

Chapitre B-XXII

Relativité générale, une théorie de la gravitation.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Il est bien évident qu'un chapitre d'une petite quarantaine de pages ne saurait être un cours de relativité générale. Il s'agit donc d'une première approche, d'une mise en bouche, pour inciter le lecteur à aborder des ouvrages plus importants, après avoir compris que l'aspect calculatoire de la gestion des espaces courbes est secondaire et qu'on peut en admettre les résultats pour se concentrer sur l'aspect physique des choses.

On rend compte des expériences de pensées d'Einstein qui ont conduit à établir l'équivalence entre gravitation et énergie puis à remplacer conceptuellement le champ gravitationnel par une déformation de l'espace.

La loi fondamentale de la mécanique prend dès lors une formulation simple utilisant la dérivation covariante ; le mouvement rectiligne uniforme est remplacé par le mouvement sur une géodésique qui devient la règle.

On établit ensuite l'équation d'Einstein qui lit la courbure de l'espace à la répartition de masses. On en tire les conséquences pour l'espace vide autour d'un astre à symétrie sphérique (métrique de Schwarzschild) et l'on évoque comme conséquences l'avance du périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux passant près du Soleil.

On termine enfin par un peu de cosmologie ; celle des espaces homogènes isotropes, non stationnaires, dont on prévoit les évolutions possibles. On établit le lien avec la loi de Hubble qui en est la conséquence expérimentale la plus connue.

Table des matières

B-XXII Relativité générale, une théorie de la gravitation.	1
1 Les ambitions modestes de ce chapitre.	5
2 La genèse des idées.	5
2.a Masse inerte et masse grave, le mystère originel.	5
2.b A la recherche du référentiel galiléen absolu... perdu.	6
2.c Quelques expériences de pensée.	6
2.d Quelques expériences de pensée supplémentaires.	7
2.e La piste des géométries riemanniennes.	8
2.f L'abandon du mouvement rectiligne uniforme.	9
2.g Conséquence sur le temps.	10
3 Formulation covariante de la loi de la mécanique.	10
3.a Quelques rappels de mécanique relativiste (relativité restreinte).	10
3.b Loi de la mécanique dans le référentiel en chute libre.	11
3.c Recherche de la formulation covariante.	12
3.d Un exemple pour mettre en œuvre ce formalisme.	13
4 Formulation covariante de la loi de gravitation.	15
4.a Approximation non relativiste des champs gravitationnels faibles et stationnaires.	15
4.b Le tenseur énergie-impulsion en relativité restreinte.	17
4.c L'équation d'Einstein.	19
5 Champ de gravitation créé par un astre sphérique isotrope dans un espace vide.	22
5.a Premières remarques sur le tenseur métrique.	22

5.b	Calcul du tenseur de courbure	23
5.c	Les conséquences de l'équation d'Einstein.	24
5.d	Mouvement dans une métrique schwarzschildienne.	27
5.e	Déviations des rayons lumineux.	30
6	Cosmologie des univers isotropes et homogènes.	32
6.a	Choix des coordonnées comobiles et conséquences de ce choix. . .	33
6.b	Choix d'une métrique.	33
6.c	Conséquences de l'équation d'Einstein.	34
6.d	Evolution de l'univers.	37
6.e	Quel est le bon modèle? La constante de Hubble.	39

1 Les ambitions modestes de ce chapitre.

L'objectif global de mon cours est de permettre à qui est arrivé au niveau Bac+2 ou Bac+3 avec l'impression d'être souvent allé trop vite de reprendre systématiquement ce qu'il a appris afin de consolider ses bases avant d'aller plus loin.

Ce chapitre ne procède pas de cette logique ; c'est une incitation à aborder la relativité générale. Il ne fait qu'effleurer les choses mais l'essentiel y est de démythifier cette discipline qui a la réputation d'être inabordable par le commun des mortels. La difficulté réside en fait au niveau mathématique car on a besoin d'algèbre tensorielle, d'algèbre extérieure et de géométries riemanniennes ; ces noms seuls font déjà peur.

Une fois que l'on a compris que cet outil mathématique n'est que technique (on en a donné l'esprit dans le chapitre B-XXI qui l'introduit), on admettra que les calculs qu'il génère peuvent être sous-traités car ils n'ont aucun contenu physique (en pratique on pourra sauter les calculs et en admettre les résultats) et l'on se concentrera sur la genèse de la théorie où un souci presque esthétique devient un puissant instrument de recherche et sur quelques conséquences primordiales qui sont finalement beaucoup moins incompréhensibles qu'il n'y paraît.

Puissent mes lecteurs me faire confiance. EINSTEIN lui-même a avoué avoir souffert plusieurs années pour maîtriser les mathématiques sous-jacentes. Je ne les maîtrise pas totalement, je n'en ai pas honte et ça ne m'empêche pas d'essayer de vous donner envie d'aller explorer cette voie plus loin que je ne l'ai fait.

2 La genèse des idées.

2.a Masse inerte et masse grave, le mystère originel.

Dès les premiers débuts de la physique en tant que science, la masse apparaît en deux endroits, plus précisément dans deux axiomes, le principe fondamental de la dynamique établi par GALILÉE et la loi de gravitation de NEWTON,

- comme coefficient de proportionnalité entre une force subie par un corps et l'accélération de son mouvement $\vec{F} = m \vec{a}$, on peut l'appeler « masse inerte »,
- comme coefficient de proportionnalité entre une force d'attraction subie par un corps et le champ gravitationnel créé par un autre, en particulier la Terre, $\vec{F} = m \vec{g}$, on peut l'appeler « masse grave ».

L'expérience prouve que ces deux masses sont proportionnelles de sorte que si la force de pesanteur est la seule en jeu, tous les corps ont le même mouvement, à conditions initiales identiques. Dès lors, en choisissant le même étalon pour définir la masse inerte unité et la masse grave unité, on peut identifier ces deux notions sous le nom de masse tout court¹.

1. Pour plus de développements, voir les chapitres B-II et B-III consacrés à la mécanique du point.

Pourtant, il n'y a aucune raison a priori qu'il en soit ainsi et ce fait avait déjà troublé NEWTON. Faute de réponse et puisque les deux masses avaient été identifiées, le problème entrait dans le domaine du non-dit² et disparaissait ainsi.

EINSTEIN va l'en extraire bien plus tard.

2.b A la recherche du référentiel galiléen absolu... perdu.

La mécanique classique du point postule l'existence de *référentiels inertiels* (on dit aussi *galiléens*) dans lesquels les lois de la physique sont simples. Le problème, c'est d'en trouver un³. Le référentiel lié à la Terre n'en est pas un : l'expérience de FOUCAULT le prouve en montrant l'influence de la force de CORIOLIS (qui se manifeste aussi dans la circulation atmosphérique et océanique). Le référentiel de FOUCAULT, centré sur la Terre et dont les axes pointent vers des points fixes de la voûte stellaire, n'en est pas un non plus, c'est ce que montrent les phénomènes de marée. Le référentiel de COPERNIC, centré sur le Soleil et dont les axes pointent vers des points fixes de la voûte stellaire en est un... tant qu'il s'agit d'étudier le système solaire et sa proche banlieue mais pour étudier les mouvements stellaires à l'intérieur de notre galaxie, non. On peut alors penser à un référentiel dont le centre serait le centre de masse de la galaxie et dont les axes pointerait vers des « directions fixes » (terme à définir) de la « voûte galactique ». Sauvés ? Non, comment faire pour étudier les mouvements des galaxies à l'intérieur d'un amas galactique, puis des amas dans les super-amas, puis des super-amas les uns par rapport aux autres ? Bref, on joue ici aux poupées russes (en sens inverse, de toute petite à l'intérieur vers les plus grosses) et on sent bien qu'au niveau de l'Univers entier où tout bouge, on ne trouvera rien à l'intérieur qui puisse fournir ces fameuses directions fixes, ni à l'extérieur car qu'y a-t-il à l'extérieur de tout ?

2.c Quelques expériences de pensée.

Un des dadas d'Albert EINSTEIN est l'*expérience de pensée*⁴, à savoir imaginer une situation expérimentale inédite et en donner les résultats expérimentaux attendus par les lois de la physique mais toutefois déconcertants, avec bien sûr l'arrière-pensée de prouver ainsi que ces lois ne sont pas totalement satisfaisantes.

Il va ainsi enfermer quelques physiciens dans un ascenseur spacieux mais sans aucune vue sur l'extérieur, le placer dans diverses situations expérimentales et laisser les physiciens faire leurs observations. Nous commenterons les résultats qu'ils observent dans le contexte de la mécanique classique.

La première expérience est menée sur Terre, l'ascenseur est à l'arrêt. Un physicien saute, il retombe, un second lâche son stylo qui tombe, un troisième lance une pomme vers le

2. J'ai souvent cité en référence le *Dire et ne pas dire* de Oswald Ducrot : on ne peut pas aisément contester le non-dit.

3. Pour plus de développements, voir le chapitre B-III consacré à la recherche du bon référentiel.

4. *Gedankenexperiment* dans la bouche d'Einstein.

haut, elle retombe sur la tête de NEWTON qui invente la théorie de l'attraction universelle et en déduit que tout est attiré par la Terre.

La deuxième expérience est menée sur Terre, l'ascenseur se décroche et tombe en chute libre uniformément accélérée car EINSTEIN a pris soin d'aspirer tout l'air de la colonne d'ascenseur. Un physicien saute, il flotte, un second lâche son stylo qui flotte, un troisième lance une pomme vers le haut, elle flotte aussi et NEWTON continue de ronfler. En effet, tout tombe selon la même loi, la cabine et ce qu'elle contient.

Pour la troisième expérience, EINSTEIN a utilisé ses super-pouvoirs⁵ pour transporter la cabine dans le vide intergalactique où il la laisse flotter librement. En l'absence de centre attracteur, on est donc en impesanteur. Un physicien saute, il flotte, un second lâche son stylo qui flotte, un troisième lance une pomme vers le haut, elle flotte aussi et NEWTON continue de ronfler.

Pour la quatrième et dernière expérience, la cabine est toujours dans le vide intergalactique mais un moteur de haute technologie lui confère une accélération constante vers le haut (de la cabine), sans aucune vibration qui puisse déceler sa présence. Dans le référentiel de la cabine d'ascenseur, tout est soumis à la force d'inertie d'entraînement. Un physicien saute, il retombe, un second lâche son stylo qui tombe, un troisième lance une pomme vers le haut, elle retombe sur la tête de NEWTON.

Si l'on compare cette dernière expérience avec la première, on constate que, faute de référence extérieure (les physiciens sont enfermés dans une cabine sans fenêtre), rien ne permet de distinguer l'immobilité dans un champ de pesanteur d'un mouvement accéléré dans un contexte d'impesanteur.

Si l'on compare la deuxième et la troisième expérience, on constate que rien ne permet de distinguer une chute libre dans un champ de pesanteur d'une situation d'impesanteur sans accélération.

La conclusion d'EINSTEIN est radicale : la gravitation n'est qu'une illusion dépendant du choix du référentiel et la masse grave devient dès un concept totalement inutile et sans objet. Il y a équivalence entre inertie et gravitation.

2.d Quelques expériences de pensée supplémentaires.

Dans les quatre mêmes situations que celles du paragraphe précédent, EINSTEIN imagine qu'un projectile perfore la paroi de la cabine, la traverse et en ressort en perforant la paroi opposée. Les physiciens ont eu le réflexe de survie de baisser la tête mais aussi le réflexe scientifique de noter la trajectoire du projectile. Nous commenterons encore les résultats qu'ils observent dans le contexte de la mécanique classique.

Quand la cabine est au repos sur Terre, le projectile subit une force de pesanteur constante, acquiert donc une accélération constante et un mouvement parabolique.

5. Einstein a dit quelque chose comme : « L'imagination est supérieure au savoir car le savoir est limité, pas l'imagination ».

Quand la cabine est en chute libre sur Terre, elle a la même accélération que le projectile, la différence des vitesses, autrement dit la vitesse relative, reste donc constante et la trajectoire est rectiligne.

Quand la cabine flotte au milieu de nulle part, elle et le projectile ont une accélération nulle, la différence des vitesses reste constante et la trajectoire est rectiligne.

Quand la cabine, au milieu de nulle part, est soumise à la poussée supposée ici constante de son moteur, elle a une accélération constante, le projectile a une accélération nulle, l'accélération relative est constante et le mouvement parabolique.

On retrouve, bien évidemment, la même identité de comportement entre la première et la dernière situation et entre la deuxième et la troisième. Certes, mais EINSTEIN a une idée derrière la tête, il suppose que le projectile est un puissant faisceau lumineux et non un projectile matériel. En mécanique classique, la lumière n'est pas soumise à la pesanteur et dans le référentiel terrestre sa trajectoire est rectiligne, soit formellement une accélération nulle par rapport au sol. Dans la première expérience, la trajectoire par rapport à la cabine est rectiligne et dans la seconde parabolique. Le principe d'équivalence vole en éclats.

Mais quand EINSTEIN réalise ses expériences de pensée, la théorie de la relativité restreinte a déjà été élaborée et il le sait bien car il en est l'auteur. L'équivalence masse-énergie, la célèbre formule $E = m c^2$ confère une masse à la lumière car elle transporte de l'énergie. Plus en détail, la lumière est formée de photons (c'est encore lui qui a montré leur existence) d'énergie $h\nu$ et de quantité de mouvement $p = \frac{h\nu}{c}$ en module et à partir de là, on peut modéliser l'effet de la gravitation sur la lumière. Numériquement, l'effet sera si faible sur Terre qu'il est totalement indécélable et il faudra pour vérifier que la lumière est bien sensible à la gravitation trouver des situations plus « violentes ».

L'essentiel à ce stade est que le principe d'équivalence inertie-gravitation n'est pas a priori remis en question par la lumière.

2.e La piste des géométries riemanniennes.

EINSTEIN est dès lors persuadé qu'il est possible d'exprimer les lois de la physique d'une même façon dans des situations expérimentales qui produisent les mêmes phénomènes (les expériences 1 et 4 ou 2 et 3 des paragraphes précédents), que le référentiel choisi soit galiléen ou non (voir ces mêmes exemples) et que la gravitation y soit présentée de façon totalement différente. Oui mais comment ?

Du reste, le problème se complique ainsi : au vu toujours des mêmes exemples, on peut escamoter la gravitation en choisissant un référentiel lié au mouvement de chute libre, donc dont l'accélération par rapport à un référentiel arbitraire est égale à l'intensité de la pesanteur dans ce référentiel. Malheureusement, le champ de gravitation est, sauf exception, non uniforme. L'équivalence inertie-gravitation ne peut se faire que ponctuellement, ou en bonne approximation localement, c'est-à-dire dans un petit voisinage de tout point. En pratique, cela impose l'utilisation de bases de projection dépendant du point où l'on est,

point de l'espace-temps car EINSTEIN va forcément travailler en prolongation de la relativité restreinte.

EINSTEIN pensait à tout cela depuis 1910 (environ) mais avait conscience qu'il manquait d'outils mathématiques pour aller plus loin. En 1912, il est mis au courant des travaux des mathématiciens Elwin CHRISTOFFEL, Gregorio RICCI, Tullio LEVI-CIVITA et Bernhard RIEMANN sur la géométrie différentielle, les calculs différentiels absolus, les géométries non-euclidiennes et il comprend très vite que c'est là-dessus qu'il doit s'appuyer. Malheureusement, ces mathématiques ne sont pas d'un abord facile surtout pour un physicien et il faudra plusieurs années pour qu'il les maîtrise, en tire les équations de sa nouvelle mécanique et leur donne ensuite un sens physique.

Le premier point-clef qu'il dégage est que les lois de la mécanique doivent s'exprimer de façon tensorielle et que les dérivations classiques doivent être remplacées par des dérivations covariantes (voir le chapitre B-XXI où l'on introduit cette notion). On y reviendra.

La recherche d'un référentiel absolu n'est désormais plus nécessaire, ce qui va dans le sens de ses expériences de pensée.

2.f L'abandon du mouvement rectiligne uniforme.

Puisque le mouvement rectiligne uniforme en l'absence de force, en particulier de gravitation, et le mouvement parabolique dans un champ de pesanteur (supposé ici uniforme pour alléger l'exposé) doivent être gérés par la même équation, le mouvement rectiligne uniforme perd sa primauté et le mouvement de chute libre doit devenir la norme du mouvement naturel.

La pratique des géométries non-riemanniennes donne à EINSTEIN l'idée suivante : en présence de masses, l'univers plat se courbe, les lignes droites cessent de l'être et se courbent. De façon provocatrice, en présence de masses, on peut dire que la chute libre est toujours rectiligne uniforme mais que dans un espace courbe la trajectoire rectiligne uniforme est devenue autre chose qu'on appellera une *géodésique*.

EINSTEIN aimait l'image suivante : si on fait rouler une boule ou une bille sur un sol inégal, les bosses vont dévier la boule dans le sens qui l'en éloignera et les creux dans le sens qui l'en rapprochera. Si l'on regarde la chose du haut d'un gratte-ciel, on ne verra plus ni les bosses ni les creux et l'on interprétera la non-rectitude de la trajectoire par l'existence d'un champ attractif ou répulsif, donc d'une espèce de gravitation alors qu'en fait la boule évolue dans un milieu bidimensionnel courbé par les bosses et les creux (sur une troisième dimension).

A deux dimensions, c'est lumineux. Par contre un espace-temps quadri-dimensionnel courbe suppose qu'on l'imagine déformé dans une cinquième dimension. Que le lecteur me pardonne de ne pas avoir dessiné cela.

Un second point-clef est alors que les paramètres de courbure de l'espace doivent être

liés (de façon tensorielle, cf supra) à la présence de masses (elle aussi exprimée de façon tensorielle).

On éliminera, du coup, l'incompatibilité entre la théorie newtonienne de la gravitation avec la théorie de la relativité restreinte ; en effet la première sous-entend une interaction instantanée à distance et la seconde limite la vitesse de l'interaction à celle de la lumière (voir le champ électromagnétique créé par une charge mobile dans le chapitre C-XI du traité du rayonnement électromagnétique).

2.g Conséquence sur le temps.

Passer d'un référentiel avec gravitation à un référentiel sans gravitation, comme tout changement de référentiel en relativité restreinte, modifie l'échelle du temps (voir au chapitre B-VI la dilatation du temps relativité restreinte). Il ne faudra donc pas s'étonner dans la nouvelle mécanique qui va naître que l'écoulement du temps (la marche des horloges par exemple) soit influencé par la gravitation.

Dans le système GPS, on compare le temps indiqué par une horloge atomique au sol donc soumise à la gravitation à celui d'horloges atomiques en orbite, donc en chute libre et en impesanteur relative. Les horloges atomiques sont si précises que cet effet de relativité générale se fait sentir. La dérive calculée et vérifiée expérimentalement est de l'ordre de 40 micro-secondes par jour, ce qui, multiplié par la vitesse de la lumière, donne un écart de 10 kilomètres sur les mesures de distance et ça ne passe pas inaperçu. C'est du reste la meilleure vérification expérimentale de l'aspect temporel de la relativité générale. Désormais le système GPS contient une compensation automatique de cet effet.

Une autre conséquence du ralentissement du temps est la modification de fréquences des phénomènes périodiques et en particulier un décalage spectral des spectres lumineux d'émission ou d'absorption, ce qui offre une autre voie pour vérifier cette prévision théorique. Le spectre de Sirius, l'étoile la plus lumineuse du ciel qui tourne dans le champ gravitationnel d'un compagnon pratiquement invisible, en est un bon exemple.

3 Formulation covariante de la loi de la mécanique.

3.a Quelques rappels de mécanique relativiste (relativité restreinte).

On engage le lecteur à se rafraîchir la mémoire en allant relire les chapitres B-VI et B-VII concernant la relativité restreinte. Les rappels qui suivent ne sont là que pour lui éviter de faire des allers-retours entre ces chapitres et celui-ci.

Dans l'espace-temps, on appelle *événement* la donnée d'un point M de coordonnées cartésiennes x , y et z et d'un instant t . Entre deux événements infiniment voisins repérés par (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$, il y a un intervalle ds défini par son carré $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ (ou l'opposé, question de convention) où c est la vitesse

de la lumière qui est un invariant. Dans un changement de référentiel galiléen, ds^2 est un invariant.

Remarque : il est d'usage en relativité restreinte de remplacer le temps t par $\tau = ct$ (pour des raisons d'homogénéité) voire ict . Dans le cadre des géométries riemanniennes, l'usage de ict est peu courant. Nous en resterons donc ici à ct , x , y et z qu'on rebaptisera ici x^0 , x^1 , x^2 et x^3 pour utiliser au mieux les notations tensorielles (remarquons qu'on numérote de 0 à 3 et non de 1 à 4; le choix de 0 pour le temps marque plus les esprits a-t-on pensé).

Pour un point mobile se déplaçant à la vitesse \vec{v} de composantes v_x , v_y et v_z , qui passe à un instant t au point M , on peut toujours imaginer un changement de référentiel tel que le référentiel relatif ait pour origine ce point M et ait pour vitesse par rapport au référentiel absolu celle du point à cet instant t , on l'appelle référentiel *tangent*. Pour un déplacement correspondant à dx , dy et dz pendant dt dans le référentiel absolu; dans le référentiel relatif la vitesse est nulle par construction et les composantes du déplacement sont nulles; la durée élémentaire, dépendant du référentiel en relativité restreinte, qu'on note ici dt_0 s'appelle *temps propre* et est choisie du même signe que dt . L'invariance de l'intervalle entraîne que

$$c^2 dt_0^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) dt^2 = (c^2 - \vec{v}^2) dt^2 = (c^2 - v^2) dt^2$$

$$\text{d'où } dt_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

On définit un *quadrivecteur vitesse*⁶ \overleftarrow{v} comme un vecteur à quatre dimensions de composantes $v^0 = \frac{d(ct)}{dt_0}$, $v^1 = \frac{dx}{dt_0}$, $v^2 = \frac{dy}{dt_0}$ et $v^3 = \frac{dz}{dt_0}$. Ce vecteur est un invariant relativiste, c'est à dire un tenseur dont la matrice de passage est la matrice de LORENTZ. On a donc :

$$\overleftarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, v_x, v_y, v_z)$$

On n'a pas besoin de plus à ce stade.

3.b Loi de la mécanique dans le référentiel en chute libre.

On a vu plus haut qu'on annule la gravitation dans le référentiel qui au voisinage d'un point M et de l'instant t – ou mieux au voisinage de l'événement (M, t) – a par rapport au référentiel de référence l'accélération des mouvements de chute libre. Dans ce référentiel sans gravitation, tout point a une vitesse constante, en composantes et en norme et donc aussi un quadri-vecteur vitesse (voir plus haut son expression) constant. Dans l'espace-temps et avec ce référentiel, la trajectoire (la quadri-trajectoire) est une droite (une hyper-droite). Si l'on paramètre cette droite avec le temps propre t_0 (qui est le résultat

6. La flèche bizarre vers la gauche est l'adaptation à TeX-LaTeX de la notation de mon ami Louis C. transformant le chiffre 4 en flèche vers la gauche.

de l'intégration théorique de dt_0), les dérivées premières du mouvement $v^0 = \frac{dx^0}{dt_0} = c \frac{dt}{dt_0}$, $v^1 = \frac{dx^1}{dt_0} = \frac{dx}{dt_0}$, $v^2 = \frac{dx^2}{dt_0} = \frac{dy}{dt_0}$ et $v^3 = \frac{dx^3}{dt_0} = \frac{dz}{dt_0}$ sont des constantes et les dérivées secondes sont nulles soit $\frac{dv^0}{dt_0} = 0$, $\frac{dv^1}{dt_0} = 0$, $\frac{dv^2}{dt_0} = 0$ et $\frac{dv^3}{dt_0} = 0$.

3.c Recherche de la formulation covariante.

En parlant en terme de différentielle plutôt que de dérivée, on a $dv^0 = 0$, $dv^1 = 0$, $dv^2 = 0$ et $dv^3 = 0$ soit en langage simple $\forall i \in [0, 4] \quad dv^i = 0$ qui s'écrit simplement en notation tensorielle $dv^i = 0$.

On a vu dans le chapitre précédent que dans un espace courbe repérée par l'existence locale, cette différentielle n'est pas un tenseur et qu'il faut la remplacer par $Dv^i = 0$ soit

$$0 = Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

où les Γ^i_{jk} sont les symboles de CHRISTOFFEL.

En divisant par dt_0 (dont la définition est intrinsèque au point matériel et indépendante du référentiel) et en reconnaissant dans $\frac{dx^k}{dt_0}$ la composante v^k du quadrivecteur vitesse, on arrive à une formulation covariante :

$$\frac{dv^i}{dt_0} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k = 0$$

et puisque la formulation est covariante, si elle est valable dans un référentiel, elle l'est dans toute ; or elle l'est manifestement dans le référentiel lié au point matériel qui est en chute libre comme lui (ce qui valide $dv^i = 0$, cf supra) et où le point est immobile (les v^j et v^k sont nuls).

On peut donc affirmer sans autre justification que la formulation la plus générale des lois de la mécanique dans un espace-temps est, quelque soit son paramétrage :

$$\boxed{\frac{dv^i}{dt_0} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k = 0}$$

ou aussi, en introduisant les coordonnées donc les vitesses sont les dérivées :

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{dt_0^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt_0} \frac{dx^k}{dt_0} = 0}$$

Il faut certes souffrir beaucoup pour maîtriser les espaces courbes mais si, faute de maîtrise, on en admet les résultats, la récompense est là, dans la superbe simplicité de cette généralisation qui est d'une lumineuse évidence. On en pleurerait presque de bonheur. Non ?

3.d Un exemple pour mettre en œuvre ce formalisme.

Prenons un exemple simple s'appuyant sur la base même des réflexions d'EINSTEIN en nous plaçant dans un référentiel où règne un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -\gamma \vec{e}_z$ (γ pour éviter la confusion avec les g_{ij} de la métrique, cf infra). Un point matériel a une position initiale ($t = 0$) prise comme origine ($x = y = z = 0$) et une vitesse initiale dont les composantes sont notées \dot{x}_0 , \dot{y}_0 et \dot{z}_0 . Tant que les vitesses restent négligeables devant celle de la lumière, on peut raisonner dans le cadre de la mécanique classique, le mouvement vérifie les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \dot{x}_0 t \\ y(t) = \dot{y}_0 t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \gamma t^2 + \dot{z}_0 t \end{cases}$$

Effectuons un changement de coordonnées, le plus simple possible, consistant à se placer dans un référentiel en chute libre par rapport au premier, soit puisque les effets de la relativité restreintes sont supposés négligeables, le changement défini par $z = -\frac{1}{2} \gamma t^2 + Z$, $x = X$, $y = Y$ et $t = T$. C'est dans ce référentiel, non perturbé par la gravitation, que l'on postule que la métrique est définie par la formule :

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

et le changement de référentiel conduit à cette expression dans le référentiel initial avec, par dérivation de $z = -\frac{1}{2} \gamma t^2 + Z$ la relation $dz = -\gamma t dt + dZ$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - (dz + \gamma t dt)^2 = (c^2 - \gamma^2 t^2) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2\gamma t dz dt$$

A partir de l'expression de ds^2 qui définit la *métrique locale* (voir chapitre B-XXI), on peut calculer les symboles de CHRISTOFFEL (idem). On fait figurer ici les calculs (en italique sauf leur conclusion d'où repart le cheminement physique) mais le lecteur peut en admettre les résultats car ils relèvent non de la physique mais des mathématiques. Pour alléger les calculs, on a choisi dans cette étude de prendre $x^0 = t$ au lieu de $x^0 = ct$.

Les coefficients de la métrique dans ce référentiel (on utilise les indices 0, 1, 2 et 3 et t, x, y et z) sont :

$$\begin{cases} g_{tt} = g_{00} = c^2 - \gamma^2 t^2 \\ g_{xx} = g_{11} = g_{yy} = g_{22} = g_{zz} = g_{33} = -1 \\ g_{tz} = g_{01} = g_{zt} = g_{10} = -\gamma t \end{cases}$$

et tous les autres coefficients nuls. On n'est pas tombé dans le piège classique commun à toutes les formes quadratiques : $-2\gamma t dz dt$ est la somme des deux termes égaux $g_{tz} dt dz$ et $g_{zt} dz dt$.

On va en déduire les expressions de symboles de CHRISTOFFEL (voir chapitre B-XXI); on a besoin auparavant de calculer la matrice inverse de celle de la métrique. Ce n'est pas

immédiat à cause des termes non diagonaux mais le calcul reste simple ; contentons nous ici d'en donner le résultat (coefficients notés g avec des indices contravariants).

$$\begin{cases} g^{tt} = g^{00} = \frac{-1}{-(c^2 - \gamma^2 t^2) - (-\gamma t^2)} = \frac{-1}{-c^2} = \frac{1}{c^2} \\ g^{zz} = g^{33} = \frac{c^2 - \gamma^2 t^2}{-c^2} = -\frac{c^2 - \gamma^2 t^2}{c^2} \\ g^{tz} = g^{03} = g^{zt} = g_{30} = \frac{\gamma t}{-c^2} = -\frac{\gamma t}{c^2} \\ g^{xx} = g^{11} = g^{yy} = g^{22} = g^{zz} = g^{33} = -1 \end{cases}$$

et tous les autres coefficients nuls.

Les symboles de CHRISTOFFEL se calculent par la formule (voir chapitre B-XXI) suivante, en convention de sommation d'EINSTEIN (*idem*) sur l'indice m :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk})$$

où ∂_j , par exemple, désigne la dérivation par rapport à la coordonnées x^j .

Or les g_{jk} sont tous constants sauf g_{tt} et $g_{zt} = g_{tz}$ qui ne dépendent que de t . Si j et k sont différents de 0 (ou t selon la notation), la formule ci-dessus montre que Γ^i_{jk} est nul. On vérifie aussi que $j=0$ (soit t) et $k=1$ ou 2 (x ou y) donne aussi un résultat nul. Reste donc à calculer les Γ^i_{00} (ou Γ^i_{tt}) et les $\Gamma^i_{03} = \Gamma^i_{30}$ (ou $\Gamma^i_{tz} = \Gamma^i_{zt}$). Allons-y.

On a $\Gamma^i_{zt} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \{t,x,y,z\}} g^{im} (\partial_z g_{tm} + \partial_t g_{zm} - \partial_m g_{zt})$. Aucun coefficient de la métrique ne dépend de z et les $\partial_z g_{tm}$ sont tous nuls. Parmi les g_{zm} seul g_{zt} dépend de t donc le seul $\partial_t g_{zm}$ non nul correspond à $m = t$, c'est donc $\partial_t g_{zt}$. Enfin g_{zt} ne dépend que de t donc le seul $\partial_m g_{zt}$ non nul correspond à lui aussi à $m = t$, c'est donc aussi $\partial_t g_{zt}$. Finalement :

$$\Gamma^i_{zt} = \frac{1}{2} g^{it} (\partial_t g_{zt} - \partial_t g_{zt}) = 0$$

quelque soit i ; ces coefficients sont donc tous nuls.

On a $\Gamma^i_{tt} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \{t,x,y,z\}} g^{im} (\partial_t g_{tm} + \partial_t g_{tm} - \partial_m g_{tt})$. En raisonnant comme précédemment, les seuls termes non nuls sont :

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{tt} &= \frac{1}{2} g^{it} (\partial_t g_{tt} + \partial_t g_{tt} - \partial_t g_{tt}) + g^{iz} (\partial_t g_{tz} + \partial_t g_{tz}) = \frac{1}{2} g^{it} \partial_t g_{tt} + \frac{1}{2} (2 g^{iz} \partial_t g_{tz}) = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} g^{it} \partial_t (c^2 - \gamma^2 t^2) + g^{iz} \partial_t (-\gamma t) = \frac{1}{2} g^{it} (-2\gamma^2 t) + g^{iz} \partial_t (-\gamma) = -\gamma^2 t g^{it} - \gamma g^{iz} \end{aligned}$$

Pour $i = x$ et $i = y$, g^{it} et g^{iz} sont nuls et donc Γ^i_{tt} aussi. Pour $m = t$, on a :

$$\Gamma^t_{tt} = -\gamma^2 t g^{tt} - \gamma g^{tz} = -\gamma^2 t \frac{1}{c^2} - \gamma \left(-\frac{\gamma t}{c^2} \right) = 0$$

et enfin :

$$\Gamma^z_{tt} = -\gamma^2 t g^{zt} - \gamma g^{zz} = -\gamma^2 t \left(-\frac{\gamma t}{c^2} \right) - \gamma \left(-\frac{c^2 - \gamma^2 t^2}{c^2} \right) = \gamma$$

Le seul symbole de Christoffel non nul est donc $\Gamma^z_{tt} = \gamma$

La loi de la mécanique $\frac{d^2x^i}{dt_0^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt_0} \frac{dx^k}{dt_0} = 0$ donne donc ici

$$\begin{cases} \frac{d^2t}{dt_0^2} = 0 \\ \frac{d^2x}{dt_0^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt_0^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt_0^2} + \gamma \frac{dt}{dt_0} \frac{dt}{dt_0} = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $\frac{dt}{dt_0} = \alpha$ et $t = \alpha t_0 + \beta$ où α et β sont des constantes d'intégration. Le changement de variable défini par le résultat $t = \alpha t_0 + \beta$ se traduit pour les dérivées première et seconde par $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \alpha \frac{d}{dt}$ et de même $\frac{d^2}{dt_0^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2}$ qu'on reporte dans les trois dernières équations, ce qui donne après simplification les équations classiques :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\gamma \frac{dt}{dt} \frac{dt}{dt} = -\gamma (1) (1) = -\gamma \end{cases}$$

Sur cet exemple simple, le formalisme marche bien. On voit toutefois que pour l'exploiter, on doit passer par une longue phase calculatoire (le calcul des Γ^i_{jk}).

4 Formulation covariante de la loi de gravitation.

4.a Approximation non relativiste des champs gravitationnels faibles et stationnaires.

Pour un mobile dont le mouvement est non relativiste les composantes v_x , v_y et v_z sont négligables devant c vitesse de la lumière. Il en résulte que dans la formulation covariante des lois de la mécanique $\frac{dv^i}{dt_0} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k = 0$, le terme en $v^0 v^0$ est prépondérant devant tous les autres. On a donc, pour toutes les valeurs de l'indice contravariant i :

$$\frac{dv^i}{dt_0} + \Gamma^i_{00} v^0 v^0 = 0$$

On sait que $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk})$ (formule déjà utilisée plus haut) et en particulier :

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_0 g_{0m} + \partial_0 g_{0m} - \partial_m g_{00})$$

Dans le cadre d'un champ gravitationnel stationnaire ainsi donc que la métrique associée (on rappelle que dans la théorie de la gravitation générale, c'est la gravitation qui fixe la

métrique en déformant l'espace); les dérivées temporelles (∂_0) sont donc nulles et :

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} g^{im} \partial_m g_{00}$$

Le champ gravitationnel est faible et déforme peu l'espace; la métrique est pratiquement celle de la relativité restreinte et l'on a donc :

$$\begin{cases} g_{00} \approx 1 \\ g_{11} \approx -1 & g_{22} \approx -1 & g_{33} \approx -1 \\ g_{ij} \approx 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et pour la matrice inverse :

$$\begin{cases} g^{00} \approx 1 \\ g^{11} \approx -1 & g^{22} \approx -1 & g^{33} \approx -1 \\ g^{ij} \approx 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On écrira, pour la matrice inverse :

$$\begin{cases} g^{00} = 1 + \varepsilon^{00} \\ g^{11} = -1 + \varepsilon^{11} & g^{22} = -1 + \varepsilon^{22} & g^{33} = -1 + \varepsilon^{33} \\ g^{ij} = \varepsilon^{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et pour la matrice directe, sans chercher à inverser la précédente, $g_{00} = 1 + h_{00}$ et analogues. Les h_{ij} et les ε^{ij} sont considérés comme des infiniment petits d'ordre 1.

Dans la somme (sur les valeurs de m) $\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} g^{im} \partial_m g_{00}$, tous les termes sont d'ordre 2 sauf celui pour lequel $m = i$ qui donne un terme d'ordre 2 (en h) et un terme d'ordre 1 (celui de la relativité restreinte) qui sera le terme prépondérant. Dans cette approximation d'ordre 1, on a donc :

$$\begin{cases} \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} (-1) \partial_i h_{00} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} & \text{pour } i \neq 0 \\ \Gamma^0_{00} = -\frac{1}{2} (1) \partial_0 h_{00} = -\frac{1}{2} \partial_0 h_{00} = 0 & \text{(régime stationnaire)} \end{cases}$$

On peut écrire pour les composantes spatiales ($i \neq 0$) $\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}$ et donc en reportant dans l'équation du mouvement :

$$\frac{dv^i}{dt_0} + \frac{1}{2} \partial_i h_{00} v^0 v^0 = 0$$

Or dans la limite des mouvements non relativistes, le temps propre t_0 qui est tel que $dt_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \approx dt$ s'identifie à t (avec un bon choix de l'origine des temps) et les

composantes de la quadri-vitesse sont :

$$\begin{cases} v^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx c \\ v^1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx v_x \quad \text{et analogues} \end{cases}$$

La relation $\frac{dv^i}{dt_0} + \frac{1}{2} \partial_i g_{00} v^0 v^0 = 0$ pour $i \neq 0$ devient dans cette approximation, en introduisant le gradient pour regrouper les trois composantes :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{c^2}{2} \overrightarrow{\text{grad}} h_{00}$$

En formulation classique, dans la même situation, en notant (comme plus haut) $\vec{\gamma}$ le champ gravitationnel, on doit avoir pour une particule de masse m , l'équation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ soit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{\gamma}$ soit encore $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma}$ puis en introduisant le potentiel gravitationnel Φ tel que $\vec{\gamma} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

En comparant avec le résultat précédent, on doit donc avoir l'identification suivante :

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2} \quad \text{et} \quad g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

Par analogie avec l'électrostatique où une loi d'interaction en $\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ donne un champ qui vérifie le théorème de GAUSS local soit $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et le potentiel l'équation de LAPLACE soit $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, la loi d'interaction gravitationnelle en $-\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$ donne un champ qui vérifie le théorème de GAUSS gravitationnel soit $\text{div} \vec{\gamma} = -4\pi G \rho$ et le potentiel l'équation de LAPLACE soit $\Delta \Phi = 4\pi G \rho$ où ρ n'est plus la densité volumique de charge mais de masse. On déduit donc de $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ la relation :

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho$$

qui lie la métrique à la répartition de charge. C'est cette dernière relation que l'on va chercher à généraliser en lui donnant une formulation tensorielle. Encore faut-il trouver un tenseur donc ρ soit la composante d'indices 00.

4.b Le tenseur énergie-impulsion en relativité restreinte.

Cette notion n'a pas été abordée dans le chapitre B-VII traitant de la dynamique relativiste où elle n'était pas utile, mais, dans sa version relative à l'énergie électromagnétique, dans le chapitre C-X qui présente l'électromagnétisme de façon relativiste. Donnons-en les grandes lignes dans la version gravitationnelle, où les choses sont plus simples.

La première étape consiste à montrer que la masse volumique n'est pas un invariant relativiste et à trouver par quoi la remplacer. Soit une masse élémentaire dm occupant un volume élémentaire parallélépipédique (ça simplifie les choses) $dV = dx dy dz$ et se déplaçant de \overrightarrow{dM} pendant dt (attention dx , dy et dz sont les côtés de dV mais pas les composantes de \overrightarrow{dM}). La masse volumique est définie par $dm = \rho dV$.

Dans un changement de référentiel l'un se déplaçant par rapport à l'autre à la vitesse v selon Ox , on sait qu'il y a contraction des longueurs selon Ox , donc dx est multiplié par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ tandis que dy et dz sont inchangés et dilatation du temps donc dt est multiplié par $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (voir chapitre de cinématique relativiste).

On remarque que dz donc dV n'est pas invariant, donc pas non plus ρ (bien sûr la masse dm est invariante). Par contre le produit $dV dt$ est invariant (la contraction des longueurs et la dilatation du temps se compensent), tout comme la différentielle \overleftarrow{dM} du quadrivecteur position. En combinant ces invariants, on peut en construire un autre, un quadrivecteur que nous noterons provisoirement \overleftarrow{J} par analogie avec l'électromagnétisme relativiste

$$\overleftarrow{J} = \frac{dm \overleftarrow{dM}}{(dV dt)} = \rho \frac{\overleftarrow{dM}}{dt}$$

Puisque les composantes de \overleftarrow{dM} sont $c dt$, dx , dy et dz , celles de \overleftarrow{J} sont $J^0 = \rho c$, $J^1 = \rho v_x$, $J^2 = \rho v_y$ et $J^3 = \rho v_z$ où les trois dernières composantes sont celles du vecteur classique densité de courant $\overrightarrow{J} = \rho \overrightarrow{v}$

Par ailleurs, nous avons vu maintes fois dans ce cours, en mécanique des fluides ou en électromagnétisme que la conservation de la masse ou de la charge s'écrit en formalisme tridimensionnel classique $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \overrightarrow{J} = 0$

Par analogie (voir aussi le chapitre d'électromagnétisme relativiste), la conservation de la quantité de mouvement donne en projection sur l'axe Ox (les autres par analogie) conduit à (on remplace ρ par ρv_x) :

$$\frac{d(\rho v_x)}{dt} + \text{div}(\rho v_x \overrightarrow{v}) = F_{vx}$$

où F_{vx} est la force volumique d'attraction gravitationnelle en projection sur Ox .

On réécrit ainsi pour avoir des grandeurs homogènes à des endroits symétriques :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho c^2)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial z} = ? \\ \frac{\partial(\rho v_x c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = F_{vx} \\ \frac{\partial(\rho v_y c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} = F_{vy} \\ \frac{\partial(\rho v_z c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} = F_{vz} \end{cases}$$

Il est tentant à ce stade de considérer les $T^{ij} = \rho v^i v^j$ (sans le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ comme on l'a montré) comme les composantes d'un tenseur mais on n'a pas le droit de le faire sans respecter des règles strictes. On sait que \underline{J} de composantes $J^0 = \rho c$, $J^1 = \rho v_x$, $J^2 = \rho v_y$ et $J^3 = \rho v_z$ est un quadrivecteur (c'est-à-dire un tenseur à une dimension) il en est de même du quadrivecteur vitesse que l'on note ici \underline{u} de composantes $u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $u^1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $u^2 = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et $u^3 = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Un tenseur possible dans cet esprit est donc :

$$T^{ij} = J^i u^j = \frac{\rho v^i v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

et il faudrait modifier les seconds membres des équations de conservation à partir de lois de la dynamique relativiste (restreinte), ce qui nous éloignerait trop de notre propos.

On admettra aussi que les lois de conservation font toujours apparaître des relations de la forme $\partial_i T^{ij} = \dots$ en convention de sommation d'EINSTEIN dans la métrique plate de la relativité restreinte. En fait dans les forces qui apparaissent au second membre, il n'y a pas lieu de faire figurer les forces de gravitation puisqu'elle n'existera plus en tant que telle ni les forces de pression car l'univers est très dilué et la pression est infime et l'on a donc $\partial_i T^{ij} = 0$.

Le produit $\frac{\rho c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ apparaît donc ici comme composantes d'indices 00 d'un tenseur, ce que nous recherchions sauf que nous recherchions une formulation covariante et que nous tombons ici sur une notation contravariante. Il suffit de passer de l'une à l'autre par la formule $T_{ij} = g_{im} g_{jn} T^{mn}$ où la matrice des g_{ij} est diagonale avec $g_{00} = 1$ et $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. Pour passer de T^{ij} à T_{ij} , la sommation sur l'un des indices muets change les signes de la première ligne et la sommation sur l'autre indice muet change les signes de la première colonne et le terme T^{00} qui change donc deux fois de signe est égal à T_{00} soit (si $v \ll c$, notre hypothèse de travail) $\frac{\rho c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \rho c^2$.

Dans l'approximation précédente (en particulier $v \ll c$), on a donc :

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

ce qui commence à devenir intéressant.

4.c L'équation d'Einstein.

Comment passer de $\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$ valable dans un cas particulier à une relation entre tenseur ?

Côté T_{00} , le travail vient d'être fait, c'est une composante du tenseur énergie-impulsion T_{ij} . Côté Δg_{00} , on va essayer de rapprocher cela d'un tenseur faisant intervenir, comme le

laplacien, des dérivées secondes des coefficients de la métrique. Puisqu'on a lu, au moins en diagonale, le paragraphe précédent, on pense au tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL $R^i{}_{ljk}$ car il fait intervenir des dérivées premières des symboles de CHRISTOFFEL qui font eux-mêmes intervenir des dérivées premières des coefficients de la métrique. Mais on cherche un tenseur doublement covariant et ce n'est pas le cas ; on pense alors au tenseur de RICCI R_{ij} qui en est la contraction et l'on peut espérer à une constante multiplicative près avoir une loi en :

$$R_{ij} = Cte T_{ij}$$

Ce serait très beau, hélas ça ne convient pas car les « lignes » du tenseur T doivent avoir une quadri-divergence nulle (cf supra $\partial_i T^{ij} = F^j$) ce qui n'est pas le cas, sauf exceptions du tenseur de RICCI. A partir de l'identité de BIANCHI annoncée sans démonstration dans le chapitre B-XXI, on arrive à monter que la combinaison linéaire, appelée tenseur d'EINSTEIN, $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$, où g_{ij} est le tenseur métrique et R la courbure scalaire résultant de la contraction de celui de RICCI (voir chapitre B-XXI), vérifie cette condition de quadri-divergence nulle. La démonstration est purement mathématique, très abstraite et n'apporte rien à la physique, elle n'est pas présentée ici. On peut donc postuler que la théorie relativiste de la gravitation s'écrit :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = Cte T_{ij}$$

Reste à déterminer la constante. Il est toutefois plus simple de modifier l'équation précédente avant de le faire. Indépendamment de cette considération, cette équation n'est pas pratique car le membre du gauche qui contient l'inconnue du problème, la courbure de l'espace, est compliqué alors que le second qui contient les données, la répartition des masses est simple. Le contraire serait préférable. Contractons doublement la relation précédente avec le tenseur de courbure contravariant la relation précédente :

$$g^{ij} R_{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij} R = Cte g^{ij} T_{ij}$$

Par définition $g^{ij} R_{ij}$ est la courbure scalaire R (voir chapitre précédent). Le produit $g^{ij} g_{ij}$ est piégeant ; procédons en deux temps : comme les deux tenseurs, symétriques, sont inverses, on a $g^{ij} g_{kj} = g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ où δ_k^i est nul si $i \neq k$ et égal à 1 sinon d'où $g^{ij} g_{ij} = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + \delta_4^4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. Le premier membre est donc $R - \frac{1}{2} 4 R = -R$. Le second membre peut se réécrire ainsi en deux étapes : $g^{kj} T_{ij} = T_i^k$ formulation mixte du tenseur énergie-impulsion et donc $g^{ij} T_{ij} = T_i^i$ où l'on reconnaît la trace au sens matriciel du tenseur mixte ; on changera le nom de l'indice muet pour éviter les confusions.

On a donc $R = -Cte T_m^m$ que l'on reporte dans $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = Cte T_{ij}$ pour obtenir une formulation équivalente, plus facile à exploiter :

$$R_{ij} = Cte \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T_m^m g_{ij} \right)$$

Reste à déterminer la constante. Pour cela, on se replace dans la situation de l'approximation non relativiste des champs gravitationnels faibles et stationnaires. Le tenseur métrique est celui de la relativité restreinte auquel on ajoute un correctif h_{ij} du premier ordre et de même pour le tenseur inverse (correctif ε^{ij}) et on mènera les calculs à l'ordre 1. On vise le lien entre R_{00} et g_{00} se servir du résultat $\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$.

Le chapitre B-XXI donne de façon brute :

$$R_{lk} = R^m{}_{lmk} = \partial_k \Gamma^m{}_{lm} - \partial_m \Gamma^m{}_{lk} + \Gamma^m{}_{nk} \Gamma^n{}_{lm} - \Gamma^m{}_{nm} \Gamma^n{}_{lk}$$

d'où

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma^m{}_{0m} - \partial_m \Gamma^m{}_{00} + \Gamma^m{}_{n0} \Gamma^n{}_{0m} - \Gamma^m{}_{nm} \Gamma^n{}_{00}$$

Les termes en ∂_0 sont nuls en régime stationnaire (comme plus haut). On peut montrer mais on admettra pour gagner du temps que les produits en $\Gamma \Gamma$ sont du second ordre ou plus et il reste donc :

$$R_{00} = -\partial_m \Gamma^m{}_{00}$$

On a vu plus haut qu'à l'ordre 1, on a :

$$\begin{cases} \Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2} (-1) \partial_i g_{00} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} & \text{pour } i \neq 0 \\ \Gamma^0{}_{00} = 0 \end{cases}$$

d'où finalement :

$$R_{00} = -\frac{1}{2} (\partial_x^2 g_{00} + \partial_y^2 g_{00} + \partial_z^2 g_{00}) = -\frac{1}{2} \Delta g_{00}$$

Dans le cadre non relativiste $\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}} \approx 1$ et $v^1 \ll v^0$ et analogues, le terme prépondérant de $T_m^m = g^{ij} T_{ij}$ est donc $g^{00} T_{00} = 1 \cdot \rho c^2$. Dans l'approximation choisie $R_{ij} = Cte (T_{ij} - \frac{1}{2} T_m^m g_{ij})$ avec $i = j = 0$, on a

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \Delta g_{00} = Cte \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right)$$

soit

$$\Delta g_{00} = -Cte \rho c^2$$

que l'on doit identifier au résultat $\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho$ d'où $Cte = \frac{8\pi G}{c^4}$ et finalement :

$$\boxed{R_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T_m^m g_{ij} \right)}$$

qui est la forme alternative de l'équation d'EINSTEIN :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Remarque 1 : cette équation interdit les univers stationnaires (voir plus loin), aussi EINSTEIN introduisit-il un terme supplémentaire :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

où Λ est une constante dite *cosmologique* à déterminer expérimentalement. EINSTEIN finit par supprimer ce terme en disant que c'était l'idée la plus stupide de sa vie. Actuellement, certains cosmologistes se demandent s'il ne faudrait pas réintroduire ce terme pour expliquer les écarts entre résultats expérimentaux et le modèle actuel de genèse et d'évolution de l'Univers. J'attends une petite centaine d'années pour rectifier éventuellement cette remarque.

Remarque 2 : La définition utilisée du tenseur de RICCI n'est pas universelle, une autre définition possible donne une valeur opposée. Il en va de même pour le tenseur énergie-impulsion. Il ne faudra donc pas s'étonner dans la littérature de trouver l'équation d'EINSTEIN tantôt avec un signe plus tantôt avec un signe moins.

Après cette longue phase théorique, une des plus belles de l'histoire des sciences car elle partait qu'une exigence quasi esthétique (les lois de la physique sont identiques dans tous les types de référentiels), la plus difficile aussi car pendant des années, l'astrophysicien Arthur EDDINGTON⁷ était le seul à avoir foi en cette théorie, il est temps de passer à la confrontation des prédictions de la théorie avec les faits expérimentaux.

5 Champ de gravitation créé par un astre sphérique isotrope dans un espace vide.

Remarque initiale : un astre sphérique est isotrope si sa masse volumique en un point ne dépend que de r , distance du point au centre.

5.a Premières remarques sur le tenseur métrique.

L'espace tridimensionnel sera paramétré en coordonnées sphériques et un événement de l'espace tridimensionnel sera donc repéré par la donnée de t , r , θ et φ ; pour un déplacement spatio-temporel de dt , dr , $d\theta$ et $d\varphi$, l'expression de l'intervalle élémentaire (plutôt de son carré) ds^2 définit la métrique. Cette expression doit respecter l'isotropie du problème, c'est-dire invariante par rotation. Elle peut contenir t , r mais pas θ ni φ ; du côté éléments

7. Citons l'anecdote suivante : On demanda un jour à Eddington « Vous devez être l'une des trois personnes qui comprennent la relativité générale » ce à quoi il répondit « Je me demande qui peut être la troisième ».

différentiels, elle peut contenir dr , dt à l'ordre 1 et dr^2 , $dr dt$ et dt^2 à l'ordre 2 et plus subtilement $d\vec{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ (donc par différence avec dr^2 , l'expression $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ convient aussi).

Le carré de l'intervalle élémentaire est d'ordre 2, on peut donc proposer a priori une expression du type :

$$ds^2 = C(r, t) dt^2 - 2E(r, t) dt dr - D(r, t) dr^2 - F(r, t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où C , D , E et F sont des fonctions de r et t .

On peut toutefois simplifier cette expression. Un résultat mathématique classique est qu'une forme quadratique (le carré de l'intervalle élémentaire en est une) peut toujours, dans une base bien choisie être diagonale ou, ce qui revient au même, qu'on peut toujours lui trouver (ici en tout point) une base (ici locale) orthogonale. Dans ce cas, il n'y a plus de terme en $dt dr$.

Par ailleurs, on peut toujours par un changement de variable défini par $\tilde{r} = \sqrt{F(r, t)} r$ se ramener à une expression :

$$ds^2 = \tilde{C}(\tilde{r}, t) dt^2 - \tilde{D}(\tilde{r}, t) d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où \tilde{C} et \tilde{D} sont déduits de C et D par ce changement de variable. Supprimons le tilde dans l'écriture et adoptons une métrique en :

$$ds^2 = B(r, t) dt^2 - A(r, t) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

d'où, avec la notation par chiffres ou la notation par symboles, $g_{00} = g_{tt} = B(r, t)$, $g_{11} = g_{rr} = -A(r, t)$, $g_{22} = g_{\theta\theta} = -r^2$, $g_{33} = g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta$ et tous les autres coefficients nuls et pour la matrice inverse $g^{00} = g^{tt} = \frac{1}{B(r, t)}$, $g^{11} = g^{rr} = -\frac{1}{A(r, t)}$, $g^{22} = g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}$, $g^{33} = g^{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$ et tous les autres coefficients nuls.

5.b Calcul du tenseur de courbure

On notera pour alléger A pour $A(r, t)$, \dot{A} et \ddot{A} pour $\frac{\partial A}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$, A' et A'' pour $\frac{\partial A}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}$. On ne développera pas les calculs ; on se contente de donner à chaque étape la formule utilisée, les astuces simplificatrices à exploiter et les résultats obtenus. Il n'y a aucune difficulté cachée ; les calculs sont simplement très longs. On invite toutefois le lecteur à voir comment cela fonctionne, mais si cela le rebute, il pourra en admettre les résultats sans qu'on lui en tienne rigueur. Actuellement, il existe des calculateurs formels qui peuvent être d'une aide certaine, mais qu'on ne peut utiliser efficacement que si l'on sait soi-même calculer sans eux.

Les symboles de CHRISTOFFEL se calculent par :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk})$$

où, puisque la métrique est diagonale ($g^{im} = 0$ si $m \neq i$), dans la sommation sur m ne reste que le seul terme $m = i$ et où par ailleurs, pour cette même raison, le symbole de CHRISTOFFEL est nul si ces trois indices sont deux à deux distincts. Enfin certains autres symboles sont nuls car, par exemple, $g_{\theta\theta}$ ne dépend que de r .

Finalement les seuls symboles non nuls sont, après calculs :

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tt} &= \frac{\dot{B}}{2B} & \Gamma^r_{rr} &= \frac{A'}{2A} & \Gamma^r_{tt} &= \frac{B'}{2A} \\ \Gamma^t_{rr} &= \frac{\dot{A}}{2B} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r}{A} & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A} & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma^t_{rt} &= \Gamma^t_{tr} = \frac{B'}{2B} & \Gamma^r_{rt} &= \Gamma^r_{tr} = \frac{\dot{A}}{2A} & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{t\theta} = \frac{1}{r} \\ & & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{1}{r} & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cotan \theta \end{aligned}$$

Le tenseur de RICCI se calcule par sommation sur l'indice muet m :

$$R_{lk} = R^m_{lmk} = \partial_k \Gamma^m_{lm} - \partial_m \Gamma^m_{lk} + \Gamma^m_{nk} \Gamma^n_{lm} - \Gamma^m_{nm} \Gamma^n_{lk}$$

Ici, pas d'astuce, les calculs se mènent par la méthode « de force brutale ». Les seuls coefficients non identiquement nuls du tenseur, après calculs, sont ses coefficients diagonaux et un seul non diagonal (et son symétrique bien sûr) :

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B' A'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B'}{Ar} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} \\ R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{A' B'}{4AB} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'}{Ar} - \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2B^2} + \frac{\dot{A}^2}{4AB} \\ R_{\theta\theta} &= -1 - \frac{A' r}{2A^2} + \frac{B' r}{2AB} + \frac{1}{A} \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \\ R_{rt} &= R_{tr} = -\frac{\dot{A}}{Ar} \end{aligned}$$

où l'on a remplacé l'expression brute de $R_{\varphi\varphi}$ par quelque chose de plus pertinent.

5.c Les conséquences de l'équation d'Einstein.

L'espace est réputé vide (en dehors de l'astre central), la masse volumique est partout nulle donc le tenseur énergie-impulsion aussi (voir sa définition). La relation d'EINSTEIN sous sa forme alternative donne donc $R_{ij} = 0$, c'est-à-dire que toutes les composantes du

tenseur de RICCI sont nulles. Il n'y a plus qu'à en déduire toutes les conséquences en tirant les ficelles dans le bon ordre ⁸.

De $R_{rt} = 0$, on tire $\dot{A} = 0$ donc A ne dépend que de r ; on note $A = A(r)$ et dans tous les autres coefficients du tenseur de courbure, on peut annuler les termes \dot{A} et donc aussi \ddot{A} , d'où, sans recopier $R_{\varphi\varphi}$ car si $R_{\theta\theta} = 0$ est nul, il l'est aussi :

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B' A'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B'}{Ar} \\ R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{A' B'}{4AB} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'}{Ar} \\ R_{\theta\theta} &= -1 - \frac{A' r}{2A^2} + \frac{B' r}{2AB} + \frac{1}{A} \end{aligned}$$

Puisque R_{tt} et R_{rr} sont nuls, la combinaison linéaire $A R_{tt} + B R_{rr}$, qui génère beaucoup de simplifications, l'est aussi d'où :

$$0 = A R_{tt} + B R_{rr} = \frac{A B' + A' B}{A r} = \frac{(A B)'}{A r}$$

d'où $(A B)' = 0$ et $A B$ n'est fonction que du temps et l'on peut noter $B(r, t) = \frac{f(t)}{A(r)}$

On a alors intérêt à changer d'échelle de temps par le changement de variable défini par $d\tilde{t} = k \sqrt{f(t)} dt$ où k est une constante; ainsi dans la métrique, le terme $B(r, t) dt^2$ devient $\frac{f(t)}{A(r)} \frac{d\tilde{t}}{k^2 f(t)} = \frac{1}{A(r)} \frac{d\tilde{t}^2}{k^2}$, de la forme $\tilde{B}(r) d\tilde{t}^2$ et où, avec un bon choix de la valeur de k , l'on a $\tilde{B}(r) = \frac{c^2}{A(r)}$. Avec ce choix la métrique est (on supprime les tildes) :

$$ds^2 = \frac{c^2}{A(r)} dt^2 + A(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Une remarque, qui est une partie de théorème de BIRKHOFF exposé un peu plus loin : On peut munir un espace isotope vide d'une métrique stationnaire (c'est-à-dire dont les coefficients ne dépendent pas du temps).

Reportons maintenant la relation $A(r) = \frac{c^2}{B(r)}$, déduite (après réécriture) de ce qui précède d'où $\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0$, dans R_{tt} (inutile dans R_{rr} puisqu'une combinaison linéaire de R_{tt} et R_{rr} a été annulée) et $R_{\theta\theta}$:

$$0 = R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{Ar} = -\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{Ar} = -\frac{1}{A} \left(\frac{B''}{2} + \frac{B'}{r} \right)$$

d'où $\frac{B''}{2} + \frac{B'}{r} = 0$ et

$$0 = R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = -1 + \frac{B r}{2c^2} \left(2 \frac{B'}{B} \right) + \frac{B}{c^2}$$

8. C'est-à-dire dans un désordre indescriptible la première fois qu'on s'attaque au problème puis dans le bon ordre quand on l'explique aux autres; professeur, c'est un métier.

d'où :

$$r B' + B = c^2$$

Remarque : si $R_{\theta\theta}$ est nul, on a $r B' + B = c^2$ d'où par dérivation, $r B'' + 2 B' = 0$ d'où l'on déduit que R_{tt} est nul ; il ne reste donc qu'à vérifier $r B' + B = c^2$ soit encore $(r B)' = 0$ d'où $r B = c^2 r + Cte$ et, en adaptant l'écriture :

$$B = \frac{c^2}{A} = c^2 \left(1 + \frac{Cte}{r} \right)$$

Reste à identifier la constante. On a vu plus haut qu'en champ gravitationnel faible soit ici loin de l'astre central, avec $x^0 = ct$, on doit avoir $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ où Φ est le potentiel gravitationnel. Adaptons : ici on a pris $x^0 = t$ (dans ce cas on aura $g_{00} = c^2 + 2\Phi$) et g_{00} est noté $B(r)$; quant à Φ créée par un astre de masse M à la distance r , c'est $\Phi = -\frac{GM}{r}$ où G est la constante de gravitation universelle. On veut donc :

$$B(r) = c^2 \left(1 + \frac{Cte}{r} \right) = c^2 + 2\Phi = c^2 - \frac{2GM}{r}$$

En posant $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ qu'on appelle rayon de SCHWARZSCHILD, on a :

$$B(r) = \frac{c^2}{A(r)} = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)$$

d'où une métrique de la forme :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

que l'on appelle métrique de SCHWARZSCHILD.

Le théorème de BIRKHOFF affirme que l'on peut munir un espace isotope vide d'une métrique stationnaire (cf supra) et que cette métrique est schwarzschildienne.

Remarque 1 : Cette métrique n'est valable qu'en dehors de l'astre central. Curieusement, si l'axe central est isotope, il peut ne pas être stationnaire, peut se dilater ou se contracter sans changer la métrique (ou la gravitation puisque c'est la même chose) ; cela dit c'est vrai aussi en mécanique classique, théorème de GAUSS oblige.

Remarque 2 : Le coefficient g_{rr} de la métrique diverge pour $r = r_g$. Une application numérique s'impose : avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI, $c = 3 \cdot 10^8$ m · s⁻¹ et $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg, on trouve $r_g = 3$ km pour le Soleil et l'on atteint donc pas cette valeur (la métrique n'est valable que dans la zone vide) car le soleil est beaucoup plus gros ; pour la Terre on trouverait $r_g = 9$ mm, pas de problème non plus. Le problème n'existera que pour des astres extrêmement condensés de rayon inférieur à leur rayon de SCHWARZSCHILD ; pour eux, il se passera des choses au passage par $r = r_g$. Je pense que mon lecteur aura compris qu'il s'agit là de *trous noirs*.

Remarque 3 : La définition de r_g peut se réécrire, en introduisant une masse m arbitraire, $\frac{1}{2} m c^2 = \frac{2GMm}{r_g}$, ce qui montre que la vitesse de libération dans sa définition classique (voir chapitre sur les mouvements à force centrale) au niveau du rayon de SCHWARZSCHILD est la lumière de la lumière. En deçà de ce rayon, la lumière ne peut plus s'échapper, d'où le terme de trou noir.

5.d Mouvement dans une métrique schwarzschildienne.

Les équations du mouvement sont $\frac{d^2 x^i}{dt_0^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt_0} \frac{dx^k}{dt_0} = 0$. Avec la métrique de SCHWARZSCHILD, avec $B(r) = \frac{c^2}{A(r)} = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$, on va simplifier les expressions des symboles de CHRISTOFFEL trouvées plus haut ; les dérivées temporelles sont nulles, on remplace A par $\frac{c^2}{B}$ donc A' par $-\frac{c^2 B'}{B^2}$ mais par contre, à ce stade, on ne remplace pas encore B et B' par leurs expressions, ce qui permet de mieux voir certaines astuces de calcul. Voyons donc ce que deviennent les symboles qui étaient non nuls.

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tt} &= \frac{\dot{B}}{2B} = 0 & \Gamma^r_{rr} &= \frac{A'}{2A} = -\frac{B'}{2B} & \Gamma^r_{tt} &= \frac{B'}{2A} = \frac{BB'}{2c^2} \\ \Gamma^t_{rr} &= \frac{\dot{A}}{2B} = 0 & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r}{A} = -\frac{Br}{c^2} & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -\frac{rB \sin^2 \theta}{c^2} & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma^t_{rt} &= \Gamma^t_{tr} = \frac{B'}{2B} & \Gamma^r_{rt} &= \Gamma^r_{tr} = \frac{\dot{A}}{2A} = 0 & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{t\theta} = \frac{1}{r} \\ & & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{1}{r} & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cotan \theta \end{aligned}$$

où l'on remarque que certains symboles supplémentaires sont nuls.

En développant, dans les équations du mouvement, les sommes doubles sur j et k pour chaque valeur de i , on arrive à :

$$0 = \frac{d^2 t}{dt_0^2} + \frac{B'}{2B} \frac{dt}{dt_0} \frac{dr}{dt_0} + \frac{B'}{2B} \frac{dr}{dt_0} \frac{dt}{dt_0} = \frac{d^2 t}{dt_0^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{dt_0} \frac{dr}{dt_0} \quad (\text{équation 1})$$

$$0 = \frac{d^2 r}{dt_0^2} - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{dt_0}\right)^2 + \frac{BB'}{2c^2} \left(\frac{dt}{dt_0}\right)^2 - \frac{Br}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt_0}\right)^2 - \frac{rB \sin^2 \theta}{c^2} \left(\frac{d\varphi}{dt_0}\right)^2 \quad (\text{équation 2})$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{dt_0^2} - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt_0}\right)^2 + \frac{1}{r} \frac{dr}{dt_0} \frac{d\theta}{dt_0} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dt_0} \frac{dr}{dt_0}$$

$$\text{ou encore} \quad 0 = \frac{d^2 \theta}{dt_0^2} - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt_0}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt_0} \frac{d\theta}{dt_0} \quad (\text{équation 3})$$

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{dt_0^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dt_0} \frac{d\varphi}{dt_0} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dt_0} \frac{dt}{dt_0} = \frac{d^2 \varphi}{dt_0^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dt_0} \frac{d\varphi}{dt_0} \quad (\text{équation 4})$$

Pour exploiter au mieux l'équation 3, choisissons l'axe Oz qui sert à définir θ et φ de sorte qu'il soit orthogonal au vecteur position initial et à la vitesse initiale, soit en pratique de sorte qu'à l'instant initial, on ait $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{dt_0} = 0$, ce qui entraîne qu'à cet instant (équation 3) $\frac{d^2\theta}{dt_0^2}$ soit aussi nul ce qui laisse soupçonner que la solution $\theta = Cte = \frac{\pi}{2}$ est solution de cette équation, ce que l'on vérifie instantanément. Géométriquement, on retrouve le mouvement plan ($\theta = \frac{\pi}{2}$ définit le plan xOy) dans le cas d'une force centrale (voir chapitre B-IV).

L'équation 4 peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt_0} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt_0} \right) = 0$$

d'où $r^2 \frac{d\varphi}{dt_0} = J$ où J est une constante ; on y retrouve la constante des aires⁹ (voir aussi le chapitre B-IV).

L'équation 1 peut être après multiplication par B , réécrite sous la forme :

$$0 = B(r) \frac{d^2t}{dt_0^2} + B'(r) \frac{dr}{dt_0} \frac{dt}{dt_0} = B[r(t_0)] \frac{d^2t}{dt_0^2} + \frac{d}{dt_0} (B[r(t_0)]) \frac{dt}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} \left(B[r(t_0)] \frac{dt}{dt_0} \right)$$

On en déduit que $B[r(t_0)] \frac{dt}{dt_0}$ est constant. On peut noter :

$$B[r(t_0)] \frac{dt}{dt_0} = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{dt}{dt_0} = \beta c^2$$

où β est une constante, soit

$$\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{dt}{dt_0} = \beta$$

ce qui fixe un lien entre le temps t et le paramètre t_0 .

Remarque : en anticipant sur la suite, on peut confondre β avec l'unité et dans le cas simple d'un mouvement circulaire de rayon a autour du centre attracteur, on obtient par intégration un lien entre la période propre T_0 d'un mouvement périodique (potentiellement un horloge) et la période T dans le référentiel d'observation sous la forme de la relation :

$$\left(1 - \frac{r_g}{a} \right) T = T_0$$

On a donc $T > T_0$, l'horloge ralentit ; on l'a évoqué plus haut.

Reportons enfin $\theta = Cte = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\varphi}{dt_0} = \frac{J}{r^2}$ et $\frac{dt}{dt_0} = \frac{\beta c^2}{B}$ dans l'équation 2 ; on arrive à :

$$0 = \frac{d^2r}{dt_0^2} - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{dt_0} \right)^2 + \frac{\beta^2 c^2 B'}{2B} - \frac{J^2}{2B r^3}$$

9. On la note J plutôt que le classique C pour éviter les confusions avec c , vitesse de la lumière.

soit après multiplication par $\frac{2}{B} \frac{dr}{dt_0}$:

$$0 = \left[\frac{1}{B} \left(2 \frac{dr}{dt_0} \frac{d^2r}{dt_0^2} \right) + \left(-\frac{B'}{B^2} \right) \left(\frac{dr}{dt_0} \right)^3 \right] + \beta^2 c^2 \frac{B'}{B^2} \frac{dr}{dt_0} - \frac{J^2}{c^2} \frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt_0}$$

où l'on reconnaît :

$$0 = \frac{d}{dt_0} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dt_0} \right)^2 - \frac{\beta^2 c^2}{B} + \frac{J^2}{c^2} \frac{1}{r^2} \right]$$

La quantité $\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dt_0} \right)^2 - \frac{\beta^2 c^2}{B} + \frac{J^2}{c^2} \frac{1}{r^2}$ est donc une nouvelle constante du mouvement que nous noterons K .

On va exploiter cette relation en s'inspirant du formalisme des relations de BINET (voir le chapitre sur les mouvements à force centrale). En considérant que r dépend de t_0 au travers de $\varphi(t_0)$, on part de :

$$\frac{dr}{dt_0} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt_0} = \frac{J}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -J \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -J \frac{du}{d\varphi}$$

où l'on a posé $u = \frac{1}{r}$. On peut donc, après multiplication par B , réécrire ainsi la relation précédente :

$$J^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{J^2 u^2}{c^2} B = K B + \beta^2 c^2$$

où l'on reporte $B(r) = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = c^2 - 2GM u$, d'où successivement :

$$J^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] = K c^2 - 2KGM u + \beta^2 c^2 + \frac{2J^2 GM}{c^2} u^3$$

$$J^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] = (K + \beta^2) c^2 - 2KGM u + \frac{2J^2 GM}{c^2} u^3$$

Un bref rappel de la mécanique du point s'impose maintenant. Voici quelques résultats du chapitre B-IV traitant de mouvements à force centrale, adaptés à une force centrale newtonienne $\vec{F} = F \vec{e}_r = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$ correspondant à l'énergie potentielle $E_p = -\frac{GMm}{r}$, on remplace pour la constante des aires la notation C par J et l'on note E l'énergie mécanique constante. En formalisme de BINET, le principe fondamental de la dynamique, pour une masse m soumise à l'attraction d'un corps massif de masse M , se traduit par :

$$-m J^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] = F = -GMm u^2$$

et la conservation de l'énergie par :

$$\frac{1}{2} m J^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] - G M m u = E$$

et si l'on dérive la seconde relation par rapport à θ , on retrouve la première après simplification par $\frac{du}{d\theta}$ et multiplication par $-u^2$.

Pour comparer au mieux avec le résultat de notre étude, multiplions cette formulation classique de conservation de l'énergie par $\frac{2}{m}$, on arrive à :

$$J^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = \frac{2E}{m} + 2GMu$$

On peut identifier les points de vue en choisissant $K = -1$ et β tel que le terme $(K + \beta^2) c^2 = (\beta^2 - 1) c^2$ soit égal à $\frac{2E}{m}$ (remarquons que pour une planète, les vitesses sont non relativistes et E est négligeable devant $m c^2$ donc $(\beta^2 - 1)$ devant 1 et β est donc très proche de 1, remarque utilisée plus haut). Cette identification faite, l'approche de la relativité générale ajoute un terme énergétique (on rétablit le facteur $\frac{m}{2}$ et on place le terme dans le bon membre) $-\frac{J^2 GM}{c^2 r^3}$ correspondant à une force centrale en $-\frac{3J^2 GM}{c^2 r^4}$.

Le chapitre B-IV traitant de mouvements à force centrale montre que sans ce terme les trajectoires sont des coniques dont un des foyers est le centre attractif, en particulier, pour des énergies négatives, des ellipses (des courbes fermées donc). On y a vu aussi qu'un terme parasite (l'exemple était du reste aussi en $\frac{1}{r^4}$ pour la force) provoque une précession du grand axe de l'ellipse, donc de son périhélie et de son aphélie.

Voilà donc une occasion rêvée pour vérifier la théorie. On a observée depuis longtemps la précession du périhélie de Mercure, la planète la plus proche de Soleil. Elle peut être aisément expliquée par diverses causes classiques comme le bourrelet équatorial du Soleil dû à sa rotation propre, l'influence des autres planètes du système solaire, Jupiter surtout, mais des calculs précis indiquaient au moment où EINSTEIN travaillait à sa théorie un écart entre la mesure expérimentale (575 secondes d'arc par siècle) et le calcul théorique classique (532 secondes d'arc par siècle) un écart de 43 secondes d'arc par siècle. En 1915, EINSTEIN calcule avec sa toute nouvelle théorie un terme supplémentaire de... 43 secondes d'arc par siècle. Dans le même manuscrit, il propose de tester sa théorie par la déviation d'un rayon lumineux dans le champ de gravitation solaire.

Venons-y!

5.e Déviation des rayons lumineux.

Toute l'étude précédente reste valable ; reste à traduire que l'on s'occupe de la lumière. Comment le faire ? C'est très simple : dans le cas de la propagation de la lumière, on

a $ds^2 = 0$ soit $\left(\frac{ds}{dt_0}\right)^2 = 0$ (voir relativité restreinte) d'où successivement en suivant les étapes du raisonnement précédent :

$$0 = B \left(\frac{dt}{dt_0}\right)^2 - A \left(\frac{dr}{dt_0}\right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt_0}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt_0}\right)^2 \right]$$

$$0 = B \left(\frac{dt}{dt_0}\right)^2 - \frac{c^2}{B} \left(\frac{dr}{dt_0}\right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt_0}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt_0}\right)^2 \right]$$

puis avec $\theta = Cte = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\varphi}{dt_0} = \frac{J}{r^2}$ et $\frac{dt}{dt_0} = \frac{\beta c^2}{B}$:

$$0 = \frac{\beta^2 c^4}{B} - \frac{c^2}{B} \left(\frac{dr}{dt_0}\right)^2 - \frac{J^2}{r^2}$$

puis en passant au formalisme de BINET ($\frac{dr}{dt_0} = -J \frac{du}{d\varphi}$) :

$$0 = \frac{\beta^2 c^4}{B} - \frac{c^2 J^2}{B} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - J^2 u^2$$

et enfin avec $B(r) = c^2 - 2GMu$ (on multiplie par B avant le report de l'expression) :

$$0 = \beta^2 c^4 - c^2 J^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - J^2 u^2 (c^2 - 2GMu)$$

Une petite subtilité : pour une particule matérielle le module du moment cinétique est $\sigma = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = m J$ (voir mouvement à force centrale) ; si la masse m tend vers 0 et que le moment cinétique reste fini, c'est que J devient infini. Il est donc légitime de penser que J est infini pour un photon. Après division par J^2 de l'équation précédente, on fait tendre J vers l'infini et l'on obtient, après simplification et réorganisation :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2GM}{c^2} u^3$$

soit encore, après dérivation par rapport à φ puis simplification par $2 \frac{du}{d\varphi}$:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2$$

En mécanique classique, pour une masse m , on doit résoudre :

$$-m J^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right] = F = -GMm u^2$$

soit après simplification

$$\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right] = \frac{GM}{J^2}$$

résultat indépendant de la masse m et qui peut par passage à la limite $m \rightarrow 0$ être un traitement classique de l'action de la gravité sur la lumière.

Les deux approches donnent des équations différentes donc à rayon incident identique, des déviations différentes. La seconde peut être résolue explicitement (voir mouvements à force centrale), la seconde par approximations successives (on s'arrête en pratique à l'ordre 1). Il se trouve que la théorie de la relativité générale donne un résultat double de celui de la mécanique classique (nous faisons grâce au lecteur des calculs) et c'est donc encore un bon moyen de vérifier la théorie.

En 1919, l'astrophysicien Arthur EDDINGTON, farouche et presque unique partisan à l'époque des théories d'EINSTEIN sur la gravitation profite d'une éclipse totale de soleil pour mesurer l'effet de la gravitation. La lumière des étoiles situées dans une direction proche du soleil et rendues visibles par l'occultation de celui-ci par la lune, va être déviée et la position apparente des étoiles déplacée par rapport à leur position habituelle. Il monte donc deux expéditions en deux endroits de la zone où l'éclipse sera totale (au Brésil et dans un archipel du golfe de Guinée). Le temps fut exécrable dans les deux cas ; peu de clichés furent pris, les mesures imprécises et une série de mesure en contradiction avec les trois autres ; convaincu a priori de la justesse de la théorie, EDDINGTON se persuada l'avoir vérifiée et en avertit la presse et Albert EINSTEIN devint célèbre du jour au lendemain. Objectivement pourtant, les résultats de cette campagne ne sont pas probants.

Actuellement, on a d'autres pistes, la déviation des radio-sources derrière le soleil (pas besoin d'attendre une éclipse), les effets de lentille gravitationnelle par une galaxie massive ou un trou noir (une même galaxie lointaine, à l'arrière plan de tels objets, et identifiée par sa signature spectrale, est vue dans deux ou plusieurs directions correspondant à des rayons passés d'un côté et de l'autre de l'objet massif).

6 Cosmologie des univers isotropes et homogènes.

On considère cette fois un univers non vide, décrit comme un gaz de particules ponctuelles à son échelle (un point matériel pourrait être par exemple un système solaire tout entier). On suppose que des « points » voisins ont des vitesses relatives négligeables par rapport aux vitesses relatives entre points éloignés. Ainsi peut-on considérer que la vitesse ne dépend que de la position. Enfin l'on suppose que la répartition de points est homogène et isotrope (seule hypothèse donnant des calculs accessibles), mais *pas forcément stationnaire* car le but inavoué mais avouable de cette partie est de montrer que l'univers est en expansion.

6.a Choix des coordonnées comobiles et conséquences de ce choix.

On choisira en tout point une base vectorielle locale de sorte que la vitesse des points matériels soit nulle ; les bases locales sont en quelque sorte attachées à la matière. Le système de coordonnées qui en résulte est appelé *coordonnées comobiles*.

Par définition, le temps propre t_0 d'une particule est le temps d'un référentiel dans lequel elle est immobile. La durée élémentaire dt_0 propre d'un événement lié à une particule s'identifie donc avec la variation élémentaire dx^0 de la coordonnée temporelle. L'intervalle élémentaire propre correspondant a, par définition, la norme $ds = c dt_0$ soit aussi, en identifiant avec le ds^2 définissant la métrique qui se simplifie, lorsque dx^1 , dx^2 et dx^3 sont nuls (particule immobile avec ces coordonnées comobiles) en $ds^2 = g_{00} (dx^0)^2$. Il est alors aisé d'en déduire que g_{00} est forcément égal à c^2 .

Une autre conséquence importante est celle-ci. Puisque les particules sont immobiles avec ce système de coordonnées, leur quadri-vitesse ont des composantes spatiales nulles ($v_1 = v_2 = v_3 = 0$) donc la seule composante non nulle du tenseur d'énergie-impulsion défini plus haut est $T_{00} = \rho c^2$ qu'il faut lire $T_{00} = \rho(t) c^2$ car l'univers est supposé non stationnaire.

Le fait que les T_{ij} soient tous nuls sauf un, va évidemment simplifier l'exploitation de l'équation d'EINSTEIN ; c'est ce qui fait la force de ces coordonnées comobiles.

6.b Choix d'une métrique.

Le raisonnement initial mené dans l'étude du champ de gravitation créé par un astre sphérique isotrope dans un espace vide, reste valable et conduit, en prenant une métrique diagonalisée (voir au même endroit), à :

$$ds^2 = C(r, t) dt^2 - D(r, t) dr^2 - F(r, t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Mais on ne peut pas poursuivre de la même façon, puisqu'ici $C(r, t)$ qui n'est autre que g_{00} doit être égal à c^2 comme on vient tout juste de le montrer. Pour les fonctions D et F , on va essayer de trouver des fonctions factorisées en une fonction de t temps et une de r , notées respectivement $R(t)^2 f(r)$ et $S(t)^2 g(r)$ (R^2 et S^2 donnent des calculs plus simples que R et S), d'où une métrique :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 f(r) dr^2 - S(t)^2 g(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Enfin, un changement de variable spatiale $\tilde{r} = r \sqrt{g(r)}$ conduit (on ne note pas le tilde) et le choix de la variable temporelle $t_0 = ct$ à une écriture de la forme :

$$ds^2 = dt_0^2 - R(t)^2 f(r) dr^2 - S(t)^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

A partir de cette métrique, on peut déduire, toujours avec les mêmes étapes de calcul, les différentes composantes du tenseur de RICCI. Il n'y a aucun intérêt à les faire figurer ici

aussi contentons-nous d'en affirmer les résultats (on note $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$ et $f' = \frac{df}{dr}$ et analogues, comme plus haut). Les seules composantes non nulles du tenseur sont :

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{S}}{S} \\
R_{rr} &= -\frac{f'}{r f} - R \ddot{R} f - \frac{2 R \dot{R} \dot{S} f}{S} \\
R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{S^2}{R^2 f} - \frac{r f' S^2}{2 f^2 R^2} - S \ddot{S} r^2 - \dot{S}^2 r^2 - \frac{\dot{R} S \dot{S} r^2}{R} \\
R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \\
R_{tr} = R_{rt} &= \frac{2 \dot{S}}{r S} - \frac{2 \dot{R}}{r R}
\end{aligned}$$

6.c Conséquences de l'équation d'Einstein.

L'équation d'EINSTEIN est :

$$R_{ij} = -\frac{8 \pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T_m^m g_{ij} \right)$$

On vient de calculer l'expression des R_{ij} ; on a vu que les T_{ij} sont tous nuls sauf T_{00} égal à ρ (avec le choix de $\tau = ct$ comme variable temporelle) ; les g_{ij} sont les coefficients de la métrique qui est diagonalisée, ils sont donc tous nuls sauf $g_{tt} = 1$, $g_{rr} = -R^2 f$, $g_{\theta\theta} = -S^2 r^2$ et $g_{\varphi\varphi} = g_{\theta\theta} \sin^2 \theta$. Il ne reste donc qu'à calculer T_m^m .

Puisque $T_j^k = g^{ki} T_{ij}$ les seuls T_j^k non nuls sont les $T_0^k = g^{k0} T_{00}$ (on rappelle que l'indice 0 peut aussi être noté t) et puisque la métrique est diagonale, le seul g^{k0} non nul est g^{00} qui est l'inverse de g_{00} . Le seul T_j^k non nul est donc $T_0^0 = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \frac{\rho c^2}{c^2} = \rho$ et enfin :

$$T_m^m = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = \rho + 0 + 0 + 0 = \rho$$

Appliquons la relation d'EINSTEIN pour les couples (ij) qui conduisent à autres choses que $0 = 0$. Pour le couple (rt) ou (tr) on arrive, après simplification à $\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{R}}{R}$ qui s'intègre en $\ln R - \ln S = Cte$ d'où $R = Cte S$. En pratique, on intègre la constante à la fonction f de $g_{rr} = -R f$, donc $R = S$ et l'on simplifiera en conséquence les autres coefficients du tenseur de RICCI.

Avec le couple (00) ou (tt) et avec $S = R$, on arrive de façon brute à :

$$\frac{3 \ddot{R}}{R} = -\frac{8 \pi G}{c^4} \left(\rho - \frac{1}{2} \rho \right) = -\frac{4 \pi G \rho}{c^4}$$

que l'on écrit de façon plus exploitable :

$$3 \ddot{R} = -\frac{4 \pi G \rho R}{c^4} \quad (\text{équation 5})$$

où l'on rappelle que $R(t)$ est une fonction inconnue de t et $\rho(t)$ une fonction réputée connue de t (on y revient un peu plus loin).

Avec le couple (rr) et avec $S = R$, on arrive de façon brute à :

$$-\frac{f'}{r f} - R \ddot{R} f - 2 \dot{R}^2 f = -\frac{8 \pi G}{c^4} \left[0 - \frac{1}{2} \rho (-R^2 f) \right] = -\frac{4 \pi G \rho R^2}{c^4} f$$

En divisant par f , on ne trouve plus que des termes qui dépendent soit uniquement de r explicitement ou au travers de f , soit uniquement de t au travers de R ou ρ ; on regroupe les uns à gauche, les autres à droite, d'où :

$$-\frac{f'}{r f^2} = R \ddot{R} + 2 \dot{R}^2 - \frac{4 \pi G \rho R^2}{c^4} \quad (\text{équation 6})$$

Enfin avec le couple $(\theta\theta)$ (le couple $(\varphi\varphi)$ donne le même résultat après simplification par $\sin^2 \theta$) et avec $S = R$, on arrive de façon brute à :

$$-1 + \frac{1}{f} - \frac{r f'}{2 f^2} - R \ddot{R} r^2 - 2 \dot{R}^2 r^2 = -\frac{8 \pi G}{c^4} \left[0 - \frac{1}{2} \rho (-R^2 r^2) \right] = -\frac{4 \pi G \rho R^2}{c^4} r^2$$

et en divisant, cette fois, par r^2 , on arrive à la même séparation :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} - \frac{f'}{2 r f^2} = R \ddot{R} + 2 \dot{R}^2 - \frac{4 \pi G \rho R^2}{c^4} \quad (\text{équation 7})$$

On sait qu'une équation de la forme $\forall t \forall r F(r) = G(t)$ entraîne que $F(r) = G(t) = Cte$ (en effet, il suffit de choisir $t = 0$ pour affirmer $\forall r F(r) = G(0)$ où $G(0)$ est une constante). Ici comme l'équation 6 et l'équation 7 ont même second membre, la constante est commune; on va la noter $-2k$. On peut donc affirmer :

$$R \ddot{R} + 2 \dot{R}^2 - \frac{4 \pi G \rho R^2}{c^4} = -2k \quad (\text{équation 8})$$

$$\frac{f'}{r f^2} = 2k \quad (\text{équation 9})$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 f} + \frac{f'}{2 r f^2} = 2k \quad (\text{équation 10})$$

Si l'on retranche à l'équation 10 l'équation 9 divisée par 2, on arrive successivement à :

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 f} = k$$

$$\frac{1}{f} = 1 - k r^2$$

$$f = \frac{1}{1 - k r^2}$$

qui conduit à une métrique dite de FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER¹⁰ (ou FLRW) :

$$ds^2 = d\tau^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

ou encore

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

Remarque 1 : si $k \neq 0$, le changement de variable $\tilde{r} = \sqrt{|k|} r$ permet de se ramener à trois cas standards, $k = 0$, $k = 1$ et $k = -1$.

Remarque 2 : supposons que l'espace tri-dimensionnel soit la projection d'une hypersphère quadri-dimensionnelle de rayon a et d'équation (la quatrième coordonnée est notée w) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$$

d'où en différentiant, après division par 2 :

$$x dx + y dy + z dz + w dw = 0$$

La métrique spatiale dans l'espace quadri-dimensionnel supposé euclidien serait :

$$dL^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = d\ell^2 + dw^2$$

où $d\ell^2$ est la métrique euclidienne dans l'espace tri-dimensionnel. En éliminant dw , on arrive à :

$$dL^2 = d\ell^2 + \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{w^2} = d\ell^2 + \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

soit, en notant $\vec{\ell}$ le vecteur position de la projection, puis en passant en coordonnées sphériques dans l'espace tri-dimensionnel :

$$dL^2 = d\ell^2 + \frac{(\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell})^2}{a^2 - \ell^2} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{(r dr)^2}{a^2 - r^2} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

10. Selon les sources, les noms ne sont pas toujours tous cités, pour des conflits de chapelle.

qui donne un sens (hyper-)géométrique à la métrique FLRW pour $k > 0$

Remarque 3 : En remplaçant formellement a par ia , on passe d'une métrique en $\frac{1}{1-kr^2}$ à une métrique en $\frac{1}{1+k r^2}$. On vérifie qu'on l'obtient en remplaçant l'hyper-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$ par l'hyper-hyperboloïde (sic) $w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = a^2$.

Remarque 4 : Certes le cas où k est nul redonne la métrique plane classique ; mais c'est oublier qu'en physique, on n'étudie pas les cas-charnières car un paramètre ne prend *jamais* une valeur précise ; il y a toujours de l'incertitude.

Remarque 5 : Ce n'est que formellement que l'espace tridimensionnel est une surface dans un espace quadri-dimensionnel ; la quatrième dimension ne sert qu'en science-fiction pour contourner la vitesse limite c imposée par la relativité restreinte.

Remarque 6 : Pour un point matériel r , θ et φ sont constants avec les coordonnées comobiles. A un instant donné, le carré de la distance entre deux points matériels se calcule par intégration entre bornes données de ds^2 avec $dt = 0$; manifestement elle sera proportionnelle à $R(t)^2$ donc la distance à $R(t)$. L'univers gonfle donc de façon homothétique avec le facteur $R(t)$, c'est le modèle du cake aux fruits¹¹ (du plum-pudding en anglais). Une conséquence en est que si à $t = 0$ la distance entre deux points est L_0 , à l'instant t elle sera $L(t) = L_0 \frac{R(t)}{R(0)}$, la vitesse relative sera $V(t) = \dot{L}(t) = L_0 \frac{\dot{R}(t)}{R(0)}$, d'où $\frac{V(t)}{L(t)} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$ qui est une constante à t donné : la vitesse d'éloignement d'une galaxie est proportionnelle à sa distance. Cette loi a été découverte expérimentalement par l'astronome américain par Edwin HUBBLE en 1929 et porte son nom, ainsi que la constante (vis-à-vis de l'espace) $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$.

6.d Evolution de l'univers.

Pour aller plus loin encore, il faut exploiter une propriété déjà mentionnée du tenseur d'énergie-impulsion à savoir des lois de conservation classiques en $\partial_i T^{ij} = 0$ qui deviennent en notation covariante $D_i T^{ij} = 0$. Là encore le calcul est technique puisque le tenseur est dans sa version contravariante ; les symboles de CHRISTOFFEL se déduisent de la métrique et l'on peut montrer que la quantité $\rho(t) R(t)^3$ est une constante (qui rappelle furieusement une loi de conservation de la masse) égale, par exemple à sa valeur initiale, notée $\rho_0 R_0^3$. Intuitivement, on aurait pu déduire ce résultat du modèle du cake aux fruits (cf supra) sans risque de se tromper et avec bien moins de complications.

L'équation 8 et l'équation 5 deviennent alors, après multiplication respectivement par R et R^2

$$R^2 \ddot{R} + 2 R \dot{R}^2 - \frac{4 \pi G \rho_0 R_0^3}{c^4} + 2 k R = 0$$

$$3 R^2 \ddot{R} + \frac{4 \pi G \rho_0 R_0^3}{c^4} = 0$$

11. Il faut toutefois enrober les fruits confits de farine avant de les incorporer à la pâte sinon, ils tombent au fond à la cuisson ; pour les galaxies, ce n'est pas la peine.

Si l'on enlève à la première de ces équations la seconde divisée par 3, cela permet, après division du résultat par 2 de remplacer ce système d'équations par celui-ci :

$$\begin{aligned} R \dot{R}^2 - \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3c^4} + k R &= 0 \\ 3 R^2 \ddot{R} + \frac{4\pi G \rho_0 R_0^3}{c^4} &= 0 \end{aligned}$$

Après quelques nuits d'insomnie, on remarque que si l'on dérive la première de ces équations, on arrive à :

$$\dot{R}^3 + 2 R \dot{R} \ddot{R} + k \dot{R} = 0$$

soit après multiplication $\frac{R}{\dot{R}}$:

$$R \dot{R}^2 + 2 R^2 \ddot{R} + k R = 0$$

dont on retranche l'équation qui vient d'être dérivée pour aboutir à :

$$2 R^2 \ddot{R} + \frac{8\pi G \rho_0 R_0^2}{3c^4} = 0$$

c'est-à-dire l'autre équation, à un coefficient près ; le système est donc redondant ; on peut donc ne conserver que l'équation :

$$R \dot{R}^2 - \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3c^4} + k R = 0 \quad (\text{équation 11})$$

En posant $\frac{8\pi G \rho_0 R_0^2}{3c^4} = \alpha$, on la réécrit sous la forme :

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{\alpha}{R} - k$$

qui permet une séparation des variables, d'où en prenant, faute de mieux comme hypothèse que à $t = 0$, on a $R = 0$ (hypothèse du « big bang ») :

$$t = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{\alpha}{R} - k}}$$

où $\int_0^R f(R) dR$ désigne la primitive de f qui s'annule pour R nul.

Plaçons nous dans le cas où k est positif et effectuons le changement de variable défini par $R = \frac{\alpha}{2k} (1 + u)$ d'où $dR = \frac{\alpha}{2k} du$; on arrive alors à :

$$t = \frac{\alpha}{2k^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^{\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}} \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du$$

dont on vérifie par dérivation que la primitive est :

$$t = \frac{\alpha}{2k^{\frac{3}{2}}} \left(\arcsin u - \sqrt{1-u^2} + \pi \right)$$

Soit encore, en posant $\theta = \arcsin u$ et en reportant aussi dans l'expression de R en fonction de u et à un décalage d'origines des temps et des phases près :

$$\begin{cases} t = \frac{\alpha}{2k^{\frac{3}{2}}} (\theta - \sin \theta) \\ R = R = \frac{\alpha}{2k} (1 - \cos \theta) \end{cases}$$

équations d'allure cycloïdale qui conduisent à une évolution périodique de l'univers (dans ce cas la période estimée se mesure en dizaine de milliards d'années) avec alternance de *big bangs* et de *big crunches*. On laisse au lecteur spécialiste de la trigonométrie hyperbolique traiter le cas où k est négatif; dans ce cas l'univers est de croissance monotone, au sens mathématique du terme.

6.e Quel est le bon modèle ? La constante de Hubble.

Revenons à l'équation 11 (sans tenir compte de la conservation de la masse) soit :

$$R \dot{R}^2 + k R = \frac{4\pi G \rho R^3}{3c^4}$$

La constante de HUBBLE est définie par $H = \frac{\dot{R}}{R}$ et elle est mesurable même si c'est sportif. Rien ne prouve qu'elle soit constante dans le temps car le décalage vers le rouge du spectre des galaxies n'est connu que depuis 1929, moins de cent ans donc, qui ne sont rien par rapport à l'âge de l'univers : la mesure est ponctuelle. On peut donc réécrire la relation précédente sous la forme :

$$H^2 R^3 + k R = \frac{4\pi G \rho R^3}{3c^4}$$

Définissons maintenant une densité critique ρ_c par $H^2 = \frac{4\pi G R^3}{3c^4}$ et l'on réécrit cette fois :

$$k = \frac{4\pi G R^2}{3c^4} (\rho - \rho_c)$$

Selon que ρ est supérieur ou inférieur à ρ_c , on aura un univers d'évolution cyclique ou monotone (cf supra).

Dans l'état actuel des connaissances, la lumière qui nous arrive des galaxies lointaines donc plus vieilles permet d'évaluer l'évolution de H avec le temps et il y a contradiction expérimentale entre la mesure de cette évolution, la valeur calculée de ρ_c et la mesure actuelle de ρ (c'est aussi très sportif). Je pense que qui lit ces lignes a déjà entendu parler de la « masse manquante ». Reparlons-en là aussi dans une centaine d'années.