  $\vec{\sigma}_O$  et  $Oz'$  parallèle à l'un des axes de la matrice d'inertie, noté  $OZ$ . Dans la figure 19 p.49, nous superposerons en fait deux figures dans ce plan, en y superposant les deux positions de  $Oz'$ ; la première quand, par suite du pivotement, l'axe  $OX$  appartient à ce plan et la seconde quand  $OY$  est dans ce plan. Dans ces deux positions, le plan de figure est plan de symétrie pour l'ellipsoïde et bien sûr pour la sphère de centre  $O$  et de rayon  $h$ . L'intersection du plan de figure avec l'ellipsoïde est, dans ces deux cas, une ellipse, avec la sphère, un cercle et avec le plan qui leur est bi-tangent une droite bi-tangente à l'ellipse et au cercle.

Sur la figure nous avons tracé le cercle et les deux ellipses correspondant aux deux situations (en fait un quart de chaque courbe), les deux droites bi-tangentes. Les points de contact de ces bi-tangentes avec les ellipses donnent les points  $R$  donc les deux valeurs du vecteur rotation et les deux contacts avec la sphère, les deux directions, dans ce repère, du moment cinétique. On voit donc graphiquement que l'angle de nutation, entre l'axe commun aux deux ellipses tracées (l'axe  $OX$  de l'ellipsoïde choisi comme  $Oz'$ ) et le moment cinétique (dont la direction est choisie comme axe  $Oz$  fixe dans le laboratoire), varie entre deux positions extrêmes repérées sur la figure par les indices 1 et 2. Remarquons que l'angle entre  $OX$  et  $\vec{\omega}$  gère la polhodie.

---

20. Bien que je n'ai trouvé nulle part l'explication, il me semble clair que l'on a ajouté au mot polhodie (puis supprimé un « p ») un préfixe issu du verbe grec « herpô » (l'herpétologie est la science qui s'occupe des reptiles) cousin du latin « serpo » (participe présent « serpens » qui a donné le mot « serpent » en français) et qui signifie « avancer en rampant ». Ce choix rappelle que la nutation donne à la trajectoire une ondulation par rapport au mouvement de seule précession.



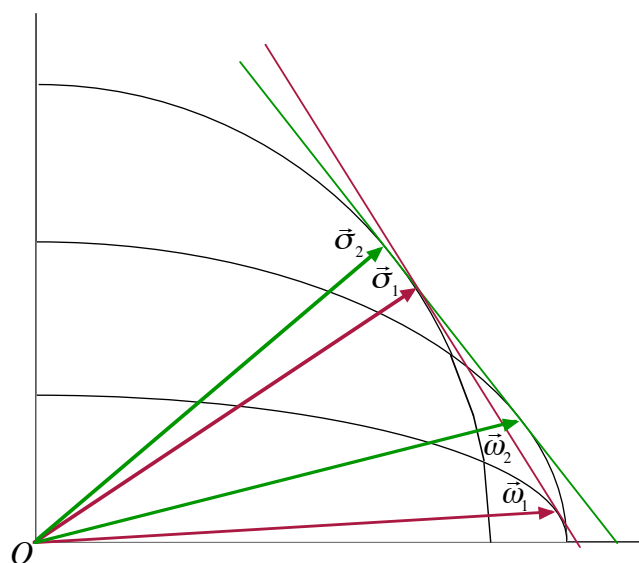


FIGURE 19 – Herpolhodie.

Revenons dans le référentiel du laboratoire : le mouvement de précession (dont on n'a pas pu expliciter la cinétique) fait tourner l'axe de rotation autour de  $Oz$  et la nutation y ajoute une oscillation qui tantôt approche, tantôt éloigne l'axe de  $Oz$ , appelé axe de la précession. Si l'on visualise ce mouvement par l'intersection de l'axe de rotation avec une sphère de centre  $O$ , la courbe obtenue n'a aucune raison d'être fermée et il sera facile de trouver un contre-exemple plus loin dans le cas particulier d'un solide à symétrie de révolution.

Le mouvement de rotation du ciel nocturne permet de trouver, par rapport à la « sphère des étoiles » la direction de l'axe de rotation de la Terre ; actuellement, il pointe vers l'étoile polaire. Il n'en a pas toujours été ainsi et l'on dispose d'observations depuis cinq mille ans. On sait donc que cet axe a un mouvement de précession assez régulier de période estimée<sup>21</sup> 26 000 ans. On observe aussi une faible nutation d'amplitude d'une dizaine de secondes d'arc, trop faible pour des observations antiques ou médiévales, on n'a donc comme pour la polhodie, aucune idée à long terme ; à court terme, on observe une période de près de 20 ans. L'étude qui vient d'être faite montre le lien possible<sup>22</sup> entre la nutation et l'oscillation de CHANDLER dont les périodes ont même ordre de grandeur.

On trouve un peu partout l'affirmation que la précession et la nutation sont dues à l'action du soleil sur le bourrelet équatorial, affirmation qui sous-entend que sans cette action, il n'y aurait ni précession, ni nutation. On vient de montrer qu'il n'en est rien. L'affirmation est donc fautive par son sous-entendu. Par contre, à cause de cette action qui exerce de faibles forces, non localisées en  $O$ , le mouvement n'est plus exactement à

21. car on n'a pas encore, de mémoire humaine, fait un tour.

22. Elle n'impose pas l'égalité des périodes, voir plus loin.

la POINSOT ; on verra plus loin dans le cadre de l'approximation gyroscopique que cela provoque une précession sans nutation<sup>23</sup>.

### 7.h Cas particulier du solide de révolution.

Si le solide a une symétrie de révolution autour d'un axe, il en est de même pour l'ellipsoïde d'inertie. La figure 19 p.49, réduite à une seule ellipse, le cercle et une seule bi-tangente est valable à tout moment. Il en résulte que dans le plan de figure (rappelons qu'il contient les axes  $Oz$  et  $Oz'$  qui servent à définir les angles d'EULER), les angles entre axe du solide, vecteur rotation et moment cinétique sont constants.

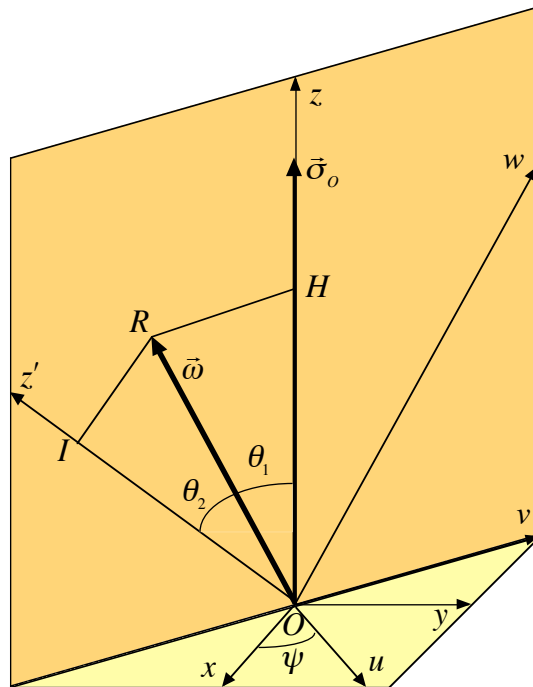


FIGURE 20 – Solide de révolution.

La figure 20 p.50 a été construite en reportant les éléments significatifs de la figure 19 p.49 (le vecteur rotation identifié à un vecteur  $\vec{OR}$ , le moment cinétique en  $O$  parallèle à  $Oz$ , la projection fixe  $H$  de  $R$  sur  $Oz$  à laquelle on ajoute sa projection  $I$  sur  $Oz'$ , axe de symétrie du solide) dans la figure 15 p.38 allégée où figurent la précession  $\psi$  et la nutation constante  $\theta$  somme de l'angle constant  $\theta_1$  entre  $Oz$  et  $\vec{OR}$  et de l'angle constant  $\theta_2$  entre  $\vec{OR}$  et  $Oz'$ .

A un instant donné, la loi de composition des vitesses entraîne, comme pour le point  $R$  (cf supra), que tous les points de la droite  $OR$  ont une vitesse nulle, ce qui permet une

23. La nutation observée n'est pas contradictoire, c'est le terme qui disparaît dans l'approximation.

autre description du mouvement : le cône d'axe  $Oz'$  et de demi-angle au sommet  $\theta_2$  roule sans glisser sur le cône fixe d'axe  $Oz$  et de demi-angle au sommet  $\theta_1$ , ce qui est plus facile à visualiser que le roulement sans glissement d'un ellipsoïde de centre fixe sur un plan fixe.

Par ailleurs, la vitesse du point  $I$  par rapport au laboratoire peut se calculer de deux façons. D'une part, c'est la vitesse d'un point lié au solide et donc le champ des vitesses du solide permet d'affirmer que  $\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OI}$  et d'autre part, c'est un point d'un plan tournant autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\frac{d\psi}{dt}$  et dans lequel tout est fixe, donc ce plan est un solide et  $\vec{v}_I = \vec{v}_O + \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z \wedge \vec{OI}$ . On en déduit que  $\vec{\omega} \wedge \vec{OI} = \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z \wedge \vec{OI}$  donc que  $\vec{\omega}$  et  $\frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z$  sont égaux à un vecteur parallèle à  $OI$  près ; leurs composantes sur la normale à  $\vec{OI}$  dans le plan tournant sont donc égales et en notant  $\|\vec{\omega}\| = \omega$ , on tire :

$$\omega \sin \theta_2 = \frac{d\psi}{dt} \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

ce qui prouve que  $\frac{d\psi}{dt}$  est une constante ; la précession est uniforme.

Plaçons-nous dans le référentiel tournant  $Ouvz$  (ou, au choix,  $Ouvw'$  puisque la nutation  $\theta$  est ici une constante). Le solide y tourne autour de  $Oz'$  à la vitesse angulaire  $\frac{d\varphi}{dt}$  et le laboratoire (ou le référentiel  $Oxyz$ ) y tourne autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $-\frac{d\psi}{dt}$ . Les vitesses de  $R$  considéré comme appartenant aux deux cônes, l'un lié au solide, l'autre au laboratoire, qui roulent sans glisser l'un sur l'autre, sont égales, d'où  $\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'} \wedge \vec{OR} = -\frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z \wedge \vec{OR}$ , on en déduit que  $\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'}$  et  $-\frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z$  sont égaux à un vecteur parallèle à  $OR$  près ; leurs composantes sur la normale à  $\vec{OR}$  dans le plan tournant sont donc égales, d'où :

$$\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta_2 = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta_1$$

ce qui prouve que  $\frac{d\varphi}{dt}$  est une constante ; la rotation propre est uniforme.

Résumons, pour un solide de révolution autour d'un axe dont un des points est fixe et soumis uniquement à des forces localisées en ce point, la nutation est constante, la précession et la rotation propre sont uniforme ; enfin la norme du vecteur rotation, les vitesses de précession et de rotation propres sont liées par :

$$\frac{\omega}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\sin \theta_2} = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\sin \theta_1}$$

où les valeurs des grandeurs constantes dépendent, bien sûr, des conditions initiales.

Remarque : pour que l'herpolhodie soit une courbe fermée, il faut et il suffit que le rapport des rotations relatives des deux cônes dans le référentiel tournant utilisé soit un nombre relatif<sup>24</sup>, avec un petit numérateur et un petit dénominateur pour que ce soit visible. Il n'y a aucune raison pour que ce soit le cas car les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont liés à des conditions initiales quelconques.

24. comme pour les courbes de Lissajous.

## 7.i Approximation gyroscopique dans le cas général.

Attention, nous restons ici dans le cadre du mouvement d'un solide avec un point fixe  $O$  mais nous ne supposons plus que le moment des forces extérieures en  $O$  est nul ; il ne s'agit donc plus d'un mouvement à la POINSON.

L'objet de l'étude est un solide avec une symétrie de révolution autour d'un axe choisi comme axe  $Oz'$  pour son repérage dans l'espace avec ses angles d'EULER. La matrice d'inertie respecte cette symétrie admet comme axes principaux l'axe  $Oz'$  avec un moment d'inertie noté  $J$  et tout axe orthogonal à  $Oz'$  avec un moment d'inertie  $J'$ .

On a vu plus haut (voir angles d'EULER) que, dans le cas général, le vecteur rotation est :

$$\vec{\omega} = \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_u + \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'}$$

et l'on dit qu'on est dans le cadre de l'approximation gyroscopique si  $\frac{d\psi}{dt}$  et  $\frac{d\theta}{dt}$  sont négligeables devant  $\frac{d\varphi}{dt}$ , c'est à dire si la rotation propre est beaucoup plus rapide que les mouvements de précession et de nutation. On a alors :

$$\vec{\omega} \approx \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'}$$

d'où

$$\vec{\sigma}_O \approx J \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'}$$

Pour appliquer le théorème du moment cinétique en  $O$  fixe, il faut dériver ce vecteur dans le référentiel  $Oxyz$ , le seul qui soit galiléen (on se réfère pour les notations à la figure 15 p. 38). Il est plus simple de le dériver dans un référentiel où  $\vec{e}_{z'}$  est fixe puis d'utiliser la formule de composition des dérivées d'un vecteur soit  $\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{abs.}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{rel.}} + \vec{\omega}_{\text{entr.}} \wedge \vec{V}$  et l'on choisira comme second référentiel  $Ouwz'$  parce qu'il est plus simple à visualiser ; son vecteur rotation est  $\frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_u$ .

On a donc successivement et de façon brute :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\text{abs.}} &= J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_{z'} + \left( \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_u \right) \wedge \left( J \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{z'} \right) \\ \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\text{abs.}} &= J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_{z'} + J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{z'} + J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_u \wedge \vec{e}_{z'} \\ \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\text{abs.}} &= J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_{z'} + J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{z'} - J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_w \end{aligned}$$

où  $\vec{e}_{z'}$ ,  $\vec{e}_w$  et  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{z'}$ , parallèle à  $\vec{e}_u$ , vecteurs variables forment une base de projection orthogonale mais non orthonormée.

Que faire ensuite ? Rien ! On ne sait pas encore où l'on va et « les vents ne sauraient être favorables à qui erre sans but »<sup>25</sup>.

Prenons l'exemple d'une toupie posée sur sa pointe  $O$  sur un sol horizontal. On prend  $Oz$  vertical, le centre de gravité  $G$  est sur l'axe de symétrie  $Oz'$  et l'on note  $\vec{OG} = a \vec{e}'_z$ . J'ai fait toutes les figures compliquées et laisse au lecteur le soin de faire ici une figure simple, car il a déjà vu tourner une toupie. Les deux seules forces appliquées à la toupie sont la réaction du sol, localisée en  $O$  donc de moment nul en ce point et le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{e}_z$  localisé en  $G$  donc de moment en  $O$  égal à :

$$M_O = \vec{OG} \wedge \vec{P} = m \vec{OG} \wedge \vec{g} = -m g a \vec{e}'_z \wedge \vec{e}_z = m g a \vec{e}_z \wedge \vec{e}'_z$$

Ce moment a une expression simple dans la base de projection  $\vec{e}_{z'}$ ,  $\vec{e}_w$  et  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{z'}$  ; il était donc plus haut urgent de ne rien faire. Par projection sur les vecteurs de cette base du théorème du moment cinétique, on a donc le système :

$$\begin{cases} J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \\ -J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \\ J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = m g a \end{cases}$$

De la première relation, on déduit que  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  est nul donc la vitesse angulaire  $\frac{d\varphi}{dt}$  est constante, non nulle car elle est supposée grande ; on la note  $\omega$  : la rotation propre est uniforme.

De la seconde, on déduit ensuite que  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , donc que  $\theta$  est une constante : l'angle de nutation entre la verticale et l'axe de symétrie est constant.

De la dernière, on déduit enfin que  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{m g a}{J \omega}$  : la précession autour de la verticale se fait à vitesse angulaire constante.

Remarque 1 : habituellement, un moment dynamique de direction  $\vec{e}_u$  provoque une rotation autour d'un axe qui a cette direction et conduirait à une augmentation de l'angle de nutation, c'est-à-dire à la chute de la toupie. C'est vrai si la toupie ne tourne pas mais si elle tourne très vite, c'est une précession autour de la verticale qui a lieu et cela semble paradoxal ; pourtant, c'est la conséquence logique des lois de la dynamique, l'intuition est ici en défaut. C'est pour cette raison que l'action du soleil sur le bourrelet équatorial, au lieu de ramener l'équateur dans le plan de l'écliptique (de l'orbite terrestre) provoque<sup>26</sup> la précession de l'axe de pôle.

Remarque 2 : la condition de validité du raisonnement c'est que  $\frac{d\psi}{dt}$  et  $\frac{d\theta}{dt}$  soit négligeables devant  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Pour  $\frac{d\theta}{dt}$  qui est nul, ça ne pose pas de problème, il ne reste donc comme condition :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{m g a}{J \omega} \ll \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

25. citation attribuée à Sénèque.

26. On peut objecter que la Terre ne tourne pas assez vite pour l'approximation gyroscopique, c'est oublier que la terre tourne en un jour et que la précession a une période de 26 000 ans.

soit

$$\omega \gg \omega_0 = \sqrt{\frac{m g a}{J}}$$

où  $\omega_0$  est la pulsation du mouvement pendulaire qu'aurait le solide suspendu en  $O$  (et non posé sur un plan en  $O$ ) sous l'effet de la pesanteur. Ceci caractérise mieux l'approximation gyroscopique, car  $\omega$  n'est plus comparé à une inconnue mais à une donnée.

Remarque 3 : Le centre de gravité  $G$  décrit à la vitesse angulaire  $\frac{d\psi}{dt}$  un cercle d'axe  $Oz$  de rayon  $a \sin \theta$ , a donc une accélération en  $\vec{\gamma} = -a \sin \theta \frac{d\psi^2}{dt} \vec{e}_{\text{radial}}$ , ce qui permet de calculer la réaction  $\vec{F}$  du support en  $O$  grâce au théorème du centre de gravité, soit par  $m \vec{g} + \vec{F} = m \gamma$ . On laisse au lecteur le soin de finir le calcul ; on obtient une composante normale de module (de norme)  $N = m g$  et une composante tangentielle  $T = m a \sin \theta \frac{d\psi^2}{dt} = m a \sin \theta \left(\frac{m g a}{J \omega}\right)^2$  qui montre que plus  $\omega$  est élevé, plus la condition de non glissement ( $T < f N$ ) a de chances d'être vérifiée.

Remarque 4 : Une cause importante de dissipation d'énergie est l'existence d'un couple de résistance au pivotement (voir amélioration des lois de COULOMB). Puisque  $N = m g$  (cf remarque 3), sa valeur est  $-k m g \vec{e}_z$  ce qui après projection sur la base vectorielle utilisée modifie les équations du mouvement en :

$$\begin{cases} J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k m g \cos \theta \\ -J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = -k m g \sin \theta \\ J \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = m g a \end{cases}$$

La première relation montre que  $\frac{d\varphi}{dt}$  diminue, la rotation propre se ralentit, la seconde que  $\frac{d\theta}{dt}$  est positif donc que l'angle de nutation augmente et la dernière inchangée montre que puisque la rotation propre ralentit, la vitesse de précession augmente. Bien entendu, à un moment, l'approximation gyroscopique cessera d'être valable.

## 8 Solides articulés.

Plutôt qu'une approche théorique, nous montrerons ici sur un exemple modélisant une automobile, le type de raisonnement à employer.

### 8.a Modélisation des articulations.

On modélise une automobile par deux disques homogènes identiques de masse  $m$  de rayon  $a$ , de moment d'inertie  $J = (1/2) m a^2$  par rapport à leurs axes respectifs, de centre  $C$ , en contact avec un sol horizontal en  $I$  qui exerce sur eux une force  $\vec{N} + \vec{T} = N \vec{e}_z - T \vec{e}_x$  ( $N$  et  $T$  algébriques), le tout avec l'indice « 1 » pour l'essieu avant et « 2 » pour l'arrière. Ces disques sont solidaires, grâce à des liaisons parfaites, à un châssis (non représenté sur

la figure 21 p. 55 ci-dessous) de masse  $M$ , de centre de gravité  $G_0$  (non placé sur la même figure) à l'aplomb du milieu<sup>27</sup> du segment  $C_1C_2$  de longueur  $2\ell$ . Le centre de gravité  $G$  du véhicule est donc lui aussi à l'aplomb du milieu de  $C_1C_2$  et l'on note  $b$  sa hauteur au dessus du sol. On modélise le moteur par un couple  $\vec{T} = T \vec{e}_y$  exercé par le châssis sur le disque « 1 » (il s'agit donc d'une traction<sup>28</sup>) et l'on note  $F = \frac{T}{a}$ . On suppose que les disques roulent sans glisser.

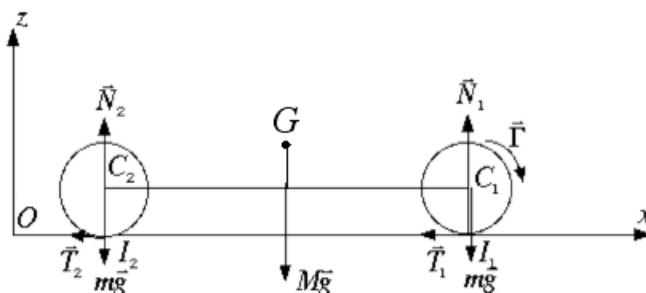


FIGURE 21 – Modélisation d'une voiture.

La modélisation proposée remplace un essieu à deux roues par une roue unique, confondant ainsi voitures et motos. Montrons que c'est raisonnable pour une voiture correctement chargée se déplaçant en ligne droite.

Les seuls éléments qu'il faille connaître d'une interaction sont la somme des forces, la somme des moments et la somme des puissances car ce sont les seuls qui interviennent dans les théorèmes de la mécanique des solides. Soit donc un essieu à deux roues en contact avec le sol en deux points  $I_G$  pour la roue gauche et  $I_D$  pour la droite. Pour une voiture équilibrée (centre de gravité dans le plan médian en ligne droite, il y a symétrie et les deux roues sont soumises à la même force de contact que l'on note  $\vec{n} + \vec{t}$  s'appliquant en  $I_G$  et  $I_D$ .

La somme des forces est  $2\vec{n} + 2\vec{t}$ , soit en posant  $\vec{N} = 2\vec{n}$  et  $\vec{T} = 2\vec{t}$ , une somme  $\vec{N} + \vec{T}$ .

Le moment total en un point quelconque noté  $A$  est

$$\vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{AI}_G \wedge (\vec{n} + \vec{t}) + \vec{AI}_D \wedge (\vec{n} + \vec{t}) = (\vec{AI}_G + \vec{AI}_D) \wedge (\vec{n} + \vec{t})$$

Introduisons le milieu  $I$  de  $I_G I_D$  qui est aussi l'isobarycentre de ces deux points et introduisons  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$

$$\vec{\mathcal{M}}(A) = (2\vec{AI}) \wedge \left( \frac{1}{2} \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{T} \right) = \vec{AI} \wedge (\vec{N} + \vec{T})$$

27. Ce n'est pas obligatoire ; on a fait ce choix pour alléger les calculs ; on y reviendra plus loin..

28. traction avant est un pléonasme.

Quant à la puissance, elle est nulle dans l'hypothèse du non-glissement car les forces s'appliquent en des points de vitesse nulle.

On aurait obtenu les mêmes résultats avec une roue unique en contact avec le sol à l'aplomb du milieu de l'essieu (point  $I$ ) subissant l'interaction  $\vec{N} + \vec{T}$ ; c'est cet artifice qui permet de traiter voitures et motos d'une façon unifiée.

## 8.b Paramétrage des mouvements.

Le châssis est un solide en translation, tous ses points ont la même vitesse, notée  $\vec{V} = V \vec{e}_x$ , en particulier les points  $C_1$  et  $C_2$ , centres des roues. Les points des roues en contact avec le sol,  $I_1$  et  $I_2$ , ont une vitesse nulle car il n'y a pas glissement. Le plan de figure est plan de symétrie donc les vecteurs rotation des roues, qui jouissent des propriétés de symétrie du champ magnétique, lui sont orthogonaux, on note  $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_y$  et  $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_y$

La formule de changement de point permet d'affirmer

$$\begin{aligned}\vec{V}_{C_1} &= \vec{V}_{I_1} + \vec{C_1 I_1} \wedge \vec{\omega}_1 \\ V \vec{e}_x &= \vec{0} + (-a \vec{e}_z) \wedge \omega_1 \vec{e}_y = a \omega_1 \vec{e}_x\end{aligned}$$

d'où en projetant et en raisonnant de même pour l'autre roue :

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{V}{a}$$

## 8.c Résolution.

Un seul paramètre  $V$  suffit ici pour décrire le mouvement et par ailleurs les interactions inconnues ont une puissance nulle (non-glissement et liaisons parfaites); le théorème de l'énergie cinétique permet alors de gagner un temps précieux.

Attention, le véhicule n'est pas un solide mais l'assemblage de trois solides. Son énergie cinétique est la somme des énergies de ses trois constituants; chacune est somme d'une énergie de translation et d'une énergie de rotation. Comme le châssis, lui, ne tourne pas, on arrive à :

$$\begin{aligned}E_{cin} &= \frac{1}{2} M \vec{V}_{G_0}^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J \omega_1^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J \omega_2^2 \\ E_{cin} &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m a^2 \right) \left( \frac{V}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m a^2 \right) \left( \frac{V}{a} \right)^2 \\ E_{cin} &= \frac{1}{2} (M + 3m) V^2\end{aligned}$$

Les forces de contact avec le sol ne travaillent pas car il n'y a pas de glissement (le point d'application de la force a une vitesse nulle, donc la puissance est nulle). Les forces



intérieures au niveau des liaisons ne travaillent pas dans le modèle idéalisé d'une liaison parfaite. Le poids ne travaille pas car le mouvement est horizontal. Seul le couple moteur (interaction intérieure) travaille. Le couple  $\vec{T} = \Gamma \vec{e}_y$  appliqué par le châssis sur la roue avant a une puissance  $\vec{T} \cdot \vec{\omega}_1 = \Gamma \frac{V}{a} = FV$  avec la définition donnée plus haut à  $F$  et la puissance du couple opposé, exercé par la roue sur le châssis, est nulle car le vecteur rotation du châssis est nul. Bref la somme des puissances est  $\mathcal{P} = FV$  et le théorème de l'énergie cinétique  $\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}$  donne

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (M + 3m) V^2 \right) = (M + 3m) V \dot{V} = FV$$

d'où

$$\dot{V} = \frac{F}{M + 3m}$$

On trouve donc un mouvement uniformément accéléré. Bien sûr, ceci n'est valable qu'en négligeant les frottements dus à l'air.

Déterminons maintenant la valeur des interactions inconnues. On peut pour cela appliquer le théorème du centre de gravité et le théorème du moment cinétique à chacun des solides et aussi (par sommation) à tout assemblage de solides, le plus pertinent étant le solide articulé entier. Ce dernier choix permet d'éliminer les interactions intérieures au niveau des liaisons entre solides et de ne conserver que les interactions extérieures, ici les forces de contact avec le sol.

Appliquons le théorème du centre de gravité (ou théorème de la résultante cinétique) au véhicule entier, ce théorème est valable que ce système soit solide ou non. Le produit de la masse totale  $(M + 2m)$  et de l'accélération est égale à la somme des forces extérieures, donc

$$(M + 2m) \frac{d\vec{V}_G}{dt} = (M + 2m) \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2$$

Projetons sur les axes, nous en déduisons, en injectant la valeur trouvée par l'accélération :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = (M + 2m) g \\ T_1 + T_2 = (M + 2m) \dot{V} = \frac{M+2m}{M+3m} F \end{cases}$$

Le moment cinétique calculé au centre de gravité du véhicule est obtenu par sommation sur les trois solides. On applique le théorème de König pour les trois solides. Pour le châssis, immobile dans son référentiel barycentrique

$$\vec{\sigma}_{\text{châssis}}(G_0) = \overrightarrow{G_0 G} \wedge \overrightarrow{P_{\text{châssis}}} + \vec{\sigma}_{\text{châssis}}^* = M \overrightarrow{G_0 G} \wedge \vec{V}$$

Pour les roues qui ont un axe de symétrie de révolution, donc direction propre de la matrice d'inertie, et qui tournent autour de celui-ci

$$\vec{\sigma}_1(G_0) = \overrightarrow{G_0 C_1} \wedge \vec{P}_1 + \vec{\sigma}_1^* = m \overrightarrow{G_0 C_1} \wedge \vec{V} + J \vec{\omega}_1$$

$$\vec{\sigma}_2(G_0) = m \overrightarrow{G_0 C_2} \wedge \vec{V} + J \vec{\omega}_2$$

Par sommation, on a donc

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{total}(G_0) &= M \overrightarrow{G_0 G} \wedge \vec{V} + m \overrightarrow{G_0 C_1} \wedge \vec{V} + m \overrightarrow{G_0 C_2} \wedge \vec{V} + J \vec{\omega}_1 + J \vec{\omega}_2 \\ \vec{\sigma}_{total}(G_0) &= (M \overrightarrow{G_0 G} + m \overrightarrow{G_0 C_1} + m \overrightarrow{G_0 C_2}) \wedge \vec{V} + J \vec{\omega}_1 + J \vec{\omega}_2 \end{aligned}$$

Or, et c'est là le point-clef, par définition du centre de gravité du système, on a  $(M \overrightarrow{G_0 G} + m \overrightarrow{G_0 C_1} + m \overrightarrow{G_0 C_2}) = \vec{0}$  et donc

$$\vec{\sigma}_{total}(G_0) = J \vec{\omega}_1 + J \vec{\omega}_2 = 2 \left( \frac{1}{2} m a^2 \right) \left( \frac{V}{a} \vec{e}_y \right) = m a V \vec{e}_y$$

Le moment du poids du système calculé au centre de gravité du système est nul et le moment des autres forces extérieures est :

$$\begin{aligned} \vec{M}(G) &= \overrightarrow{G I_1} \wedge (\vec{N}_1 + \vec{T}_1) + \overrightarrow{G I_2} \wedge (\vec{N}_2 + \vec{T}_2) \\ \vec{M}(G) &= (\ell \vec{e}_x - b \vec{e}_z) \wedge (N_1 \vec{e}_z + T_1 \vec{e}_x) + (-\ell \vec{e}_x - b \vec{e}_z) \wedge (N_2 \vec{e}_z + T_2 \vec{e}_x) \\ \vec{M}(G) &= [\ell (N_2 - N_1) - b (T_1 + T_2)] \vec{e}_y \end{aligned}$$

La projection sur  $\vec{e}_y$  du théorème du moment cinétique en  $G$ , soit  $\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{M}(G)$  donne successivement, en injectant la valeur trouvée par l'accélération :

$$\begin{aligned} m a \dot{V} &= \ell (N_2 - N_1) - b (T_1 + T_2) \\ \ell (N_2 - N_1) - b (T_1 + T_2) &= a \frac{m}{M + 3m} F \end{aligned}$$

A ce stade, les trois équations obtenues plus haut sont insuffisantes pour trouver quatre inconnues ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $T_1$  et  $T_2$ ). Il faut donc considérer isolément l'un au moins des solides constituant le véhicule. L'ennui est qu'il faut aussi introduire les forces d'interaction entre châssis et roues. Heureusement, les liaisons sont parfaites et les moments dynamiques projetés sur les axes sont nuls ce qui donne deux équations de plus sans inconnues supplémentaires et le système d'équations devient même redondant car l'accélération a été trouvée par une autre méthode. On n'oublie pas que le moment du poids de la roue, appliqué en  $C$  est nul.

Pour la roue arrière, on tire successivement, en injectant la valeur trouvée par l'accélération :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(J \omega_2) &= \vec{e}_y \cdot [\overrightarrow{C_2 I_2} \wedge (\vec{N}_2 + \vec{T}_2)] = \vec{e}_y \cdot [(-a \vec{e}_z) \wedge (N_2 \vec{e}_z + T_2 \vec{e}_x)] = -a T_2 \\ \frac{1}{2} m a^2 \frac{\dot{V}}{a} &= -a T_2 \end{aligned}$$

$$T_2 = -\frac{m}{2} \dot{V} = -\frac{m}{2(M+3m)} F$$

Pour la roue avant il faut tenir compte du couple exercé par le moteur, soit, compte tenu de la définition de  $F$  :

$$\frac{1}{2} m a^2 \frac{\dot{V}}{a} = -a T_1 + \Gamma = -a T_1 + a F$$

$$T_1 = F - \frac{m}{2} \dot{V} = F - \frac{m}{2(M+3m)} F = \frac{2M+5m}{2(M+3m)} F$$

Le bilan est ce système redondant :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = (M+2m)g \\ T_1 + T_2 = \frac{M+2m}{M+3m} F \\ \ell(N_2 - N_1) - b(T_1 + T_2) = a \frac{m}{M+3m} F \\ T_2 = -\frac{m}{2} \dot{V} = -\frac{m}{2(M+3m)} F \\ T_1 = \frac{2M+5m}{2(M+3m)} F \end{cases}$$

Pour rendre la suite plus lisible, on négligera désormais  $m$  devant  $M$ , ce qui est dans la pratique une bonne approximation. L'accélération devient  $\dot{V} = \frac{F}{M}$  et le système précédent :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = Mg \\ T_1 + T_2 = F \\ \ell(N_2 - N_1) - b(T_1 + T_2) = 0 \\ T_2 = 0 \\ T_1 = F \end{cases}$$

outre  $T_1 = F$  et  $T_2 = 0$ , on a  $N_2 + N_1 = Mg$  et l'on tire aisément  $N_2 - N_1 = \frac{b}{\ell} F$  d'où en effectuant la demi-somme et le demi-différence :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2} Mg - \frac{b}{2\ell} F \\ N_2 = \frac{1}{2} Mg + \frac{b}{2\ell} F \end{cases}$$

Remarque : le théorème du centre de gravité appliqué à la roue avant et à la roue arrière permet aisément de calculer les forces intérieures au niveau des liaisons, ce qui est surtout intéressant au niveau numérique afin que l'ingénieur prévoise des roulements à billes adaptés.

## 8.d Discussion.

Cette discussion ne fait plus vraiment partie d'une théorie des systèmes articulés. Elle revient sur la problématique du non-décollement et du non-glissement déjà évoquée. On la

mène néanmoins car elle est riche de conclusions intéressantes, surtout dans ses remarques finales.

Au vu des expressions qui précèdent,  $N_2$  ne peut pas s'annuler et la roue arrière ne décollera jamais.  $N_1$  devient négatif si  $F$  dépasse la valeur critique  $F_c = \frac{\ell}{b} M g$  correspondant à une accélération critique  $a_c = \dot{V}_c = \frac{F_c}{M} = \frac{\ell}{b} g$ . Cela dit pour une voiture courante  $\ell$  est supérieur à  $b$  et l'accélération maximale largement inférieure à  $g$  car un organisme non entraîné ne supporte pas de trop fortes accélérations donc le décollage de la roue n'est pas un réel souci.

D'autre part,  $T_2$  est nul et les lois de Coulomb sont automatiquement vérifiées à l'arrière. A l'avant on veut, en appelant  $f$  le coefficient de frottement,  $|T_1| < f N_1$ , soit

$$F < f \left[ \frac{1}{2} M g - \frac{b}{2\ell} F \right]$$

ce qui remplace la force critique et l'accélération critique par

$$F_c^* = \frac{M g}{\frac{b}{\ell} + \frac{2}{f}} \quad \text{et} \quad a_c^* = \frac{g}{\frac{b}{\ell} + \frac{2}{f}}$$

Remarque sur l'influence de  $f$  : Si  $f$  diminue (boue, verglas),  $a_c^*$  diminue, on patine plus vite. D'accord, ce n'est pas un scoop mais maintenant, on sait en détail pourquoi.

Remarque sur l'influence de  $b$  et  $\ell$  : si le rapport  $b/\ell$  diminue,  $a_c^*$  augmente. Une voiture « à tempérament sportif » est surbaissée.

Remarque sur la position du centre de gravité : supposons qu'on laisse la distance  $2\ell$  entre roues inchangée. Notons  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les distances horizontales entre roue avant et centre de gravité et entre roue arrière et centre de gravité. Ces distances n'interviennent que dans le théorème du moment cinétique en  $G$  et en relisant en diagonale la résolution qui précède, on voit facilement que l'on arrive à :

$$\begin{cases} N_2 + N_1 = M g \\ \ell_2 N_2 - \ell_1 N_1 = b F \end{cases}$$

d'où en résolvant ce système par votre méthode préférée et avec  $\ell_1 + \ell_2 = 2\ell$  car c'est la distance entre roues :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\ell_2 M g - b F}{2\ell} \\ N_2 = \frac{\ell_1 M g + b F}{2\ell} \end{cases}$$

La condition de non-glissement devient

$$F < f \left[ \frac{\ell_2 M g - b F}{2\ell} \right]$$

ce qui remplace la force critique et l'accélération critique par

$$F_c^* = \frac{f \ell_2 M g}{2 \ell + f b} \quad \text{et} \quad a_c^* = \frac{f \ell_2 g}{2 \ell + f b}$$

On permet de plus fortes accélérations sans patinage en déplaçant le centre de gravité vers l'avant, c'est-à-dire vers les roues motrices, par exemple en plaçant le moteur à l'avant.

Remarque sur les propulsions : si l'on change le signe de  $F$ , l'accélération change de signe et la voiture va en arrière. Dans le sens du mouvement c'est devenu une propulsion<sup>29</sup>. Cette fois c'est la roue 2 qui peut décoller mais c'est encore la roue avant dans le sens du mouvement, par contre ce n'est plus la roue motrice et le décollage n'empêche pas de continuer à avancer (« roue avant » des motards). La condition de non glissement reste formellement inchangée, mais en notant  $F = -|F|$ , on s'aperçoit que l'apparence est trompeuse. En effet la condition s'écrit de façon brute :  $f$  le coefficient de frottement,  $|T_1| < f N_1$ , soit

$$|T_1| = |F| < N_1 = f \left[ \frac{1}{2} M g - \frac{b}{2 \ell} F \right]$$

mais avec  $F = -|F|$ , on arrive à

$$|F| < f \left[ \frac{1}{2} M g + \frac{b}{2 \ell} |F| \right]$$

ce qui remplace la force critique et l'accélération critique (en valeur absolue) par

$$F_c^* = \frac{M g}{\frac{2}{f} - \frac{b}{\ell}} \quad \text{et} \quad a_c^* = \frac{g}{\frac{2}{f} - \frac{b}{\ell}}$$

Une propulsion peut accélérer sans déraper plus fort qu'une traction (penser aux courses de dragsters). Néanmoins, si l'on construit plus volontiers des tractions, c'est que la tenue de route en virage est bien meilleure et pour une raison simple : si l'on tire l'avant d'une voiture en biais, on la redresse et si l'on pousse l'arrière d'une voiture en biais, on amplifie le phénomène et l'on finit dans le fossé, sauf à apprendre à contrebraquer.

Remarque sur les automobiles à quatre roues motrices : si l'on exerce  $\Gamma/2$  sur chacun des essieux<sup>30</sup>, en relisant en diagonale ce qui précède, on se convainc aisément qu'on arrive à  $\dot{V} = \frac{F}{M}$  et au système :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = M g \\ T_1 + T_2 = F \\ \ell (N_2 - N_1) - a (T_1 + T_2) = 0 \\ T_2 = \frac{F}{2} \\ T_1 = \frac{F}{2} \end{cases}$$

29. traction arrière est un oxymore.

30. Tout autre répartition du couple total sur les deux essieux est possible, on cherche ici à ne pas trop compliquer les calculs.

On retrouve les mêmes valeurs de  $N_1$  et  $N_2$ , donc l'accélération maximale avant décollage ne change pas, mais par contre la plus contraignante des deux conditions de non-glissement devient

$$\frac{|F|}{2} < f \left[ \frac{1}{2} M g - \frac{a}{2\ell} |F| \right]$$

ce qui est plus favorable que pour un véhicule classique. Ceci explique que la capitale soit envahie de  $4 \times 4$  car il est bien connu que ses rues sont constamment boueuses. Ceci explique aussi le grand nombre d'essieux moteurs d'une rame de métro ou de TGV pour permettre une forte accélération sans risque de glisser sur les rails.