

Chapitre C-I

De la loi de Coulomb au théorème de Gauss.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On rappelle la genèse de la formule de Coulomb, on introduit les notions de champ électrique et de potentiel électrique et l'on en montre l'intérêt. On présente des exemples de calculs de champs et de potentiels.

On démontre le théorème de Gauss et l'on en précise les modalités d'application, éclairées par quelques exemples classiques.

On introduit de façon simple les notions de gradient, divergence et laplacien.

On termine enfin par l'aspect énergétique.

Table des matières

C-I De la loi de Coulomb au théorème de Gauss.	1
1 Les débuts de l'électrostatique.	5
2 Loi de Coulomb.	6
2.a Force d'interaction électrostatique.	6
2.b Champ électrique.	7
2.c Champ créé par une distribution de charges.	7
3 Calcul direct de champs électriques	8
3.a Symétries et invariances.	8
3.b Exemple de calcul de champ électrique.	8
4 Potentiel électrique.	10
4.a Travail élémentaire de la force de Coulomb.	10
4.b Gradient d'un champ scalaire.	12
4.c Intérêt et exemple de calcul de potentiel électrique.	13
4.d Lignes de champ et surfaces équipotentielles	13
5 Théorème de Gauss.	14
5.a Flux électrique à travers une surface orientée élémentaire.	14
5.b Démonstration du théorème de Gauss.	16
5.c Usage raisonné du théorème de Gauss.	18
5.d Les grands classiques.	19
5.e Formulation locale du théorème de Gauss.	23
6 Considérations énergétiques.	25
6.a Première idée et ses sous-entendus.	25

6.b	Energie d'interaction entre deux charges.	25
6.c	Energie d'interaction entre charges ponctuelles.	27
6.d	Energie d'interaction pour une distribution continue.	27

1 Les débuts de l'électrostatique.

Les phénomènes électrostatiques sont connus depuis l'antiquité grecque : THALÈS de Milet au VI^e avant J.C. évoque le fait que l'ambre jaune¹ frotté attire les corps légers, du duvet par exemple. On parle de nos jours de *triboélectricité*².

On ne s'y intéresse à nouveau qu'au début du XVII^e siècle ; les grandes étapes sont :

- en 1663, Otto von GUERICKE³ invente une machine constituée d'un globe de soufre en rotation autour d'un axe et frotté à la main, produisant ainsi des décharges électriques. Toutes sortes de machines de plus en plus élaborées sont inventées sur ce principe jusqu'au XIX^e siècle
- en 1730, Stephen GRAY, teinturier de son métier et physicien par curiosité intellectuelle, établit la distinction entre conducteur et isolant et établit des listes de corps ayant l'un ou l'autre de ces comportements.
- en 1733, Charles-François du FAY (ou DUFAY) remarque que deux corps légers mis en contact avec de l'ambre frotté se repoussent, que deux corps légers mis en contact avec du verre frotté se repoussent mais que deux corps légers mis en contact avec l'un avec de l'ambre frotté et l'autre du verre frotté s'attirent. Il en déduit qu'il y a deux sortes d'électricité rapidement appelées positive et négative.
- en 1745, Pieter van MUSSCHENBROEK et quelques autres inventent la *bouteille de Leyde*⁴, ancêtre du condensateur, utilisée d'abord dans les foires pour donner des décharges électriques au public !
- vers 1750 : découverte de l'influence électrique (voir chapitre C-II) et invention de nombreuses machines sur ce principe, de l'électrophore de VOLTA (1775) à la machine de WIMSHURST (1878) puis celle de VAN DE GRAAFF (1930) pour ne citer que les plus connues.
- puis commence la mise en forme de la théorie grâce à Benjamin FRANKLIN, Joseph PRIESTLEY (loi en $1/r^2$), Henry CAVENDISH (conservation de la charge, découverte de la localisation des charges en surface) et enfin COULOMB qui énonce la loi qui porte son nom et la vérifie expérimentalement en 1785.

N.B. La paternité des découvertes est difficile à affirmer pendant l'étape qualitative du recueil de résultats expérimentaux éparés qu'il faudra, dans une seconde étape, regrouper en une théorie. Une découverte isolée devient souvent une idée oubliée puis redécouverte ou exhumée par un autre. Il ne faut pas oublier qu'à cette époque, les découvertes sont surtout présentées comme des curiosités de salon.

1. C'est de la résine de conifère fossilisée. En grec ancien, on dit $\etaλεκτρον$ qui a donné électricité. Ne pas confondre avec l'ambre gris, calcul intestinal du cachalot.

2. du grec $\tauριβειν$ signifiant « frotter ».

3. surtout connu pour l'invention de hémisphères de Magdebourg montrant la vigueur de la pression atmosphérique.

4. ville des Pays-Bas.

2 Loi de Coulomb.

2.a Force d'interaction électrostatique.

Inspiré par la théorie de la gravitation établie par NEWTON en 1687 et validée par sa parfaite adéquation avec les résultats astronomiques, Joseph PRIESTLEY postule⁵ une loi en $1/r^2$, idée que reprend COULOMB qui la vérifie expérimentalement en 1785. Il formule ainsi la loi d'interaction entre charges électriques q au point M et q' au point M' et immobiles :

$$\vec{F} = \frac{q q'}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MM'}$ et r la distance $\|\overrightarrow{MM'}\|$; ε_0 est une constante liée au choix des unités⁶ et le 4π qui complique l'écriture a été mis là⁷ pour simplifier des théorèmes ultérieurs.

Du moins, c'est ce qu'on lit dans les livres. Ce n'est pas si simple que cela.

La matériel utilisé par COULOMB est celui de l'expérience de CAVENDISH (voir le chapitre B-IV) qui, du reste, lui est postérieure (1798). Il semblerait que le protocole soit différent (mesure directe de la force chez CAVENDISH, perturbation de la période d'oscillation par une interaction électrique chez COULOMB) mais cela n'est que de peu d'importance. En modifiant la distance de la charge électrique perturbatrice, COULOMB a pu vérifier la loi en $1/r^2$ avec toutefois de très grosses incertitudes expérimentales ; il fallait avoir foi en la physique pour en conclure à la validité de la loi.

Mais il est peu vraisemblable qu'il ait montré la proportionnalité aux charges. En effet, une masse c'est concret, ça se voit, les balances existent depuis longtemps et il est aisé de fabriquer une masse deux, trois, quatre fois plus grande qu'une masse unité. Mais une charge électrique c'est encore une chose mystérieuse, fugitive (elle disparaît spontanément si l'air est humide) et donc encore non mesurable. Certes l'électrophore de VOLTA permet de transporter une charge d'un endroit à un autre et l'on peut envisager de répéter deux ou trois fois la chose pour doubler ou tripler la charge mais ce transfert est plus qualitatif que quantitatif et VOLTA n'a pas encore inventé la pile qui permettrait de charger à chaque fois l'électrophore de façon identique.

Au contraire, il faut voir dans la loi de COULOMB une méthode de définition et de mesure des charges : on verra dans le prochain chapitre comment créer deux charges identiques ; dès lors la mesure de la force de répulsion et de leur distance permet de mesure leur

5. sur l'idée « on ne change pas une équipe qui gagne » ; effectivement en électrostatique, on gagnera, mais en magnétostatique (voir chapitre C-III), on inventera le concept de « masse magnétique » et l'on perdra.

6. Historiquement, on a d'abord choisi $4 \pi \varepsilon_0 = 1$.

7. assez tardivement.

charge commune. C'est la valeur de la constante ε_0 ⁸ qui fixe l'unité de charge, le coulomb⁹ dans le système international.

Il faudra attendre la découverte de l'électron par Joseph THOMSON en 1897 pour espérer enfin définir les charges de façon absolue.

2.b Champ électrique.

On peut scinder dans cette formule d'une part le facteur $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}$ ne dépendant que de la charge q et du point M' , qu'on appelle *champ électrique* créé par q en M' , et d'autre part la charge q' placée en M' . On a donc : $\vec{F} = q' \vec{E}(M')$.

En électrostatique où par définition les charges sont immobiles, c'est relativement formel mais quand les charges q et q' se déplaceront, la loi de Coulomb, ou ce qui la remplacera, sous-entendra une interaction instantanée car la force exercée sur q' en M' à l'instant t sera calculée avec la position de q au même instant t . Cette instantanéité n'a jamais été jugée satisfaisante ; elle est devenue explicitement impossible avec la théorie de la relativité qui interdit aux interactions de se propager plus vite que la lumière.

La présentation avec un champ énonce fondamentalement ceci : la charge q en M donne une propriété (on reste volontairement vague) à l'espace, caractérisée par un champ vectoriel, c'est à dire une fonction du point où l'on est, à valeurs vectorielles et si une charge q' est au point M' , elle interagit non plus avec q mais avec l'espace modifié par q . Lorsqu'on quittera le domaine de l'électrostatique, le champ créé par q aura une structure propagative qui rendra compte de la non-instantanéité.

2.c Champ créé par une distribution de charges.

Soit un ensemble de charges q_i placées en des points M_i . Une charge q' placée au point M' subit par additivité la force :

$$\vec{F} = q' \vec{E}(M') = q' \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{M_iM'}\|^3} \vec{M_iM'}$$

Lorsque la répartition de charges comporte beaucoup de charges très serrées, on peut en rendre compte par un modèle continu à une (répartition linéaire), deux (répartition surfacique) ou trois (répartition volumique) dimensions et l'on définit alors des densités linéiques, surfaciques ou volumiques de charges (respectivement notées λ , σ et ρ). Pour le calcul du champ électrique, la sommation se transforme en intégration. Par exemple, on aura pour une répartition volumique (l'intégration porte sur les coordonnées de M) :

$$\vec{F} = q' \vec{E}(M') = q' \iiint \frac{\rho(M) dV}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{MM'}\|^3} \vec{MM'}$$

8. Dans le système international, on a quasiment (à un pour mille près) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$.

9. sans majuscule

3 Calcul direct de champs électriques

3.a Symétries et invariances.

Soit une répartition de charges. Imaginons que nous voulions calculer le champ électrique en un point M et qu'il existe pour les charges un plan Π de symétrie passant par M , c'est-à-dire qu'une symétrie par rapport à Π transforme la répartition de charges en elle-même. Alors on peut affirmer, par symétrie, que le champ en M est égal à son symétrique, c'est-à-dire qu'il est contenu dans le plan Π .

Et s'il existe deux plans de symétrie passant par M , alors le champ en M est contenu dans ces deux plans donc par leur droite d'intersection, ce qui donne la direction du champ.

Enfin s'il existe, passant par M , un axe Δ de symétrie de révolution, le champ est colinéaire à cet axe Δ .

Par exemple, dans le cas d'une sphère uniformément chargée, de centre O , créant un champ $\vec{E}(M)$, tout plan contenant OM est plan de symétrie pour les charges, donc le champ est à l'intersection de tous ces plans. Il en résulte que le champ en M est porté par OM ; on dit qu'il est radial. On aurait pu aussi évoquer la symétrie de révolution autour de OM .

Soit une répartition de charges. Imaginons qu'une translation d'une longueur quelconque dans une direction privilégiée transforme la répartition en elle-même. Alors le champ électrique est identique à lui-même en deux points déduits l'un de l'autre par la même translation.

On en déduira, dans le cas d'une invariance par translation parallèle à Oz , que le champ ne dépend pas de z .

De même, si une répartition de charges est invariante par rotation d'un angle θ arbitraire autour d'un axe Oz , les composantes en coordonnées cylindriques du champ sont indépendantes de l'angle θ .

Ce genre de raisonnement a conduit Pierre CURIE à énoncer la loi suivante, empreinte des lois de la logique et donnée ici avec la formulation historique : « *Lorsque certaines causes produisent certains effets les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. Lorsque certains effets produits révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui leur ont donné naissance. La réciproque de ces deux propositions n'est pas vraie, au moins pratiquement, c'est à dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes* ».

3.b Exemple de calcul de champ électrique.

Considérons un disque de centre O , de rayon R , d'axe Oz et d'épaisseur négligeable, chargé avec une densité surfacique uniforme de charge σ . On veut calculer le champ électrique en un point M de l'axe Oz de cote z (le calcul explicite s'avère impossible en dehors

de l'axe Oz , la fonction à intégrer n'ayant pas de primitive connue).

La symétrie de la répartition de charges par rapport aux plans xOz et yOz entraîne que le champ recherché a la direction de Oz (on aurait pu aussi évoquer la symétrie de révolution autour de Oz).

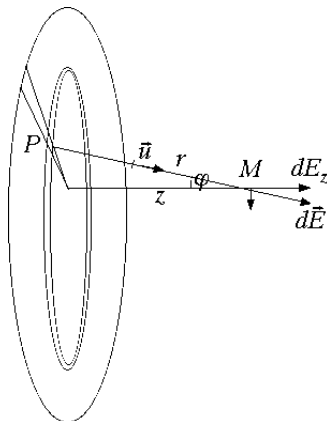


FIGURE 1 – Champ sur l'axe d'un disque uniformément chargé.

Découpons le disque en couronnes élémentaires de rayons r et $r + dr$, puis en portions de couronnes entre les angles θ et $\theta + d\theta$ autour d'un point P .

La charge élémentaire est $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$ et le champ élémentaire (voir figure 1 p. 9) :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\|PM\|^2} \vec{u}$$

Seule la projection sur Oz nous intéresse car nous savons que la symétrie impose que le champ total n'a de composante ni selon Ox ni selon Oy .

Par projection, et en notant φ l'angle $\widehat{OMP}$, on a donc :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\|PM\|^2} \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\|PM\|^2} \frac{z}{\|PM\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} z$$

On a donc :

$$E_z = \iint dE_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-(r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

soit, en évitant le piège concernant $\sqrt{z^2}$:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Remarque : Si l'on fait tendre R vers l'infini, on trouve le champ créé par un plan. Sa valeur devient indépendante de z :

$$E_z = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

selon que z est positif ou négatif; on remarque que le champ change de signe à la traversée du plan.

Remarque critique : tous ces calculs ne sont en fait qu'une vue de l'esprit. En effet, ou bien le corps chargé est isolant et on n'a pu l'électriser qu'en surface et par frottement et on a alors aucun moyen de vérifier que la densité surfacique est uniforme, ou bien il est conducteur et les charges (on peut démontrer qu'elles restent en surface) se déplacent librement et la densité surfacique, fonction du point où l'on est, devient une inconnue du problème. Il faut dans ce cas se doter de théorèmes spécifiques qui sont étudiés dans le chapitre C-II.

La seule façon de donner du sens physique à ce qui précède est l'adaptation de la méthode au calcul des champs de gravitation. En effet la loi de Coulomb et la loi de gravitation universelle sont analogues.

Bien sûr, une planète en forme de disque n'existe pas (quoique. Voir figure 2) mais un plateau rocheux à peu près plat et vaguement circulaire, pourquoi pas ?

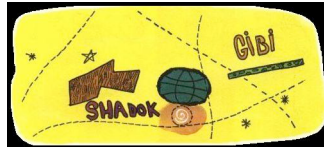


FIGURE 2 – Les planètes des Shadoks et des Gibis.

4 Potentiel électrique.

4.a Travail élémentaire de la force de Coulomb.

Imaginons qu'une charge q mobile, placée dans le champ électrique de charges q_i fixes en des points M_i créant en tout point M un champ électrique stationnaire (c'est-à-dire indépendant du temps) $\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{M_iM}\|^3} \vec{M_iM}$, se déplace d'un point M_1 à un point M_2 infiniment proche.

Le travail élémentaire de la force de COULOMB est, en considérant que le champ de M_1 à M_2 reste infiniment proche de celui en M_1 :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \sum_i \frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 \left\| \overrightarrow{M_i M_1} \right\|^3} \overrightarrow{M_i M_1} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Pour chacun des termes $\frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 \left\| \overrightarrow{M_i M_1} \right\|^3} \overrightarrow{M_i M_1} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$, nous poserons $r_i = \left\| \overrightarrow{M_i M_1} \right\|$ et $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{M_i M_1}}{\left\| \overrightarrow{M_i M_1} \right\|}$ et nous remarquerons que, pour tous les indices i , $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_i M_2} - \overrightarrow{M_i M_1} = d\overrightarrow{M_i M_1} = d(r_i \vec{u}_i)$. On a donc pour chaque terme :

$$\begin{aligned} \frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 \left\| \overrightarrow{M_i M_1} \right\|^3} \overrightarrow{M_i M_1} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} &= \frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \cdot d(r_i \vec{u}_i) = \dots \\ \dots &= \frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \cdot (dr_i \vec{u}_i + r_i d\vec{u}_i) = \frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i^2} (dr_i \vec{u}_i^2 + r_i \vec{u}_i \cdot d\vec{u}_i) \end{aligned}$$

Or $\vec{u}_i$ est un vecteur unitaire, donc $\vec{u}_i^2 = 1$ et, en prenant la différentielle de cette relation $2 \vec{u}_i \cdot d\vec{u}_i = 0$ d'où $\vec{u}_i \cdot d\vec{u}_i = 0$, on arrive à :

$$\frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 \left\| \overrightarrow{M_i M_1} \right\|^3} \overrightarrow{M_i M_1} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{q q_i dr_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i^2} = -d \left(\frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i} \right)$$

d'où :

$$\delta W = - \sum_i d \left(\frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r_i} \right)$$

Or on sait que si $\delta W = -dU$ alors U est appelée énergie potentielle ; donc l'énergie potentielle d'une charge q placée en M dans le champ créé par des charges q_i en des points fixes M_i est, en redonnant à r_i sa valeur explicite :

$$U = \sum_i \frac{q q_i}{4 \pi \varepsilon_0 \left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|}$$

De même que la force de Coulomb est présentée comme le produit d'une charge et du champ électrique créé par les autres, son énergie sera présentée comme le produit d'une charge et du *potentiel électrique* V créé par les autres. Le potentiel électrique créé au point M par les charges q_i placées en des points M_i est ainsi :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4 \pi \varepsilon_0 \left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|}$$

En simplifiant par la charge q tout le travail qui précède, on en extrait que la propriété fondamentale qui lie champ électrique et potentiel électrique est, pour M_1 et M_2 infiniment proches :

$$\vec{E}(M_1) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = -dV$$

soit en ne précisant plus le point de départ M_1 et en notant $\vec{d\ell}$ le déplacement élémentaire $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$\vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -dV$$

4.b Gradient d'un champ scalaire.

Repérons l'espace par un repère orthonormé $Oxyz$; le potentiel $V(M)$ devient une fonction des coordonnées que nous noterons $V(x, y, z)$ dont la différentielle s'exprime ainsi : $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$. Le déplacement élémentaire entre les points $M_1(x, y, z)$ et $M_2(x + dx, y + dy, z + dz)$ est $\vec{d\ell}(dx, dy, dz)$. Si nous notons (E_x, E_y, E_z) les composantes de $\vec{E}(M)$, alors $\vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -dV$ se développe en :

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

ce qui devant être vrai quel que soit le déplacement élémentaire, on peut affirmer que :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Nous définirons pour tout champ scalaire $f(M)$, son gradient comme un champ vectoriel noté $\vec{\text{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$ défini, dans le référentiel $Oxyz$ par ses composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Dès lors nous pouvons écrire la relation précédente sous la forme :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V}$$

Ne restons surtout pas à la surface des choses¹⁰ car ainsi présenté, il ne s'agit que d'un jeu d'écriture. Imaginons un vecteur $\vec{G}$ qui, dans un référentiel $Oxyz$, vérifie pour tout couple de deux points infiniment proches $\vec{G} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = f(M_2) - f(M_1)$. Le second membre est indépendant du choix du référentiel dans la mesure¹¹ où f est une fonction du point M indépendamment de la façon dont il est repéré. Dans un changement de référentiel *orthonormé*, le produit scalaire est invariant, donc dans un autre référentiel $OXYZ$ orthonormé, $\vec{G} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$ a la même valeur que dans $Oxyz$ soit $f(M_2) - f(M_1)$, ce qui aboutira avec les mêmes calculs que plus haut, en adaptant les notations à :

$$G_X = \frac{\partial f}{\partial X} \quad G_Y = \frac{\partial f}{\partial Y} \quad G_Z = \frac{\partial f}{\partial Z}$$

10. des êtres non plus.

11. C'est l'hypothèse de travail, vérifiée ici avec $V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|M_i M\|}$.

C'est à dire que la formule de définition du gradient donne le même vecteur dans tous les référentiels orthonormés; ses composantes changent avec le référentiel, comme tout vecteur, mais lui ne change pas, il se comporte donc comme un vecteur à part entière. On insiste là-dessus en disant que sa définition est *intrinsèque*.

4.c Intérêt et exemple de calcul de potentiel électrique.

Calculer un potentiel électrique créé par une distribution de charges est, en général, trois fois plus simple que calculer le champ créé car le champ nécessite par projection sur les axes de calculer trois intégrales au lieu d'une pour le potentiel qui est un scalaire. Ultérieurement, on pourra en déduire les composantes du champ par trois dérivations partielles, opération beaucoup plus simple qu'une intégration.

Reprenons l'exemple précédent dont nous redonnons l'énoncé. Soit un disque horizontal de centre O , de rayon R , dans le plan Oxy , chargé avec une densité surfacique uniforme de charge, notée σ . Soit un point M de l'axe à une cote z du plan. On découpe le plan en couronnes élémentaires de centre O , de rayons r et $r + dr$, puis en portions de couronne entre les angles θ et $\theta + d\theta$.

En raisonnant comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \dots \\ &\dots = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien sûr le champ calculé précédemment par $\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$

Attention à ne pas dire que $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = 0$ car on ne connaît que $V(0, 0, z)$ et l'on ne peut pas dériver par rapport à x une fonction qu'on ne connaît qu'en $x = 0$. C'est la symétrie de révolution qui permet d'affirmer que les composantes du champ selon x et y sont nulles.

Remarque : on pourrait penser calculer le potentiel créé par un plan en faisant tendre R vers l'infini. Malheureusement l'intégrale diverge alors. C'est pratiquement toujours le cas lorsque la charge totale est infinie car cette situation n'est pas réaliste.

4.d Lignes de champ et surfaces équipotentiellles

On définit une ligne de champ comme une courbe tangente en chacun de ses points au champ électrique.

On définit une surface équipotentielle comme une surface dont tous les points sont au même potentiel.

Considérons deux points M et M' infiniment proches d'une même équipotentielle, l'un de coordonnées (x, y, z) , l'autre de coordonnées $(x + dx, y + dy, z + dz)$. On a donc :

$$0 = V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) = dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{dl} = -\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Comme c'est vrai quel que soit M' infiniment proche de M sur la surface équipotentielle, on en déduit que la ligne de champ, parallèle à $\overrightarrow{E}$, est orthogonale à tous les $\overrightarrow{dl}$ contenus dans cette surface équipotentielle donc à cette surface elle-même. Retenons :

Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

Imaginons cette fois que $\overrightarrow{MM'}$ soit parallèle à la ligne de champ et dans le sens du champ électrique. On a alors :

$$\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} > 0 \quad \text{d'où} \quad dV < 0$$

Les lignes de champ sont donc orientées dans le sens des potentiels strictement décroissants. Une conséquence importante est qu'il est impossible qu'une ligne de champ soit fermée (c'est-à-dire qu'elle fasse une boucle en revenant à son point de départ).

5 Théorème de Gauss.

5.a Flux électrique à travers une surface orientée élémentaire.

- Angle solide.

Soit une charge ponctuelle¹² q au point O . Considérons un cône de sommet O (pas forcément de révolution, c'est-à-dire un ensemble de demi-droites issues de O) découpant sur une sphère de centre O et de rayon r arbitraire une petite surface élémentaire d'aire dS limitée par une courbe fermée sans complication topologique (du genre courbe en forme de huit avec un croisement) comme sur la figure 3 p. 15.

On appelle provisoirement (avant une définition plus générale) *flux électrique envoyé par la charge q à travers dS* le produit $d\Phi = E dS$ où E est la composante radiale (seule non nulle) du champ électrique créé par q au niveau de dS , c'est-à-dire $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, d'où :

$$d\Phi = E dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2}$$

¹². Puisque nous avons parlé de distribution de charges en volume ou en surface, on précise ainsi qu'il s'agit d'une charge en un point.

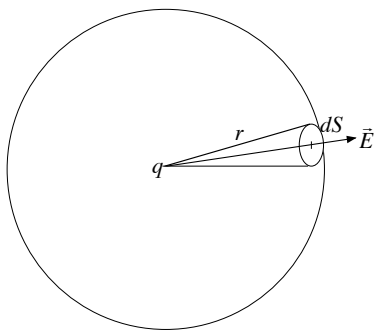


FIGURE 3 – Flux élémentaire (cas simple).

Imaginons que nous changions la valeur du rayon en le faisant passer de r à $r' = k r$ par une homothétie de facteur k . Le même cône découpe sur la sphère de rayon $r' = k r$ une nouvelle surface dS' dont la taille est multipliée par rapport à dS d'un facteur k et donc l'aire par un facteur k^2 d'où $dS' = k^2 dS$. Dès lors, on a :

$$\frac{dS'}{r'^2} = \frac{k^2 dS}{(k r)^2} = \frac{k^2 dS}{k^2 r^2} = \frac{dS}{r^2}$$

C'est-à dire que le rapport $\frac{dS}{r^2}$ est indépendant du choix du rayon, c'est donc une caractéristique du cône que l'on appelle *angle solide* traditionnellement noté $d\Omega$, sans dimension mais néanmoins compté en stéradian, pseudo-unité comme le radian en trigonométrie. On peut donc réécrire :

$$d\Phi = E dS = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0} d\Omega$$

Remarque (pour préparer la suite) : imaginons le cône comme un parapluie. Ouvrons le progressivement jusqu'à une forme plane passant par O ; la petite surface dS est devenue une demi-sphère. Un coup de vent¹³ et paf, le parapluie se retourne complètement et dS occupe toute la sphère de surface $4 \pi r^2$. On en déduit que l'angle solide correspondant à tout l'espace vaut 4π , un peu comme le 2π radians d'un tour complet de cercle trigonométrique. Dans ce cas le flux électrique « total » est :

$$\Phi = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0} 4 \pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ce que nous allons généraliser maintenant.

Imaginons maintenant un cône s'appuyant sur une courbe fermée délimitant une surface élémentaire (donc quasiment plane car elle se confond avec son plan tangent) d'aire

13. Si, par hasard, sur l'Pont des Arts, tu croises le vent, le vent fripon, prudenc', prends garde à ton jupon ! Si, par hasard, sur l'Pont des Arts, tu croises le vent, le vent maraud, prudent, prends garde à ton chapeau ! Georges Brassens.

dS et dont la normale fait un angle θ avec OM direction du champ électrique en M point milieu de la surface. Il est d'usage d'introduire un vecteur surface $\vec{dS}$ normal à la surface dans un sens arbitraire et de module dS , aire de la surface. Tout ceci est résumé par la figure 4 p. 16.

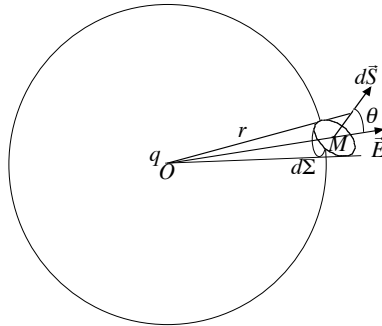


FIGURE 4 – Flux élémentaire (cas général).

Appelons $d\Sigma$ l'aire de la surface découpée par le cône sur la sphère de rayon $r = OM$ (dessinée un peu plus petite qu'en réalité pour plus de lisibilité de la figure). Par définition, l'angle solide du cône est $d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2}$. Or $d\Sigma$ est quasiment la projection orthogonale de dS sur la sphère et cette projection conserve la grandeur des segments parallèles au plan de projection et rétrécit d'un facteur $\cos \theta$ les segments selon la plus grande pente par rapport au plan de projection ; donc puisque toute surface est proche d'un assemblage de rectangles minuscules, on a $d\Sigma = dS \cos \theta$. L'angle solide se réécrit donc ainsi, en introduisant un produit scalaire avec $\vec{u}$, vecteur unitaire de OM :

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

Attention, ceci n'est vrai que si $\cos \theta$ est positif, donc θ inférieur à $\pi/2$. On peut ainsi donner une convention algébrique et compter négativement les angles solides si θ est supérieur à $\pi/2$.

On appelle désormais *flux électrique envoyé par la charge q à travers $\vec{dS}$* le produit $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}$ où E est le champ électrique créé par q au niveau de dS , c'est-à-dire $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$, d'où :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

5.b Démonstration du théorème de Gauss.

Imaginons une surface *fermée*, c'est-à-dire séparant l'espace en un intérieur et un extérieur. On l'oriente vers l'extérieur (sinon le théorème à démontrer aurait un signe moins qui compliquerait la vie inutilement), c'est-à-dire que l'on oriente les vecteurs surface des

surface élémentaires constituant la surface fermée vers l'extérieur de celle-ci, comme sur la figure 5 p. 17 où la surface est volontairement bizarroïde mais sans complication topologique.

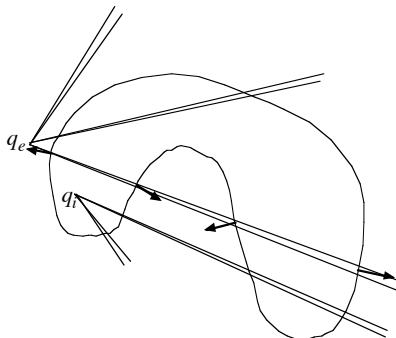


FIGURE 5 – Flux élémentaire (cas général).

Calculons par sommation des $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS}$ le flux total envoyé par une charge ponctuelle à travers la surface. Dans le cas d'une charge extérieure, celle notée q_e sur la figure par exemple, regroupons toutes les surfaces élémentaires découpées par un même cône élémentaires ; la figure montre qu'il en découpe selon les cas zéro, deux, quatre ou plus mais toujours un nombre pair et alternativement avec la convention négative et la convention positive. Le total est donc nul.

Le flux total envoyé à travers une surface fermée par une charge extérieure est nul.

Dans le cas d'une charge intérieure, celle notée q_i sur la figure par exemple, regroupons encore les surfaces découpées par un même cône ; la figure montre cette fois qu'il peut selon les cas un, trois ou plus, alternativement avec la convention positive et la convention négative. Le cône ne contribue donc qu'une seule fois et par sommation des $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$, on trouve $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega$. Or on a vu plus haut que la somme des angles solides reconstituant tout l'espace est 4π .

Le flux total envoyé à travers une surface fermée par une charge intérieure q_i est égal à $\frac{q_i}{\epsilon_0}$.

Il ne reste qu'à conclure, par sommation : si le champ est créé par une distribution de charges quelconques, les charges extérieures ne contribuent pas au flux total à travers une surface fermée Σ et les charges intérieures pour leur valeur totale, appelée charge intérieure, divisée par ϵ_0 . D'où le théorème de GAUSS :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0}$$

Remarque 1 : la notation $\oint$ avec un rond est là pour insister sur le fait que la surface

doit être fermée ; cette notation est peu utilisée en mathématiques.

L'intérêt du théorème de Gauss est qu'il permet de calculer rapidement (voir ci-après) le champ électrique, mais uniquement dans les situations de haute symétrie.

Remarque 2 : Dans la démonstration, on n'a pas évoqué le cas d'une charge située *sur* la surface ; à la différence d'une charge intérieure, la somme des cônes traversant un nombre impair de fois la surface ne reconstitue pas tout l'espace mais un demi-espace limité par le plan tangent. En toute rigueur (j'abrège), on devrait écrire :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int.}} + \frac{1}{2} Q_{\text{surf.}}}{\varepsilon_0}$$

Mais on verra, dans le chapitre C-II, que cette subtilité peut être ignorée.

Remarque 3 : On n'oubliera pas que, par analogie, il existe un théorème de Gauss gravitationnel. En effet la loi de COULOMB est $\vec{F} = \frac{q q'}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u} = q' \vec{E}$ et la loi de gravitation universelle est $\vec{F} = -\frac{G m m'}{r^2} \vec{u} = m' \vec{g}$; il suffit donc de remplacer les charges par des masses et la constante $\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}$ par $-G$ ou $\frac{1}{\varepsilon_0}$ par $-4 \pi G$, d'où :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4 \pi G M_{\text{int.}}}$$

5.c Usage raisonné du théorème de Gauss.

Soit une répartition de charges et un point M quelconque où l'on veuille calculer le champ électrique. Il faut, dans un premier temps, analyser les symétries pour trouver la direction de $\vec{E}(M)$ puis les invariances.

Ensuite, il faut trouver une surface fermée à laquelle appliquer le théorème ; il ne s'agit pas d'une surface matérielle mais d'une entité mathématique inventée au cas par cas en fonction du point où l'on veut calculer le champ. Utiliser une surface qui apparaît dans l'énoncé du problème est la preuve d'une mécompréhension de l'usage du théorème de GAUSS.

Pour pouvoir calculer le champ en M , il faut

- que la surface passe par M sinon $\vec{E}(M)$ n'apparaît pas dans $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ et l'on ne peut espérer l'en déduire,
- que $\vec{E}(M)$ soit orthogonal à la surface sinon on perd tout espoir de connaître la composante tangentielle du champ dont le produit scalaire avec $d\vec{S}$ est nul,

Après relecture du paragraphe 4.d p. 13 concernant les lignes de champ et les surfaces équipotentielles, le lecteur se convaincra que le théorème de GAUSS s'utilise en choisissant la surface équipotentielle passant par le point où l'on veut calculer le champ.

Il faut encore que le module du champ soit uniforme sur la surface sinon on ne peut déduire la valeur de la fonction en un point en ne connaissant que la valeur d'une intégrale¹⁴. Le théorème n'est donc utilisable que dans des situations de haute symétrie.

Expliquons tout cela par l'étude des grands classiques qui apportera parfois des nuances à ce qui vient tout juste d'être dit.

5.d Les grands classiques.

• Champ créé par une sphère uniformément chargée en surface.

Soit une sphère de centre O , de rayon R , portant la charge Q uniformément répartie à sa surface. Soit un point M à la distance r de O . Tout plan contenant OM est plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans ; il est donc radial. La symétrie sphérique du problème indique en outre que le module du champ ne dépend que de r ; on peut donc écrire $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

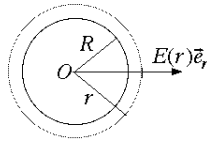


FIGURE 6 – Champ créé par une sphère uniformément chargée.

Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de centre O et de rayon r passant par M . On a :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \oiint E(r) dS = E(r) \oiint dS = 4\pi r^2 E(r)$$

Quant à Q_{int} , elle est égale à Q si $r > R$ et nulle si $r < R$, donc :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{e}_r}{r^2} & \text{si } r > R \end{cases}$$

On remarque qu'à la traversée de la surface chargée, le champ subit une discontinuité. Si l'on utilise le théorème de GAUSS dans la version qui tient compte des charges sur la surface à laquelle on l'applique, on déduit aisément qu'à la surface de la sphère chargée :

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{e}_r}{R^2}$$

14. C'est un peu comme si l'on disait « $\int_0^1 f(x) dx = 1$, calculer $f(\frac{1}{2})$ ».

soit la moyenne arithmétique de la limite à gauche et de la limite à droite. Cette remarque servira marginalement dans le chapitre C-II.

• **Champ et potentiel créés par une sphère uniformément chargée en volume.**

Attention l'exemple qui suit n'est pas un exemple d'électrostatique, car il est impossible¹⁵ d'électrifier en profondeur un isolant et il est impossible de maintenir en profondeur des charges dans un conducteur (on montrera dans le chapitre C-II qu'elles migrent en surface). Il s'agit donc en fait ici de trouver par analogie le champ de gravitation créé par une répartition uniforme de masse.

Soit une sphère de centre O , de rayon R , portant la charge Q uniformément répartie en volume et qui a donc une densité volumique de charge $\rho = 3Q/4\pi R^3$. Par la même méthode que celle du « grand classique » précédent, on arrive à :

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Si $r > R$ alors $Q_{\text{int}} = Q$ et :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{pour } r > R$$

Par contre, si $r < R$, la charge intérieure est celle d'une sphère de rayon r , soit $(4/3)\pi r^3 \rho$ et, en reportant la valeur de ρ , $Q_{\text{int}} = Q(r/R)^3$, d'où :

$$\vec{E} = \frac{Q(r/R)^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

soit :

$$\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r \quad \text{pour } r < R$$

Profitons de cet exemple pour montrer comment on peut en déduire le potentiel électrique. Ici, la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ devient, puisque la symétrie sphérique permet d'affirmer que V ne dépend que de r , $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$. On en déduit :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r > R$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{pour } r < R$$

soit, en appelant A et B les constantes d'intégration :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \quad \text{pour } r > R$$

15. sauf à le bombarder d'un rayonnement ionisant mais on n'aura pas la maîtrise de l'uniformité de la charge volumique.

$$V = -\frac{Q r^2}{8 \pi \varepsilon_0 R^3} + B \quad \text{pour } r < R$$

Les potentiels sont certes définis à une constante additive près, mais il est raisonnable de choisir $V = 0$ infiniment loin des charges, là où la force d'interaction tend vers 0. On fait donc tendre r vers l'infini (dans la formule valable pour $r > R$, bien sûr) et puisque V tend vers 0, on doit choisir A nul. Par définition, V est dérivable, donc continu, et $\lim_{r \rightarrow R^+} = \lim_{r \rightarrow R^-}$, d'où l'on tire $B = \frac{3Q}{8 \pi \varepsilon_0 R}$. Finalement,

$$V = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r} \quad \text{pour } r > R$$

$$V = \frac{Q}{8 \pi \varepsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) \quad \text{pour } r < R$$

Rappelons qu'il s'agit d'un problème de gravitation déguisé en problème de gravitation et que l'on vient donc de calculer le champ de gravité à l'extérieur et à l'intérieur d'une sphère homogène.

Remarque : Pour une sphère chargée de façon non uniforme mais avec une symétrie sphérique (la charge volumique ne dépend que de r , distance au centre), le même raisonnement montre que le champ créé à l'extérieur de la sphère est le même que si la charge étaient concentrée au centre et était donc ponctuelle. Voilà pourquoi le Soleil, quelque monstrueux qu'il soit, attire la Terre comme s'il était ponctuel, enfin presque à cause de l'aplatissement de ses pôles.

• Champ créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé.

Un fil confondu avec Oz possède une densité linéique de charges λ . On veut calculer le champ en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z . Les deux plans passant par M , le premier passant par Oz , le second perpendiculaire à Oz , sont des plans de symétrie, donc le champ est parallèle à leur intersection ; il est donc radial. Le problème possède une invariance par translation parallèlement à Oz et une invariance par rotation autour de Oz ; son module ne dépend donc ni de z , ni de θ . On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

On va donc appliquer le théorème de Gauss à la surface choisie selon les principes évoqués plus haut, à savoir un cylindre d'axe Oz , de rayon r et d'une hauteur arbitraire¹⁶ h . Le flux à travers cette surface est :

$$\iint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint E(r) dS = E(r) \iint dS = 2 \pi r h E(r)$$

16. mais finie sinon le flux total et la charge totale seraient infinis et l'on ne pourrait rien en déduire.

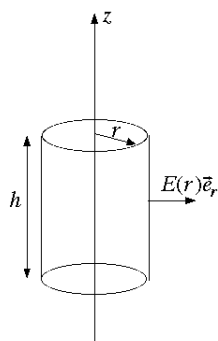


FIGURE 7 – Champ créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé.

L'ennui est que cette surface n'est pas fermée. On la ferme donc en lui accolant deux disques de rayon r qui lui servent de fond et de couvercle. Le flux à travers ces surfaces est nul car leurs vecteurs surfaces sont selon $\vec{e}_z$ et le champ selon $\vec{e}_r$. La charge intérieure est alors λh et on en déduit :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Remarque : si l'on cherche à trouver le potentiel électrique correspondant, on trouve un potentiel en $\ln(r)$ qui ne pourra pas tendre vers 0 quand r devient infini. Cela provient du fait que le fil infini uniformément chargé porte une charge infinie, ce qui n'est pas physiquement possible. Ce calcul n'est en fait qu'un cas d'école destiné à maîtriser le théorème de GAUSS mais ne correspond à aucune situation physiquement plausible.

• Champ créé par un plan infini uniformément chargé.

Un plan xOy possède une densité surfacique de charges σ . Soit un point M de coordonnées x, y, z .

Tout plan contenant la parallèle à Oz passant par M est plan de symétrie ; on en déduit que le champ est parallèle à Oz . De plus l'invariance par translation parallèle à Ox ou Oy permet d'affirmer que le champ ne dépend ni de x , ni de y . On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

Enfin la symétrie par rapport au plan xOy permet d'affirmer que le champ au point de cote $-z$ est symétrique de celui en z , donc que la fonction $E(z)$ est impaire.

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de génératrices parallèles à Oz , limité par deux disques de surface S l'un à la cote z , l'autre à la cote $-z$ (avec z positif). Le flux est nul à travers la surface latérale du cylindre, car les vecteurs surfaces sont parallèles au

plan xOy et le champ perpendiculaire. Le flux à travers le disque du haut, orienté vers le haut est $E(z)S$ et celui à travers le disque du bas, orienté vers le bas est $(-E(z))(-S)$. Le théorème de Gauss donne donc (avec z positif) :

$$2 E(z) S = \sigma S / \varepsilon_0$$

d'où :

$$E(z) = \begin{cases} \sigma/2 \varepsilon_0 & \text{si } z > 0 \\ -\sigma/2 \varepsilon_0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

5.e Formulation locale du théorème de Gauss.

Appliquons, dans une région de l'espace chargée, le théorème de GAUSS à un cube dont un sommet est au point $M(x, y, z)$ de cotés parallèles aux axes et de côté a infiniment petit.

Le flux électrique à travers la face d'abscisse $x + a$, orientée vers l'extérieur, donc dans le sens de Ox est, en notant Y et Z l'ordonnée et la cote d'un point quelconque de cette face avec $y < Y < y + a$ et de même pour Z :

$$\Phi_1 = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint E_x(x + a, Y, Z) dY dZ$$

où E_x est la composante sur Ox de $\vec{E}$. De même, le flux à travers la face d'abscisse x , orientée vers l'extérieur, donc dans le sens opposé à Ox est :

$$\Phi_2 = - \iint E_x(x, Y, Z) dY dZ$$

La somme de ces deux flux est alors, avec un développement limité au premier ordre non nul :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \iint (E_x(x + a, Y, Z) - E_x(x, Y, Z)) dY dZ$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \iint a \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{(x, Y, Z)} dY dZ$$

Et si a est infiniment petit, on peut, par continuité, confondre les valeurs de toute fonction sur tout point d'un côté avec sa valeur à un sommet et donc admettre que la fonction est pratiquement constante ; d'où :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \iint a \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{(x, y, z)} dY dZ = a \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{(x, y, z)} \iint dy dz = a \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{(x, y, z)} a^2 = a^3 \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{(x, y, z)}$$

En groupant les quatre autres faces deux par deux, le flux total s'écrira alors :

$$\Phi = a^3 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

Dans le cas d'une distribution de charges en volume, la charge électrique intérieure au cube est avec le même genre d'approximation :

$$\begin{aligned} Q_{\text{int.}} &= \iiint \rho(X, Y, Z) \, dX \, dY \, dZ = \iiint \rho(x, y, z) \, dX \, dY \, dZ = \dots \\ &\dots = \rho(x, y, z) \iiint dX \, dY \, dZ = \rho(x, y, z) a^3 \end{aligned}$$

Après simplification par a^3 , le théorème de GAUSS conduit à :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ce genre de raisonnement est récurrent en physique et pour se donner des outils efficaces, à tout champ vectoriel $\vec{V}(M)$ dont les composantes sont notées V_x , V_y et V_z , on associe un champ scalaire, appelé *divergence* de $\vec{V}$, et noté $\text{div } \vec{V}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ et défini par $\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$. Comme pour le gradient, on peut montrer¹⁷ qu'un changement de base orthonormée ne modifie pas la divergence qui est donc une grandeur intrinsèque.

Le théorème de GAUSS peut donc se formuler ainsi :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Il s'agit d'une formulation *locale* car les deux membres sont des champs, c'est-à-dire des fonctions du point de l'espace où l'on est. La formulation historique est globale ou *intégrale* car elle fait intervenir un volume et sa surface.

En s'en donnant les moyens, toute loi physique intégrale peut se traduire en une loi locale. L'intérêt est que les mathématiques offrent des outils puissants de gestion des fonctions, donc des champs.

Remarque 1 : Si l'on reporte $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ dans $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on arrive à ceci : $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. Si l'on reporte maintenant les composantes du gradient dans l'expression développée de la divergence, on arrive à :

$$\frac{\partial(\frac{\partial V}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial V}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial V}{\partial z})}{\partial z} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

17. Ça passe par l'utilisation des matrices jacobiniennes.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Là encore, l'expression qui, à un champ scalaire $V(M)$, associe le champ, lui aussi scalaire, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ est récurrente en physique, on l'appelle *laplacien* de V et l'on note ΔV . On a donc :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Cette relation est connue sous le nom d'équation de POISSON.

Remarque 2 : A priori, ce qui précède n'a de valeur qu'en électrostatique, c'est-à-dire quand toutes les charges sont immobiles. En fait, le théorème de GAUSS reste valable en toutes circonstances ; par contre lorsque les charges se déplacent, $\vec{E}$ n'est plus égal au gradient du potentiel V et par conséquent, l'équation de POISSON n'est plus valable et dans ces deux cas, il faut ajouter un terme supplémentaire. On y reviendra au chapitre C-VIII.

Remarque 3 : les notions de gradient, divergence, laplacien et autres sont étudiées de façon plus théorique dans le chapitre A-IX.

6 Considérations énergétiques.

6.a Première idée et ses sous-entendus.

Une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle U si $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$. Une force électrique s'écrit $\vec{F} = q \vec{E} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\text{grad}} (qV)$. On en déduit que l'énergie potentielle d'une charge q dans un champ $\vec{E}$ est :

$$U = qV$$

Soit, mais c'est trop formel pour être cru sur parole. Le sous-entendu¹⁸ est que le champ $\vec{E}$ et donc le potentiel V sont des données immuables du problème et qu'ils sont donc créés par des charges fixes.

6.b Energie d'interaction entre deux charges.

Si ce qui précède est vrai, l'énergie d'une charge q_j dans le champ créé par une charge q_i est, en notant r_{ij} la distance entre les points où elles sont :

18. Je rappellerai fréquemment qu'il faut expliciter les sous-entendus, faute de quoi on ne peut pas les nier. A ce sujet, il faut lire « *Dire et ne pas dire* » d'Oswald DUCROT.

$$U = \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$$

Mais est-ce toujours vrai si q_i (placée en M_i) comme q_j (placée en M_j) peut se déplacer ? La réponse a déjà été donnée dans le chapitre B-II de mécanique du point, mais rafraîchissons-nous la mémoire.

Notons classiquement $\overrightarrow{M_i M_j} = r_{ij} \overrightarrow{u}_{ij}$. Si q_j soumise à la force $\frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}^2} \overrightarrow{u}_{ij}$ se déplace de M_j à M'_j , elle reçoit le travail :

$$\delta W_j = \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}^2} \overrightarrow{u}_{ij} \cdot \overrightarrow{M_j M'_j}$$

De même si q_i soumise à la force de réaction opposée, soit $-\frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}^2} \overrightarrow{u}_{ij}$ se déplace de M_i à M'_i , elle reçoit le travail :

$$\delta W_i = -\frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}^2} \overrightarrow{u}_{ij} \cdot \overrightarrow{M_i M'_i}$$

La somme des deux travaux est :

$$\delta W_i + \delta W_j = \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}^2} \overrightarrow{u}_{ij} \cdot (\overrightarrow{M_j M'_j} - \overrightarrow{M_i M'_i})$$

Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_j M'_j} - \overrightarrow{M_i M'_i} &= (\overrightarrow{OM'_j} - \overrightarrow{OM_j}) - (\overrightarrow{OM'_i} - \overrightarrow{OM_i}) = \dots \\ &\dots = (\overrightarrow{OM'_j} - \overrightarrow{OM'_i}) - (\overrightarrow{OM_j} - \overrightarrow{OM_i}) = \overrightarrow{M'_i M'_j} - \overrightarrow{M_i M_j} \end{aligned}$$

soit la variation élémentaire de $\overrightarrow{M_i M_j} = r_{ij} \overrightarrow{u}_{ij}$, on peut donc écrire :

$$\delta W_i + \delta W_j = \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}^2} \overrightarrow{u}_{ij} \cdot d(r_{ij} \overrightarrow{u}_{ij})$$

En poursuivant les calculs comme dans le paragraphe 4.a p. 10, on arrive bien au même résultat :

$$\delta W_i + \delta W_j = -d \left(\frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}} \right)$$

En conclusion, il est plus pertinent ici de dire que $\frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$ est l'énergie d'interaction entre q_i et q_j .

6.c Energie d'interaction entre charges ponctuelles.

Imaginons maintenant qu'il y ait N charges indicées par i ; leur énergie d'interaction est la somme des énergies de tous les couples de charges (distinctes) prises deux à deux, ce que l'on a envie d'écrire :

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$$

mais la notation est ambiguë car il faut bien préciser que chaque couple (i, j) doit n'être compté qu'une fois ou autrement dit que (i, j) et (j, i) c'est le même couple.

$U = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$ est erroné car chaque couple est compté deux fois.

$U = \sum_i \sum_{j > i} \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$ est correct, car chaque couple est compté une seule fois, mais peu pratique.

La formulation idéale est :

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$$

Poursuivons en regroupant les termes de façon à leur faire dire autre chose :

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}} \right)$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}} \right)$$

Or $\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4 \pi \varepsilon_0 r_{ij}}$ n'est autre que le potentiel électrique que créent toutes les charges (sauf q_i qui n'interagit pas avec elle-même) au point où se trouve q_i et que nous noterons V_i . On peut donc aussi affirmer que :

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i}$$

6.d Energie d'interaction pour une distribution continue.

Pour une distribution continue, par exemple en volume, il suffit de remplacer la somme par une intégrale triple, soit :

$$U = \frac{1}{2} \iiint dq V = \frac{1}{2} \iiint \rho V dV$$

où ρ est la masse volumique et dV le volume élémentaire.

Prenons l'exemple de gravitation déguisé de la sphère de rayon R uniformément chargée en volume étudié plus haut. On utilise la symétrie sphérique, le volume entre les sphères de rayons r et $r + dr$ est $dV = 4\pi r^2 dr$, $\rho(r)$ est nul pour $r > R$ et vaut $\frac{3Q}{4\pi R^3}$ pour $r < R$ et enfin le potentiel pour $r < R$ est, cf supra :

$$\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2)$$

d'où finalement :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{3Q}{4\pi R^3} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R (3R^2 - r^2) r^2 dr$$

$$U = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \frac{4}{5} R^5$$

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

On passe au problème gravitationnel caché en remplaçant la charge Q par la masse M et la constante électrostatique $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par la constante gravitationnelle $-G$, d'où :

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$