

## Chapitre B-XIII

# Les outils théoriques de la mécanique des fluides.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## RÉSUMÉ :

*La mécanique des fluides (après avoir admis que la notion de fluide est en fait assez floue) est un vaste domaine et d'approche délicate; on ne peut l'aborder, si l'on veut y comprendre quelque chose, sans s'être doté d'outils conceptuels adéquats.*

*Le premier est la notion de quasi-particule intermédiaire entre les échelles macro- et microscopiques.*

*Il importe ensuite de faire la distinction entre description lagrangienne axée sur les quasi-particules et l'approche eulérienne axée sur la notion de champ; la synthèse en étant assurée par la dérivation particulaire.*

*La divergence du champ des vitesses est lié soit à l'incompressibilité du fluide, soit à la notion plus subtile d'écoulement incompressible de fluide compressible. De même, il est donné du sens au rotationnel du champ des vitesses.*

*Les forces exercées sur une quasi-particule sont soit volumiques, soit surfaciques (pression, viscosité) auquel cas on leur trouve un équivalent volumique.*

*L'étude expérimentale de la traînée d'une sphère montre, à titre d'exemple, l'intérêt de nombres adimensionnés, en l'occurrence celui de Reynolds, pour comparer l'importance relative de deux paramètres.*

*Enfin, la notion de couche limite permet d'aborder les conditions aux limites du contact avec un solide et la notion d'écoulement parfait.*

# Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| <b>B-XIII Les outils théoriques de la mécanique des fluides.</b>              | <b>1</b> |
| 1 Introduction.   | 4        |
| 1.a Qu'est-ce qu'un fluide?   | 4        |
| 1.b Notion de libre parcours moyen.   | 4        |
| 1.c Les trois échelles. Notion de quasi-particule.                            | 5        |
| 2 Cinématique des fluides.  | 6        |
| 2.a Visualisation des écoulements. Mesure des vitesses.                       | 6        |
| 2.b Les deux points de vue.   | 7        |
| 2.c Dérivée particulaire. Accélération particulaire.                          | 8        |
| 2.d Écoulements stationnaires.  | 10       |
| 2.e Écoulements incompressibles ou non.                                       | 10       |
| 2.f Écoulements rotationnels ou non.  | 12       |
| 2.g Champ local des vitesses.   | 14       |
| 2.h Conditions aux limites.   | 15       |
| 3 Dynamique des fluides.  | 16       |
| 3.a Forces volumiques.  | 16       |
| 3.b Forces surfaciques.   | 16       |
| 4 Étude phénoménologique.   | 20       |
| 4.a Traînée d'une sphère dans un écoulement. Nombre de Reynolds.              | 20       |
| 4.b Écoulements laminaires et turbulents.                                     | 22       |
| 4.c Couche limite. Écoulement parfait. Retour sur les conditions aux limites. | 23       |

# 1 Introduction.

## 1.a Qu'est-ce qu'un fluide ?

Avant d'aborder la mécanique des fluides, il faut d'abord commencer par définir ce qu'est un fluide ; certes la distinction livresque solide/fluide semble aller de soi mais dès que l'on creuse un peu les choses, la frontière devient bien floue.

Plusieurs approches sont possibles,

- thermodynamique : le diagramme d'état d'un corps pur permet de distinguer l'état solide et l'état fluide qui, en dessous de la température critique, existe sous deux versions, l'état liquide et l'état gazeux ; mais certains corps passent continûment de l'état liquide à l'état solide (comme le verre, celui façonné par Emile GALLÉ par exemple) qui est alors un fluide à viscosité devenue infinie.
- empirique : un fluide c'est ce qui coule, mais dans certains cas tout dépend de l'échelle de temps : au delà de l'échelle de l'année, la glace d'un glacier s'écoule et la distinction entre déformations d'un solide plastique et celles d'un liquide très visqueux relève plus de l'appréciation personnelle que de l'objectivité scientifique ; inversement, un tas de sable, bien que pouvant couler, a un comportement qui le rapproche plutôt d'un ensemble de solides en contact ;
- mécanique : les forces internes à un corps sont liées aux déformations pour un solide et aux vitesses de déformation pour un fluide, mais existent des comportements mixtes, dits visco-élastiques, comme le caoutchouc.

Aucune définition ne sera à l'abri d'un contre-exemple et nous adopterons une attitude pragmatique.

## 1.b Notion de libre parcours moyen.

Dans un fluide, l'agitation thermique confère à chaque molécule un mouvement erratique constitué de segments de droites séparant deux chocs successifs avec d'autres molécules ; ces segments ont des directions et des longueurs aléatoires. On appelle *libre parcours moyen* la moyenne statistique de leurs longueurs. Qualitativement, il est d'autant plus long que la molécule subit moins de chocs. Il est aisé d'en déduire les deux facteurs essentiels influant sur le libre parcours moyen : la taille de la molécule, donc la nature chimique du fluide, et la *densité particulière* du milieu (c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume).

Utilisons le modèle classique des sphères dures. Une sphère mobile, de centre  $C$ , de rayon  $R$  se meut dans un milieu plein de sphères identiques (les particules du milieu) de même rayon  $R$  mobiles dans toutes les directions. Certaines vont à la rencontre de la sphère mobile, d'autres s'en éloignent, cela doit se compenser et l'on va simplifier l'étude en les supposant toutes immobiles.

La sphère mobile de centre  $C$  en rencontre une autre fixe de centre  $C'$  si  $C$  passe à une distance de  $C'$  inférieure à  $2R$  ; si l'on remplace la sphère mobile par une sphère de rayon

$2R$  et les sphères fixes par des points, ça ne change rien mais ça simplifie le raisonnement.

Dans son mouvement, cette sphère de rayon fictif  $2R$  engendre un cylindre de surface de base  $\sigma = \pi (2R)^2 = 4\pi R^2$ , sur un trajet de longueur  $L$ , elle balaie un volume  $V = \sigma L$  qui contient  $N = n\sigma L$  sphères fixes en notant  $n$  la densité particulière. Si  $N$  est grand devant l'unité, il est sûr que la sphère a rencontré une sphère fixe bien avant d'avoir parcouru  $L$  et elle a changé de direction ; inversement si  $N$  est petit devant l'unité, il est peu probable que la sphère mobile ait rencontré une fixe et elle continue son petit bonhomme de chemin.

Le libre parcours moyen  $L = \ell^*$  est entre ces deux extrêmes ; *en ordre de grandeur*, il est tel que  $N = 1$ . Donc  $n\sigma\ell^* = 1$  soit :

$$\ell^* \sim \frac{1}{n\sigma}$$

Dans le cas d'un liquide où les molécules sont en contact les unes avec les autres, donc leurs centres distants deux à deux de  $2R$ , chaque molécule occupe en gros le volume d'un cube de côté  $2R$ , soit  $V = (2R)^3 = 8R^3$  ce qui correspond à une densité particulière  $n = \frac{1}{V}$  donc, avec  $R \sim 1 \text{ \AA}$  à un libre parcours moyen :

$$\ell^* \sim \frac{V}{\sigma} \sim \frac{8R^3}{4\pi R^2} \sim R = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

Pour un gaz, en ordre de grandeur toujours proche d'un gaz parfait d'équation d'état (on note  $N$  le nombre de moles,  $\mathcal{N}_A$  la constante d'AVOGADRO)  $pV = NRT$  d'où :

$$n = \frac{N\mathcal{N}_A}{V} = \frac{p\mathcal{N}_A}{RT}$$

d'où aux conditions standards ( $p = 10^5 \text{ Pa}$  et  $T = 300 \text{ K}$ ) avec  $\mathcal{N}_A \sim 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $n \sim 0,25 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$  et avec  $R \sim 10^{-10} \text{ m}$ , on déduit que  $\sigma \sim 1,2 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$  et l'on arrive en ordre de grandeur à  $\ell^* = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  ;

A température standard et dans un vide poussé au millionième de la pression standard, on a de la même façon  $\ell^* = 3 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ .

### 1.c Les trois échelles. Notion de quasi-particule.

Soit un fluide contenu dans un récipient de taille macroscopique. On peut l'étudier à plusieurs échelles de taille.

- L'échelle macroscopique<sup>1</sup> : le système que l'on étudie est la totalité du fluide. Bien évidemment, cette approche gomme toutes les inhomogénéités du système et n'est donc pertinente que pour des systèmes homogènes, donc des systèmes à l'équilibre. On utilisera alors avec profit une approche thermodynamique.

---

1.  $\mu\alpha\kappa\rho\varsigma$ =grand

- L'échelle microscopique<sup>2</sup> (ou atomique) : On étudie chaque molécule comme un système, c'est le domaine de la mécanique du point et de la physique des chocs. On peut penser que cette approche n'est possible que si le récipient ne contient qu'un faible nombre de molécules donc de façon extrêmement rare ; c'est naïf. Cette approche est en fait la seule approche possible lorsque le libre parcours moyen devient supérieur à la taille du récipient et que donc le choc le plus fréquent n'est plus le choc molécule-molécule mais le choc molécule-paroi. Pour un récipient de taille décimétrique à température ordinaire, ça devient vrai en dessous d'une pression de  $10^{-1}$  Pa (cf supra), c'est le domaine de l'*ultra-vide*.
- L'échelle mésoscopique<sup>3</sup> : Dans tous les autres cas, on découpe le système en *quasi-particules*, c'est à dire en petits sous-systèmes de taille appropriée ; cette taille doit vérifier trois critères :
  - être suffisamment petite pour que les paramètres physiques y soient à peu près uniformes, donc de taille petite devant l'échelle caractéristique des inhomogénéités, ce qui dépend du contexte du problème.
  - contenir suffisamment de molécules pour gommer par moyennage les fluctuations statistiques. Nous admettrons qu'en valeur relative ces fluctuations varient comme l'inverse de la racine carrée du nombre de molécules et qu'elles deviennent donc négligeables dès que la quasi-particule contient un million de molécules ; pour cela, il suffit que la taille de la quasi-particule dépasse une centaine de distances interatomiques, soit 10 nm dans un liquide et 100 nm dans un gaz.
  - être suffisamment grande pour que l'agitation thermique ne lui retire ou ne lui ajoute trop de molécules à cause des mouvements erratiques au voisinage de la surface ; nous devinons pour cela que la taille de la quasi-particule devra être grande devant le libre parcours moyen disons cent fois plus, soit 10 nm pour un liquide et  $10\mu\text{m}$  pour un gaz dans les conditions standard.

En pratique on se place à la limite du troisième critère, le second se trouve vérifié automatiquement et le premier sauf cas tout à fait exceptionnel. A notre échelle, la quasi-particule est ressentie comme ponctuelle et le milieu comme un milieu continu. La vitesse de la quasi-particule est la moyenne de celle des molécules qui la composent et n'a donc plus rien à voir avec la vitesse d'agitation thermique qui disparaît du champ de notre étude au profit de la vitesse mésoscopique, qui, du reste, est la seule qui soit simple à mesurer.

## 2 Cinématique des fluides.

### 2.a Visualisation des écoulements. Mesure des vitesses.

Comment visualiser les vitesses dans un écoulement ? L'idée est d'y incorporer des particules solides réfléchissantes qui seront entraînées, d'éclairer le liquide et de le photographier avec un temps de pose approprié. L'interprétation de la photo est cependant

---

2. *μικρός*=petit

3. *μέσος*=moyen

moins évidente qu'il n'y paraît. Plusieurs situations se présentent :

- S'il y a beaucoup de particules partout dans le fluide et que le temps de pause est très court, on visualise les vitesses instantanées au même instant des particules partout dans le fluide. On mesure donc, à un instant donné, le champ des vitesses. Se dessinent à l'œil nu les lignes de champ du vecteur vitesse, appelées *lignes de courant*. On verra dans le paragraphe suivant qu'il s'agit d'un point de vue eulérien.
- s'il y a moins de particules et un temps de pause plus long, on visualise les trajectoires des particules. On peut, en modulant l'éclairage pour un effet stroboscopique, mesurer l'évolution dans le temps des vitesses d'une même particule. On verra dans le paragraphe suivant qu'il s'agit d'un point de vue lagrangien.
- Si l'on injecte dans le noir et à intervalle régulier des particules aux mêmes points peu nombreux et qu'on fait ensuite une photographie grâce à un bref éclair, on obtient encore autre chose : les positions à un instant donné des particules qui, à un moment ou un autre, sont passées par un point donné. On visualise ainsi des *lignes d'émission* ; nous ne développerons pas cette notion.

Insistons sur la distinction entre trajectoires et lignes de courant sur un exemple simpliste. Supposons<sup>4</sup> que les quasi-particules aient toutes un même mouvement circulaire (au centre près) et qu'elles aient donc toutes la même vitesse instantanée :

$$V [\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y]$$

Il est aisé de se convaincre que les trajectoires sont des cercles et que, puisqu'à un instant donné les vitesses sont toutes égales, les lignes de courant, toujours à un instant donné, sont des droites parallèles (dont la direction varie certes avec le temps).

Notons cependant qu'en régime permanent les deux notions coïncident.

## 2.b Les deux points de vue.

Soit  $X$  un paramètre physique lié aux quasi-particules et dont on veuille étudier l'évolution avec le temps. On peut développer deux points de vue, chacun ayant un avantage certain et un inconvénient majeur par rapport à l'autre.

- Le point de vue lagrangien : On suit une particule  $\mathcal{P}$  dans son évolution et l'on étudie donc la fonction  $X_L(t) = X_L(\mathcal{P}, t)$  et dans la pratique on peut « mathématiser »  $\mathcal{P}$  en la remplaçant, par exemple, par ses coordonnées à l'instant initial.
  - avantage : La quasi-particule est un système fermé (ou peu s'en faut<sup>5</sup>) et les lois de la physique s'y appliquent.
  - inconvénient : Il est difficile de suivre le mouvement d'une goutte d'eau dans l'écoulement d'un torrent impétueux et il est donc difficile d'effectuer des mesures pour vérifier les prédictions théoriques.
- Le point de vue eulérien : on considère  $X$  comme un champ.  $X_E(M, t)$  est la valeur de  $X$  de la particule qui se trouve au point  $M$  à l'instant  $t$ .

---

4. Cet exemple est tout à fait artificiel.

5. l'échange de particules en surface sera géré par les lois sur la pression et sur la viscosité.

- avantage : Les mesures sont aisées, il suffit de placer un capteur et un enregistreur au point  $M$
  - inconvénient : Au cours du temps, la particule qui est au point  $M$  n'est jamais la même<sup>6</sup> et les lois de la physique ne peuvent s'y appliquer.
- On remarquera que ce qui fait la force d'un point de vue fait la faiblesse de l'autre et vice-versa.

## 2.c Dérivée particulaire. Accélération particulaire.

### • Dérivée particulaire.

Les théorèmes de la physique portent essentiellement sur la dérivée temporelle de grandeurs associée à un système fermé, donc la dérivée temporelle de la grandeur lagrangienne.

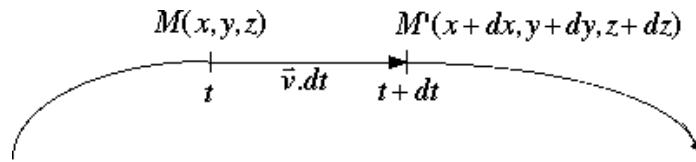


FIGURE 1 – Dérivée particulaire.

La figure 1 p. 8 montre une particule  $\mathcal{P}$  qui se trouve à l'instant  $t$  au point  $M(x, y, z)$  et à l'instant  $t + dt$  au point  $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Par définition :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{X_L(\mathcal{P}, t + dt) - X_L(\mathcal{P}, t)}{dt}$$

Or par définition :

$$X_E(M, t) = X_L(\mathcal{P}, t)$$

$$X_E(M', t + dt) = X_L(\mathcal{P}, t + dt)$$

car  $\mathcal{P}$  se trouve en  $M$  à  $t$  et en  $M'$  en  $t + dt$  et donc :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{X_E(M', t + dt) - X_E(M, t)}{dt}$$

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{X_E(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - X_E(x, y, z, t)}{dt}$$

Le numérateur équivaut, à l'ordre un, à la différentielle, ce qui conduit, pour la fonction de quatre variables, à :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \frac{\frac{\partial X_E}{\partial x} dx + \frac{\partial X_E}{\partial y} dy + \frac{\partial X_E}{\partial z} dz + \frac{\partial X_E}{\partial t} dt}{dt}$$

---

6. ni tout à fait la même, ni tout à fait une autre ? (Paul Verlaine, *Poèmes saturniens*)



soit en introduisant les composantes de la vitesse :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \frac{\partial X_E}{\partial t} + v_x \frac{\partial X_E}{\partial x} + v_y \frac{\partial X_E}{\partial y} + v_z \frac{\partial X_E}{\partial z}$$

On peut condenser l'écriture<sup>7</sup> ainsi :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \frac{\partial X_E}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})X_E$$

(On reverra si besoin l'opérateur  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ , noté aussi  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$  dans le chapitre A-IX consacré à l'analyse vectorielle.)

On convient de l'écriture suivante : on n'écrit plus l'indice « E » car  $\vec{\nabla}$  s'applique à un champ donc sous-entend le point de vue eulérien et l'on n'écrit plus l'indice « L » en notant  $\frac{D}{Dt}$  la dérivée d'une fonction lagrangienne et on appellera *dérivée particulière* cette dérivée. On note donc :

$$\boxed{\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})X}$$

On rappelle que, si  $X$  est un scalaire, on a manifestement  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})X = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} X$  mais que, si  $\vec{X}$  est vectoriel,  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{X}$  n'a pas d'expression équivalente simple.

### • Accélération particulière.

Un cas particulier important est celui où  $X$  est la vitesse, sa dérivée particulière est dans ce cas l'accélération de la particule. Compte tenu de ce qui a été affirmé<sup>8</sup> dans le chapitre A-IX (analyse vectorielle) sur  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ , l'accélération d'une particule peut s'écrire de plusieurs façons :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}}$$

Ces trois formulations sont à connaître car c'est tantôt l'une, tantôt l'autre qui est la plus pertinente. Le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$  est parfois appelé *accélération convective*. On remarquera que cette accélération convective est un terme non linéaire et c'est lui qui fait toute la difficulté de la mécanique des fluides. Remarquons enfin que même en régime permanent, un fluide peut avoir un mouvement accéléré, toujours par cette accélération convective.

7. On n'y voit qu'une convention d'écriture car cela n'apprend rien de plus.

8. La démonstration de la formule qui suit n'apporte rien à la physique ; on peut donc admettre le résultat.

## 2.d Écoulements stationnaires.

Un écoulement est dit stationnaire si le champ des vitesses est indépendant du temps. Au delà de cette définition, que dire de plus ? Rappeler que l'accélération particulière n'est pas forcément nulle, car c'est  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  qui est nulle et non  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ . Rappeler aussi que les notions de trajectoires et de lignes de courant se confondent alors.

## 2.e Écoulements incompressibles ou non.

Rappelons (voir, entre autres occurrences, dans la partie sur les méthodes de la physique, le chapitre A-VI sur les bilans) pour tout ce paragraphe la formulation locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

où  $\mu$  est la masse volumique constante ou non selon que le fluide est incompressible (liquide) ou non (gaz).

### • Fluide incompressible.

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique  $\mu$  est constante ; en très bonne approximation un liquide est incompressible. La loi de conservation de la masse devient alors, puisque  $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$  et  $\mu = Cte$ ,  $\mu \operatorname{div} \vec{v} = 0$  et donc  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . La vitesse est donc à flux conservatif (voir, dans la partie sur les méthodes de la physique, le chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle), c'est-à-dire qu'il y a, à un même instant, égalité du débit volumique en différentes sections d'un tube de courant<sup>9</sup> (voir le chapitre A-IX). Résumons :

$$\boxed{\mu = Cte \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

### • Écoulement incompressible.

Un *écoulement* est dit incompressible<sup>10</sup> si une quasi-particule conserve un volume constant, donc une masse volumique constante, au cours de son mouvement. La différence avec un fluide incompressible est qu'ici  $\mu$  est constante sur une trajectoire mais peut varier d'une trajectoire à l'autre. Par définition, on a donc  $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ . Grace à la formule établie plus haut, on en tire :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \mu = \frac{d\mu}{dt} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu = 0$$

9. une espèce de macaroni formé des lignes de courant passant par tous les points d'une courbe fermée.

10. un abus de langage bien pratique.

Si, grâce aux formules d'analyse vectorielle, on développe ainsi la loi de conservation de la masse :

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \operatorname{div} \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu \cdot \vec{v}$$

et que l'on confronte ce résultat avec le précédent, on en déduit  $\mu \operatorname{div} \vec{v} = 0$  et donc  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  et réciproquement. Résumons :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

La notion d'écoulement incompressible est intéressante car pour un gaz, a priori compressible, la plupart des écoulements sont incompressibles. Il suffit pour cela, et nous l'admettrons ici, que d'une part les dénivellées verticales des lignes de courants restent faibles<sup>11</sup>, et d'autre part que les vitesses restent petites devant la vitesse du son (on justifiera ces affirmations dans le chapitre B-XIV).

On se méfiera des écoulements canalisés de toute part par un tuyau convergent car alors la conservation du débit conduit à une accélération qui peut conduire à des vitesses supersoniques ; par contre, un écoulement canalisé d'un seul côté, comme le vent qui contourne un pavillon par dessus son toit, reste largement subsonique.

### • Interprétation physique de la divergence.

Considérons un écoulement qui diverge à partir d'un point  $O$ , au premier sens du terme, c'est-à-dire tel que les particules aient un mouvement centrifuge, avec un champ de vitesse  $\vec{v}(M) = k \overrightarrow{OM}$  ( $k$  est une constante positive), soit  $\vec{v}(M) = kx \vec{e}_x + ky \vec{e}_y + kz \vec{e}_z$ . Sa divergence est alors égale à  $3k$  (calcul élémentaire) qui est positive. Un champ convergent vers  $O$  pourrait avoir la même allure avec  $k$  négatif et aurait une divergence négative. Du reste la terminologie « divergence » vient historiquement de la mécanique des fluides. Retenons de tout ceci que la divergence d'un champ de vecteurs permet de se rendre compte de la compression ou de la dilatation d'un fluide selon qu'elle est positive ou négative.

Attention toutefois au contre-exemple qui tue : un champ en  $\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$  dont les lignes de courants divergent, au sens populaire, du point  $O$  a néanmoins une divergence nulle, au sens mathématique.

On y reviendra un peu plus loin, au paragraphe 2.g p. 14.

---

11. devant  $\frac{v^2}{2}$ , voir théorème de Bernoulli au chapitre B-XIV.

## 2.f Écoulements rotationnels ou non.

- **Définition et théorème de Kelvin.**

Considérons, comme sur la figure 2 p. 12, un *solide* qui tourne autour d'un axe  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\Omega$  ; on a défini en mécanique du solide (voir chapitre B-VIII) le vecteur rotation par  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ . Un point  $M$ , repéré dans la base locale des coordonnées cylindriques par  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$  a pour vitesse  $\vec{v} = r \Omega \vec{e}_\theta$  soit encore, avec  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$ , une vitesse  $\vec{v} = \Omega \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ . On en déduit en coordonnées cartésiennes  $\vec{v} = \Omega \vec{e}_z \wedge (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$  soit  $\vec{v} = -\Omega y \vec{e}_x + \Omega x \vec{e}_y$ . Calculons-en le rotationnel ; un calcul simple aboutit à  $\text{rot } \vec{v} = 2 \Omega \vec{e}_z = 2 \vec{\Omega}$ .

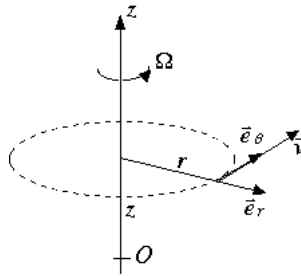


FIGURE 2 – Rotation d'un solide.

Par analogie, pour un fluide, on peut considérer que son mouvement autour d'un point est une rotation en bloc de vecteur rotation  $(1/2) \text{rot } \vec{v}$  (dans la littérature, on trouve le nom de *vecteur tourbillon*) associée de déformations (dont une éventuelle compression ou dilatation gérée par  $\text{div } \vec{v}$ ). Signalons la différence essentielle entre solide et fluide : pour un solide le vecteur rotation est un vecteur indépendant du point où l'on est, car la rigidité du solide corrèle les vitesses des différents points du solide ; mais pour un fluide, le vecteur tourbillon est un champ car les déformations possibles suppriment cette corrélation.

On appellera écoulement *irrotationnel* (ou *non tourbillonnaire*, terminologie plus piégeante, cf *infra*) un écoulement pour lequel le rotationnel de la vitesse est nul ; sinon l'écoulement sera qualifié de *rotationnel* (ou *tourbillonnaire*).

Cette distinction est loin d'être artificielle ; en effet, pour un écoulement où la compressibilité et la viscosité sont négligeables, ce qui est fréquemment le cas, on peut montrer (voir le chapitre B-XIV) que la circulation de la vitesse sur une courbe fermée (liée au rotationnel par le théorème de STOKES) se conserve lorsqu'on suit cette courbe considérée comme entraînée par le mouvement du fluide (il s'agit du théorème de KELVIN) ; en particulier, on en déduit, dans ces conditions, que si le rotationnel de la vitesse est nulle en un point, il le reste le long de la trajectoire du point en question, par exemple si loin d'un obstacle, le vent est uniforme, on pourra utilement utiliser cette remarque. Du reste, on peut établir, pour un fluide visqueux, une loi d'évolution dans le temps du rotationnel

de la vitesse, c'est très utile, par exemple aux météologues pour prédire l'évolution des dépressions atmosphériques.

• **Exemple d'écoulements rotationnels ou non.**

En général, un mouvement rotationnel se caractérise par des tourbillons. Certes, mais il faut rester prudent car il existe des écoulements avec tourbillon et de rotationnel nul et des écoulements sans tourbillon avec rotationnel non nul. Voici donc deux exemples pour nous inciter à la prudence.

1. Considérons un vent violent sur la plaine du Far West. Au contact du sol, le vent est freiné et sur les basses couches de l'atmosphère, le champ de vitesses est de la forme  $\vec{v}(M) = f(z) \vec{e}_x$  avec  $f$  fonction croissante. Un simple calcul conduit alors à  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = f'(z) \vec{e}_y$ , donc, bien que l'écoulement soit rectiligne, le rotationnel est non nul.

Ajoutons qu'une perturbation (obstacle, ascendance d'air chaud) peut déstabiliser le phénomène et donner au rotationnel une composante verticale qui sera l'amorce d'une tornade<sup>12</sup> où le tourbillon deviendra enfin visible.

2. Considérons un mouvement de rotation de fluide autour d'un axe  $Oz$  avec une vitesse en  $1/r$ , soit :  $\vec{v} = (Cte/r) \vec{e}_\theta = (Cte/r^2)r \vec{e}_\theta$  soit encore, en utilisant la même astuce que plus haut pour un solide

$$\vec{v} = (Cte/r^2) \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} = -Cte \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + Cte \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_y$$

Le calcul du rotationnel, fastidieux en coordonnées cartésiennes, très simple en coordonnées cylindriques en utilisant le formulaire du chapitre sur l'analyse vectorielle, donne ici un rotationnel nul.

Retenons néanmoins que, comme pour la divergence, c'est la mécanique des fluides qui a donné son nom au rotationnel.

• **Potentiel des vitesses. Écoulement incompressible et irrotationnel.**

Soit un écoulement irrotationnel. Puisque son rotationnel est nul, on sait (analyse vectorielle) que le champ de vitesses dérive d'un potentiel appelé, ça coule de source, *potentiel des vitesses*. On note habituellement  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$  (on trouve parfois un signe moins). Pour cette raison un écoulement irrotationnel est parfois qualifié de *potentiel*.

Si de plus l'écoulement est incompressible et donc que  $\text{div} \vec{v} = 0$ , alors  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi) = 0$  soit  $\Delta\Phi = 0$ . Il se trouve que cette équation est vérifiée par le potentiel électrostatique dans les régions de l'espace non chargées (c'est aisé à démontrer à partir de  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

---

<sup>12</sup>. Relire le Magicien d'Oz.

et  $\text{div } \vec{E} = 0$ ) : on peut raisonner par analogie ; on peut aussi simuler un écoulement par un courant électrique dans une cuve d'électrolyte.

## 2.g Champ local des vitesses.

Approfondissons ce qui a été abordé dans les paragraphes précédents par une approche plus théorique et comparons, à un instant  $t$  donné, la vitesse d'un point  $O$  pris comme origine et la vitesse en un point  $M$  proche de  $O$  de coordonnées  $x, y$  et  $z$  et ce pour un champ de vitesses  $\vec{v}(M) = \vec{v}(x, y, z)$  donné (expérimentalement par exemple).

Pour  $M$  assez proche de  $O$ , on peut confondre la variation de vitesse avec la différentielle, soit :

$$\vec{v}(M) - \vec{v}(O) \approx d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

Par projection sur les trois axes, on a alors :

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

et analogues pour  $dv_y$  et  $dv_z$  (les dérivées partielles étant calculées au point  $O$ ), soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

que nous noterons  $(d\vec{v}) = (D) (\overrightarrow{OM})$

On peut classiquement considérer la matrice  $(D)$  des dérivées partielles des composantes de la vitesse comme somme de la matrice antisymétrique  $(A) = \frac{1}{2} [(D) - {}^t(D)]$  et de la matrice symétrique  $(S) = \frac{1}{2} [(D) + {}^t(D)]$  où  ${}^t(D)$  est la matrice transposée de  $(D)$ . La différentielle  $d\vec{v}$  est ainsi formellement somme de deux termes.

Le premier peut être réécrit en terme de produit vectoriel (voir chapitre consacré à l'analyse vectorielle) :

$$(A) (\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

que l'on peut mettre sous la forme  $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$  en reconnaissant dans  $\vec{\Omega}$  le demi-rotationnel de la vitesse  $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ . Cette contribution au champ de vitesse a la même expression que pour un solide en rotation et décrit donc une rotation locale sans déformation. Rappelons, car c'est important : à la différence d'un solide pour lequel  $\vec{\Omega}$  est un vecteur, donc indépendant

du point de calcul, pour un fluide,  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$  est un champ vectoriel qui dépend du point de calcul et on l'appelle couramment le *vecteur tourbillon*. Voilà ce qui donne un peu plus de sens à la notion d'écoulement tourbillonnaire ou non.

Pour le second terme  $(S) (OM)$ , qu'on isole en se plaçant dans un référentiel tournant autour de  $O$  avec le vecteur rotation  $\Omega$ , puisqu'il fait intervenir une matrice symétrique, on va utiliser le fait qu'elle est diagonalisable dans un repère orthonormé bien choisi<sup>13</sup> et dans ce repère, nous aurons donc :

$$(S) (OM) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Un parallélépipède rectangle de côté  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  voit ses cotés s'allonger algébriquement<sup>14</sup>, pendant un temps  $dt$  de  $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$  et analogues donc devenir  $dx' = dx [1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt]$  et analogues ; son volume passe de  $dV = dx dy dz$  à  $dV' = dx' dy' dz'$ , soit, en se limitant au premier ordre :

$$dV' = dV (1 + \text{div } \vec{v} dt)$$

ce qui montre d'une autre façon que l'incompressibilité est liée à  $\text{div } \vec{v} = 0$ .

## 2.h Conditions aux limites.

Que peut-on dire du champ des vitesses d'un fluide autour d'un obstacle solide ? Dans la mesure où le fluide ne peut ni pénétrer dans le solide, ni en décoller, ce qui générerait une poche de vide instable, on peut affirmer que la composante normale de la vitesse est nulle ou, ce qui revient au même, que la vitesse est tangente à la paroi.

Peut-on aller plus loin ? Oui, mais avec subtilité, on verra plus loin que les forces de viscosité s'opposent à une discontinuité de vitesse qui générerait une force infinie ; donc au contact d'une paroi, la vitesse est nulle (ou plutôt la vitesse relative pour le cas où la paroi est animée d'une vitesse), ceci quand on ne peut pas négliger la viscosité.

La notion de *couche limite* étudiée plus loin, au paragraphe 4.c p. 23, permettra de préciser quand on peut dire, qu'au contact d'une paroi, la vitesse est nulle et quand elle est seulement tangentielle.

---

13. Nous verrons plus loin, quand nous étudierons la viscosité, que cette diagonalisation n'est pas forcément pertinente pour l'étude des forces.

14. On fait confiance au lecteur pour qu'il s'en convainque aisément.

## 3 Dynamique des fluides.

### 3.a Forces volumiques.

Maintenant que nous nous sommes dotés d'outils pour l'étude des vitesses et des accélérations, il est temps de nous intéresser aux forces qui s'exercent sur les molécules d'une quasi-particule. Le premier type de force regroupe celles qui ont un long rayon d'action et s'exercent donc sur toutes les molécules. Il s'agit d'une part des forces de pesanteur ; si  $\mu$  est la masse volumique et  $dV$  le volume de la particule, la force de pesanteur est  $d\vec{F}_p = \mu \vec{g} dV$ . Pour des mouvements à l'échelle de la planète (courants marins et atmosphériques), il faudra y ajouter la force de CORIOLIS  $d\vec{F}_c = 2\mu \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} dV$  où  $\vec{\Omega}_T$  est le vecteur rotation de la Terre par rapport au repère de FOUCAULT<sup>15</sup> (relire si nécessaire le chapitre B-III).

D'autre part, si le fluide est conducteur, il faudra y ajouter la force de LAPLACE. On sait (cf cours sur l'électromagnétisme au chapitre C-VIII) qu'avec un milieu électriquement neutre (c'est pratiquement toujours le cas) parcouru par un courant, cette force a pour expression  $d\vec{F}_m = \vec{j} \wedge \vec{B} dV$ .

### 3.b Forces surfaciques.

- **Forces de pression. Équivalent volumique.**

- *Forces de pression.*

Un second type de force regroupe celles qui ont un court rayon d'action et ne concernent donc que les molécules proches de la surface de la quasi-particule et qu'on modélise donc par des forces de surface.

Parmi elles figurent les forces de VAN DER WAALS, légèrement attractives.

Figurent aussi des forces fictives de la même nature que la poussée d'un turbo-réacteur et dues aux phénomènes diffusifs. En effet, par suite du mouvement erratique d'agitation thermique, des molécules initialement dans le volume de contrôle en sortent et que d'autres initialement à l'extérieur y entrent ; il se forme ainsi une couche où se mélangent intimement des molécules initialement dehors et dedans comme indiqué sur la figure 3 p. 17. Le cours sur les phénomènes diffusifs (chapitre E-X) justifiera que l'épaisseur de cette couche varie comme la racine carrée du temps écoulé.

Il est dès lors plus simple de définir la quasi particule comme un système ouvert pour lequel (cf chapitre A-VI sur les bilans dans un système ouvert) :

$$d\vec{p} = \vec{F} dt + \delta\vec{p}_e - \delta\vec{p}_s$$

---

15. Attention dans ce contexte à ne pas confondre  $\vec{\Omega}_T$ , vecteur rotation de la Terre avec le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$



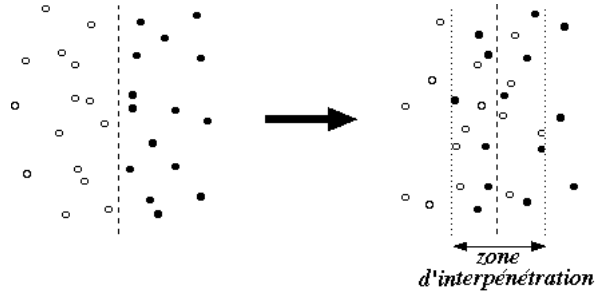


FIGURE 3 – Forces de pression.

Comme par nature  $\vec{p}_e$  est dirigé vers l'intérieur et  $\vec{p}_s$  vers l'extérieur, donc  $-\vec{p}_s$  vers l'intérieur, le bilan est une force fictive dirigée vers l'intérieur ; sauf cas tout à fait exceptionnel (qui conduit alors à des pressions négatives) elle l'emporte sur la force de VAN DER WAALS. En l'absence d'inhomogénéités de vitesse ou de viscosité, on peut montrer, par des considérations élémentaires de symétrie, que la force élémentaire qui s'exerce sur un élément de surface de la quasi-particule est la force de pression  $-p \vec{d}S$ .

◦ **Équivalent volumique.**

Considérons maintenant une quasi-particule et découpons son volume  $dV$  en volumes élémentaires  $\delta V$ , le bilan des forces de pression peut s'écrire :

$$\oint_{\Sigma} -p dS = - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} p \delta V$$

or, en pratique la quasi-particule est suffisamment petite pour que le gradient de pression  $y$  soit uniforme, d'où :

$$\oint_{\Sigma} -p dS = -\overrightarrow{\text{grad}} p \iiint_{\Omega} \delta V = -\overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

Retenons donc que le bilan des forces de pression sur une quasi-particule équivaut à une force  $-\overrightarrow{\text{grad}} p dV$

• **Fluides newtoniens. Forces de Viscosité. Équivalent volumique.**

◦ **Forces de Viscosité.**

Considérons maintenant ce qui se passe si le champ de vitesses est inhomogène. Plaçons-nous, en une approche modeste, dans le cas simple où  $\vec{v}(M, t) = v(z) \vec{e}_y$ . Considérons une quasi-particule cubique (parallèlement aux axes de  $Oxyz$ ) et sa face supérieure d'aire  $dS$ .

Comme précédemment et selon la figure 4 p. 18, il faut rajouter une force fictive dont l'expression est  $\delta \vec{p}_e - \delta \vec{p}_s = \delta m_e \vec{v}_e - \delta m_s \vec{v}_s$ . En pratique, les débits massiques entrant

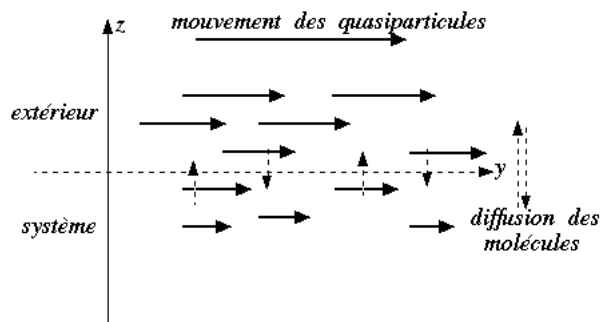


FIGURE 4 – Forces de viscosité.

et sortant sont égaux (la masse de la quasi-particule reste fixe), on a donc en projection sur  $Oy$  une force fictive  $dF_y = \delta m_e (v_{ey} - v_{sy})$  où, puisque  $v_{sy}$  concerne des molécules sous la surface et  $v_{ey}$  au dessus, ces deux quantités diffèrent et il y a apparition d'une force tangentielle à la surface, qui s'ajoute à la force de pression qui, elle, est normale.

Un fluide est dit *newtonien*<sup>16</sup> si cette force est proportionnelle au gradient de la vitesse (et à la surface) soit :

$$\text{Si } \vec{v}(M, t) = v(z) \vec{e}_y \text{ et si } d\vec{S} = dS \vec{e}_z \text{ alors } d\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial z} dS \vec{e}_y$$

$\eta$  s'appelle viscosité dynamique du fluide ; elle s'exprime en poiseuille<sup>17</sup> (Pl) (ou en Pascal.seconde) ; on introduit aussi la viscosité cinématique rapport de la viscosité dynamique sur la masse volumique (soit  $\nu = \eta/\mu$ ) mesurée en mètre carré par seconde.

Quelques ordres de grandeur s'imposent :

pour l'air à 20° C et sous 1 bar  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Pl,  $\mu = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

pour l'eau à 20° C  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}$  Pl,  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

et pour citer un corps très visqueux pour la glycérine  $\eta = 2,3$  Pl,  $\mu = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\nu = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

#### o *Équivalent volumique.*

Considérons maintenant une quasi-particule cubique (ou parallélépipédique) dont les côtés ont pour longueurs  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  et un coin au point  $M(x, y, z)$  (voir figure 5 p. 19) ; les forces de viscosité sont  $\eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z+dz} dx dy \vec{e}_y$  sur la face supérieure,  $-\eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z dx dy \vec{e}_y$  sur la face inférieure et rien sur les autres (voir figure 5 p. 19). Le bilan est donc :

$$dF = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z+dz} - \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z \right) dx dy \vec{e}_y$$

16. Nous évoquerons dans le chapitre B-XIV quelques exemples de fluides non-newtoniens.

17. du nom de Jean Poiseuille, médecin et physicien français, 1799–1869, qui voulant modéliser de la circulation sanguine, a réalisé un travail exemplaire de physicien.

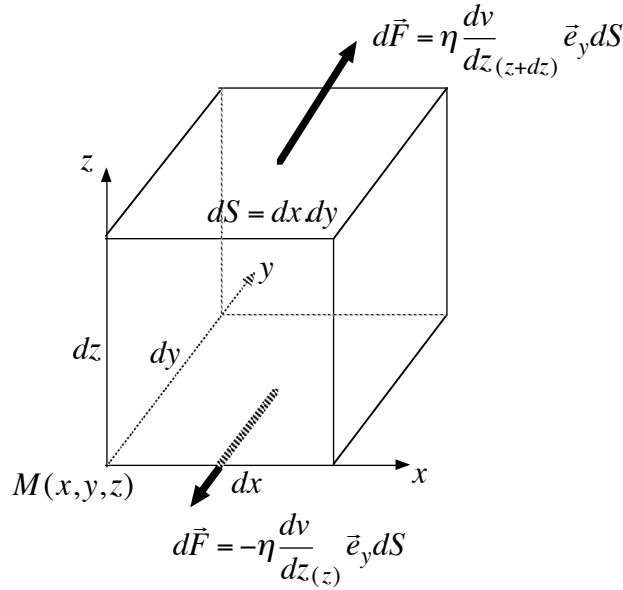


FIGURE 5 – Force volumique de viscosité.

Un développement de TAYLOR conduit, en reconnaissant  $dV=dx.dy.dz$ , à :

$$dF = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dV \vec{e}_y$$

où l'on reconnaît, dans notre modèle :

$$dF = \eta \Delta \vec{v} dV$$

Pour les autres faces du cube, dans notre contexte, les faces latérales ne sont soumises à aucune force, car la vitesse de part et d'autre est la même et la face inférieure soumise à une force de viscosité donnée par la même formule.

On admettra<sup>18</sup> que ce résultat se généralise. Retenons donc que le bilan des forces de viscosité sur une quasi-particule équivaut à une force  $\eta \Delta \vec{v} dV$ .

Terminons en rappelant que ceci n'est vrai que pour le modèle du fluide newtonien. Il existe toutes sortes de comportements qui s'écartent de ce modèle, mais nous ne les évoquerons pas ici. Heureusement, les deux fluides les plus courants, l'eau et l'air sont newtoniens.

18. ce qui est faux ; on montre, dans le chapitre B-X consacré à l'élasticité et la viscosité, que, rigoureusement, l'équivalent volumique est  $\Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div} \vec{v})$ . Mais pour un liquide incompressible ou un gaz en écoulement incompressible, on sait que  $\text{div} \vec{v}$  est nul et pour un écoulement compressible d'un gaz, il faut des situations paroxystiques pour que le terme en  $\text{grad}(\text{div} \vec{v})$  se manifeste.

## 4 Étude phénoménologique.

Nous avons désormais tous les outils pour une étude théorique, mais il est important en mécanique des fluides de s'être confronté à l'expérience avant de mettre en équation les phénomènes, afin d'éviter les raisonnements trop simplistes.

### 4.a Traînée d'une sphère dans un écoulement. Nombre de Reynolds.

Considérons un solide se déplaçant à vitesse constante dans un fluide qui est au repos loin de lui (ou ce qui revient au même à un changement de référentiel près, immobile dans un fluide qui, loin de lui, a une vitesse uniforme). Quelle force (appelée force de *traînée* ou traînée tout court) s'exerce sur le solide ? Cherchons à deviner les facteurs pertinents :

- la vitesse relative  $V$ , bien sûr,
- la forme et la taille du solide, mais pas du tout son intérieur car le fluide ne peut interagir que par des forces surfaciques ; limitons nous à une forme sphérique, la taille sera donnée par le rayon  $R$  (voir figure 6 p. 21),
- la nature du fluide, mais là on hésite entre deux idées :
  - comme le solide doit repousser le fluide et donc le mettre en mouvement, c'est la masse volumique  $\mu$  du fluide qui importe,
  - comme la viscosité gère les inhomogénéités de vitesses et qu'il y a vitesse relative, c'est la viscosité  $\eta$  qui importe.

On hésitera donc entre deux formules donnant la force  $F$  en fonction soit de  $R$ ,  $V$  et  $\mu$ , soit de  $R$ ,  $V$  et  $\eta$ . Tentons donc de trouver une loi *monôme* soit  $F = R^\alpha \cdot V^\beta \cdot \mu^\gamma$ , soit  $F = R^\alpha \cdot V^\beta \cdot \eta^\gamma$  à une constante multiplicative non dimensionnée près et raisonnons par analyse dimensionnelle (voir chapitre A-V), on a :

- $[F] = M.L.T^{-2}$
- $[R] = L$
- $[V] = L.T^{-1}$
- $[\mu] = M.L^{-3}$
- pour  $\eta$ , c'est moins immédiat ; on part de  $F = \eta \frac{\partial v}{\partial z} dS$  d'où  $M.L.T^{-2} = [\eta] \cdot \frac{L.T^{-1}}{L} \cdot L^2$  d'où  $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$

La première hypothèse donne  $M.L.T^{-2} = L^\alpha \cdot (L.T^{-1})^\beta \cdot (M.L^{-3})^\gamma$  d'où, en identifiant les exposants,  $1 = \gamma$ ,  $1 = \alpha + \beta - 3\gamma$  et  $-2 = -\beta$  d'où  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$  et  $\gamma = 1$  et une loi en  $\mu \cdot R^2 \cdot V^2$ .

La seconde hypothèse donne  $M.L.T^{-2} = L^\alpha \cdot (L.T^{-1})^\beta \cdot (M.L^{-1}.T^{-1})^\gamma$  d'où, en identifiant les exposants,  $1 = \gamma$ ,  $1 = \alpha + \beta - \gamma$  et  $-2 = -\beta - \gamma$  d'où  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $\gamma = 1$  et une loi en  $\eta \cdot R \cdot V$ .

Laquelle est valable ? Le suspense est insoutenable ! Il y a en fait bien longtemps que les expériences ont été menées en soufflerie. Au très faibles vitesses, c'est la loi en  $\eta \cdot R \cdot V$  qui se vérifie ; une étude théorique a été possible, a permis de calculer la constante dont la valeur a été validée par l'expérience ; on a  $F = 6\pi \eta \cdot R \cdot V$ , formule connue sous le nom de

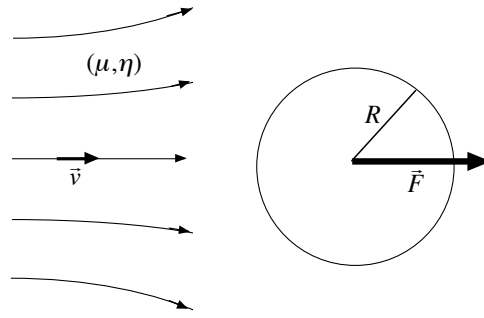


FIGURE 6 – Traînée d'une sphère.

loi de STOKES dont une démonstration sera donnée au chapitre B-XIV.

Par contre, aux grandes vitesses, c'est la loi en  $\mu.R^2.V^2$  qui se confirme ; ici, la constante n'a pu être déterminée qu'expérimentalement. L'usage est de noter  $F = C_x \mu S v^2/2$  où  $S = \pi R^2$  est la surface de la sphère projetée sur un plan (orthogonal à la vitesse si l'on veut étendre la notation à autre chose qu'une sphère) ; le résultat expérimental est  $C_x = 0,44$ . On note parfois aussi  $F = C \mu R^2 v^2$  où  $C = \pi C_x/2 = 0,69$ .

Et aux vitesses moyennes, ni l'une ni l'autre des formules ne convient.

Reste un épineux problème : trouver le domaine de validité des deux formules. Osborne REYNOLDS<sup>19</sup> a eu l'idée de faire apparaître les résultats expérimentaux sous forme de relation entre deux nombres sans dimensions :

– en abscisse le rapport des deux lois de force, sans les constantes soit :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu R^2 V^2}{\eta R V} = \frac{\mu R V}{\eta} = \frac{R V}{\nu}$$

appelé depuis nombre de REYNOLDS

– en ordonnée la force divisée par la loi aux grandes vitesses sans constante soit

$$\frac{F}{\mu R^2 V^2}$$

Toutes les expériences avec toutes sortes de fluides, de rayons et de vitesses confirment alors une courbe unique<sup>20</sup> (figure 7 p. 22) tracée en échelle logarithmique :

- pour  $\mathcal{R}$  inférieur à 10, la pente -1 confirme la loi de STOKES,
- pour  $\mathcal{R}$  compris entre 10 et 1000, on observe une zone de raccordement,
- pour  $\mathcal{R}$  supérieur à 1000, la pente nulle confirme la seconde formule.

Donnons pour finir quelques ordres de grandeur :

- pour une voiture ( $R \sim 1$  m) en ville ( $V \sim 15$  m.s<sup>-1</sup>) dans l'air ( $\nu = 1,5.10^{-5}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>), on a  $\mathcal{R} \sim 10^6$ , on est largement dans le cadre d'une loi en  $\mu R^2 V^2$ .

19. ingénieur anglais, 1842–1912.

20. valable pour toutes les sphères ; il y aurait une autre courbe, par exemple pour les cylindres longs.

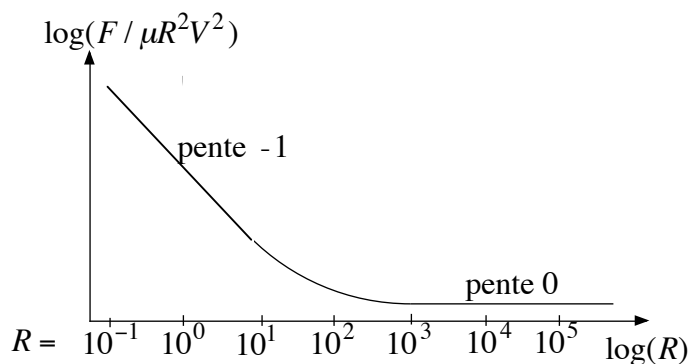


FIGURE 7 – Traînée d’une sphère, résultats expérimentaux.

- pour un nageur ( $R \sim 0,25$  m) champion olympique ( $V \sim 1,5$  m.s<sup>-1</sup>) dans l’eau, bien sûr, ( $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>), on a  $\mathcal{R} \sim 3 \cdot 10^5$ , on est largement dans le cadre d’une loi en  $\mu R^2 V^2$ .
- pour un microbe ( $R \sim 1$  μm) au galop ( $V \sim 1$  μm.s<sup>-1</sup>) dans un milieu aqueux ( $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>), on a  $\mathcal{R} \sim 10^{-6}$ , on est largement dans le cadre d’une loi en  $\eta R V$ .

Il est bon de retenir que les objets de notre taille, même à très faible vitesse ont des nombres de REYNOLDS élevés.

Remarque : dans le chapitre suivant (B-XV), on sera amené, selon le contexte, à introduire toutes sortes de nombres adimensionnés ; par exemple le nombre de FROUDE pour les phénomènes de surface dans un bassin ou le nombre de MACH pour les écoulements supersoniques ou légèrement subsoniques.

#### 4.b Écoulements laminaires et turbulents.

Observons les schémas (figure 8 p. 22) des trajectoires du fluide pour différents valeurs du nombre de REYNOLDS.

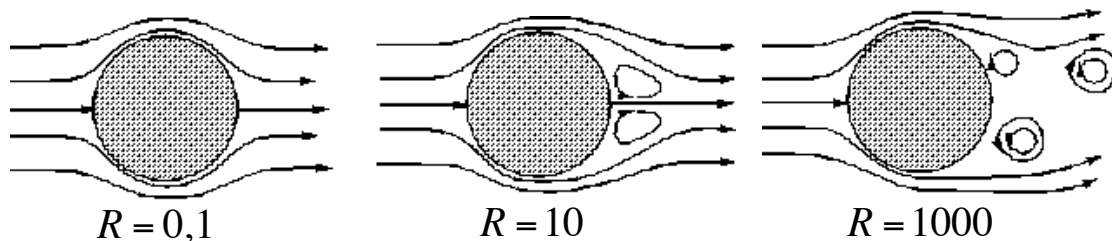


FIGURE 8 – Ecoulements laminaires et turbulents.

Aux faibles valeurs de  $\mathcal{R}$ , les trajectoires sont localement parallèles et collent à la surface de la sphère et le régime est partout stationnaire. On dit avoir affaire à un régime *laminaire*, caractérisé par les lignes de courants nettement identifiables.

Quand  $\mathcal{R}$  augmente les trajectoires décollent de la surface et délimitent derrière la sphère une zone où apparaissent des tourbillons où les échanges de quantité de mouvement se font par brassage (on parle de *convection*). On dit avoir affaire à un régime *turbulent*.

Plus  $\mathcal{R}$  augmente, plus les trajectoires décollent tôt et plus la zone de tourbillons est importante et arrive un moment où les tourbillons se détachent de la sphère et partent vers l'arrière, pendant que naissent d'autres tourbillons derrière la sphère, le régime devient nettement non permanent. La succession de tourbillons détachés de la sphère et s'en éloignant forment ce qu'on appelle une *allée de VON KARMAN*<sup>21</sup>.

#### 4.c Couche limite. Écoulement parfait. Retour sur les conditions aux limites.

L'expérience prouve qu'il existe au voisinage de la surface du solide une mince couche où le module de la vitesse varie énormément de zéro au contact de celle-ci jusqu'à une valeur du même ordre que la vitesse loin du solide. On appelle cette couche la *couche limite* dont la théorie a été développée par Ludwig PRANDTL<sup>22</sup>; le gradient de vitesse y est énorme et les forces de viscosité y sont prépondérantes.

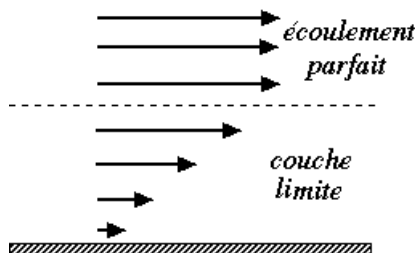


FIGURE 9 – Couche limite.

Au delà de cette couche les gradients sont faibles (voir figure 9 p. 23) et les forces de viscosité sont négligeables (ainsi du reste que tous les autres phénomènes diffusifs, comme la conduction thermique, l'écoulement est donc aussi adiabatique et même réversible puisque les gradients sont négligeables); on peut donc y modéliser le fluide par un fluide non visqueux et l'on dit alors qu'on a affaire à un *écoulement parfait* et en pratique cet écoulement est irrotationnel (cf les conséquences du théorème de KELVIN). Notons que c'est la couche limite qui décolle de la sphère et donne naissance à la zone tourbillonnaire.

21. Je suggère à mes lecteurs de s'accouder à la rambarde d'un pont enjambant un fleuve à fort débit et d'observer ce qui se passe en aval d'un obstacle comme un poteau planté dans le fleuve; il observera ainsi à peu de frais une telle allée de Von Karman.

22. physicien allemand, 1875–1953.

Pour un solide de forme compacte comme une sphère, l'épaisseur de la couche limite est faible devant le rayon et on peut l'ignorer, en contrepartie, il faudra accepter l'idée d'une vitesse de fluide non nulle (mais tangentielle) au contact du solide.

Notons que l'épaisseur de la couche limite, comme tout phénomène diffusif croît comme la racine carrée du temps que met le fluide à aller du point où il entre en contact avec le solide et celui où il atteint le point considéré. Pour une sphère, ce temps est trop court pour obtenir une épaisseur appréciable par comparaison avec le rayon ; par contre, pour un tuyau très long et de faible rayon, la couche limite finit par envahir tout le tube (sauf près de sa section d'entrée) et la viscosité ne sera nulle part négligeable.

Notons enfin que pour les très grandes valeurs du nombre de REYNOLDS (au delà de  $10^5$ ), la couche limite devient elle-même turbulente, ce qui a pour conséquence de retarder le décollement des lignes de courant, de diminuer la zone tourbillonnaire et donc de diminuer la traînée. On peut favoriser ce phénomène en rendant la surface moins lisse (cf la balle de golf).