

Chapitre C-IV

Dipôles électriques. Dipôles magnétiques.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On définit un dipôle électrique comme un ensemble de charges occupant un volume restreint et de charge totale nulle. On étudie le potentiel et le champ électrique qu'un tel édifice crée à grande distance (dipôle actif) puis l'action d'un champ électrique créé par d'autres charges sur un tel édifice (dipôle passif). On évoque les distributions quadripolaires, la polarisabilité électrique et les forces de Van der Waals étudiées dans d'autres chapitres.

On définit un dipôle magnétique comme une répartition volumique de courants occupant un volume restreint et non par le modèle classique de la spire de courant. Cela complique singulièrement les calculs mais est plus conforme à la réalité. On étudie le potentiel-vecteur et le champ magnétique qu'un tel édifice crée à grande distance (dipôle actif) puis l'action d'un champ magnétique créé par d'autres courants sur un tel édifice (dipôle passif).

Pour la partie concernant les dipôles magnétiques, une certaine aisance en analyse vectorielle est requise.

Table des matières

C-IV Dipôles électriques. Dipôles magnétiques.	1
1 Dipôle électrique « actif »	5
1.a Potentiel créé à grande distance par une distribution de charges. . .	5
1.b Champ créé à grande distance par une distribution dipolaire. . . .	7
1.c Surfaces équipotentielles et lignes de champ.	8
1.d Distributions quadripolaires.	10
2 Dipôle électrique « passif »	11
2.a Force exercée sur un dipôle par un champ.	11
2.b Moment dynamique exercé sur un dipôle par un champ.	12
2.c Energie d'interaction entre un dipôle et un champ.	13
2.d Retour sur la force exercée sur un dipôle par un champ.	13
3 Autres aspects du dipôle électrique.	15
3.a Dipôle déformable.	15
3.b Forces de Van der Waals	16
4 Dipôle magnétique « actif ».	16
4.a Potentiel-vecteur créé à grande distance par une distribution de courants.	16
4.b La boucle de courant, vue comme un dipôle.	20
4.c Champ magnétique créé à grande distance par une distribution de courants.	22
5 Dipôle magnétique « passif ».	24
5.a Force exercée sur un dipôle par un champ.	24
5.b Moment dynamique exercé sur un dipôle par un champ.	24

5.c	Energie d'interaction entre un dipôle et un champ.	25
6	Dipôle déformable.	27

1 Dipôle électrique « actif ».

Il s'agit ici de considérer un dipôle exerçant une action sur d'autres charges.

1.a Potentiel créé à grande distance par une distribution de charges.

Soit un ensemble de charges, soit ponctuelles (charges q_i en des points A_i), soit réparties en volume (densité volumique au point A notée $\rho(A)$) et contenues dans un volume \mathcal{V} borné de l'espace. On se propose de calculer le potentiel en un point M dont la distance à la plus proche des charges est grande devant la distance maximale qui sépare les charges entre elles.

Remarque : Dans la pratique, un dipôle est censé représenter la répartition des charges dans un édifice atomique ou moléculaire. Dans le fil du chapitre, quand j'écris « molécule », entendez « molécule ou atome ».

Le potentiel recherché est donné rigoureusement par l'une des formules qui suit, selon le contexte :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{A_iM}\|}$$

$$V(M) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(A) d\mathcal{V}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AM}\|}$$

mais sous cette forme, il est inexploitable. Nous allons remplacer cette expression par une approximation plus pratique.

Soit O un point choisi arbitrairement au beau milieu¹ de la région qui contient les charges. On note $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$ ainsi que $\vec{a}_i = \frac{\vec{OA_i}}{r}$ comme sur la figure 1 p. 5.

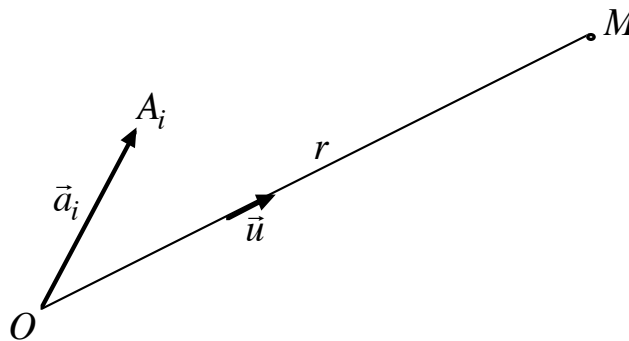


FIGURE 1 – Approximation de la distance.

1. Ne pas comprendre « au milieu », ce qui serait une localisation précise à définir plus correctement, mais une vague localisation.

On commence par calculer $\|\overrightarrow{A_i M}\|^2$ puis $\frac{1}{\|\overrightarrow{A_i M}\|}$, rigoureusement puis sous forme de développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{r}$:

$$\|\overrightarrow{A_i M}\|^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_i}\right)^2 = (r \vec{u} - \vec{a}_i)^2 = r^2 - 2r \vec{u} \cdot \vec{a}_i + \vec{a}_i^2 = r^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}_i}{r} + \frac{\vec{a}_i^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{A_i M}\|} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}_i}{r} + \frac{\vec{a}_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}_i}{r} + \dots\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}_i}{r} + \dots\right)$$

d'où l'on tire selon le contexte :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{(\sum_i q_i \vec{a}_i) \cdot \vec{u}}{r^2} \right]$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\iiint \rho(A) dV}{r} + \frac{\iiint \rho(A) \overrightarrow{OA} dV \cdot \vec{u}}{r^2} \right]$$

Deux cas se présentent :

- ou bien la charge totale $Q = \sum_i q_i$ ou $Q = \iiint \rho(A) dV$ est non nulle et dans ce cas, il est particulièrement futé de choisir le point O non plus arbitrairement mais au barycentre des charges, donc tel que $\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$ (une des deux définitions équivalentes du barycentre). Dès lors, à l'ordre 2, on a :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{0}{r^2}$$

ce qui signifie qu'à cet ordre, on peut remplacer la distribution de charge par la charge totale placée au barycentre. On écrit $+\frac{0}{r^2}$ pour insister que c'est à l'ordre 2 donc une excellente approximation.

- ou bien la charge totale est nulle et l'on sait² alors que la quantité $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$ ou $\vec{p} = \iiint \rho(A) \overrightarrow{OA} dV$ est indépendante du choix du point O et est donc caractéristique de la distribution de charge qu'on appelle alors *dipôle électrique* ; on appelle \vec{p} *moment dipolaire électrique*. On a donc, à l'ordre 2 :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dans tout ce qui suit, on se place dans le cadre d'une distribution dipolaire (c'est-à-dire de charge totale nulle) .

Remarque : Si l'on sépare les charges du dipôle en charges positives et charges négatives, on pose (on ne traite, pour alléger, que le cas discret) $q = \sum_{q_i > 0} q_i$ et donc, puisque la

². car alors $\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} - \sum_i q_i \overrightarrow{O'A_i} = \sum_i q_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{O'A_i}) = \sum_i q_i \overrightarrow{OO'}$ = $(\sum_i q_i) \overrightarrow{OO'}$ = $\vec{0}$ puisque $\sum_i q_i = 0$.

charge totale est nulle $-q = \sum_{q_i < 0} q_i$. Appelons A et B les barycentres respectifs des charges négatives et positives, alors le moment dipolaire du dipôle peut se réécrire ainsi :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OA}_i = \sum_{q_i > 0} \vec{OA}_i + \sum_{q_i < 0} q_i \vec{OA}_i = q \vec{OB} - q \vec{OA}$$

qui est le moment dipolaire d'une distribution à deux charges $-q$ en A et q en B ; en poursuivant on arrive à $\vec{p} = q \vec{OB} - q \vec{OA} = q (\vec{OB} - \vec{OA}) = q \vec{AB}$. On peut donc remplacer une distribution dipolaire quelconque par la somme des charges positives concentrée en leur barycentre et la somme des charges négatives concentrée en leur barycentre et se ramener ainsi à la première approche traditionnelle du dipôle : un ensemble de deux charges ponctuelles³ opposées placées en deux points proches, bien qu'aucun dipôle réel ne soit ainsi constitué.

1.b Champ créé à grande distance par une distribution dipolaire.

La formule donnant le potentiel indique une symétrie de révolution autour de la direction du moment dipolaire, puisqu'en introduisant l'angle θ entre \vec{p} et \vec{OM} , on a, en notant $p = \|\vec{p}\|$:

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

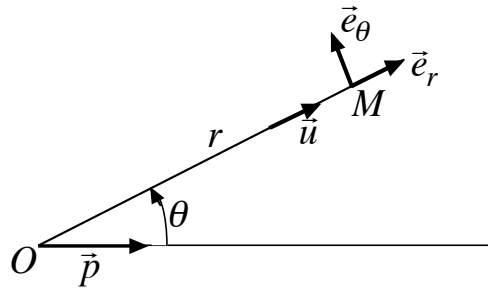


FIGURE 2 – Notations utilisées.

L'expression du champ sera donc simple en coordonnées sphériques où la direction de \vec{p} est prise comme axe Oz . Le point M est repéré par r et θ déjà définis et enfin φ angle entre le plan défini par \vec{p} et \vec{OM} et le plan xOz (Ox est arbitraire). La base locale est notée traditionnellement \vec{e}_r qui se confond avec notre \vec{u} , \vec{e}_θ qui lui est orthogonal dans le plan défini par \vec{p} et \vec{OM} et \vec{e}_φ qui leur est orthogonal. On a $\vec{E} = -\text{grad} V$ dont les composantes sur la base locale sont :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2 p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

3. C'est un dipôle de Moldu, dit-on à Pouldard.

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

Puisque $E_\varphi = 0$, on peut se contenter d'une figure (la 2 p. 7) dans un plan méridien.

On peut préférer à l'expression du champ qui en résulte, soit :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

une expression *intrinsèque*, c'est-à-dire ne faisant pas référence à un repère particulier. Dans l'expression qui précède, r ne pose pas de problème puisque c'est $\|\vec{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$ non plus. On peut remarquer que (cf figure) :

$$\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta$$

d'où

$$p \sin \theta \vec{e}_\theta = p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}$$

ce qui permet d'escamoter le $\sin \theta$ et enfin escamoter le $\cos \theta$ grâce à $\vec{p} \cdot \vec{u} = p \cos \theta$ (rappelons que $\vec{e}_r = \vec{u}$). Allons-y :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} [2p \cos \theta \vec{e}_r + (p \cos \theta \vec{e}_\theta - \vec{p})]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}) \vec{u} - \vec{p}]$$

1.c Surfaces équipotentielles et lignes de champ.

- Surfaces équipotentielles.

On a, en coordonnées sphériques (cf supra) :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}$$

qui indique une symétrie de révolution autour de l'axe portant le vecteur moment dipolaire \vec{p} ; l'intersection de la surface avec le plan méridien suffit donc à la définir. Il s'agit d'une courbe d'équation polaire :

$$r = \sqrt{\frac{p \cos \theta}{4 \pi \varepsilon_0 V}} = Cte \sqrt{\cos \theta}$$

Le tracé est de routine⁴, laissons faire un logiciel ad hoc pour différentes valeurs⁵ du potentiel V , positives ou négatives. On obtient la figure 3 p. 9 où il ne faut surtout pas oublier que, près du point O (là où se regroupent toutes les courbes), l'approximation n'est plus valable et le tracé non plus.

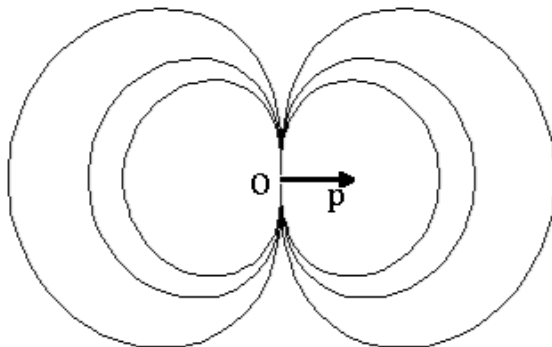


FIGURE 3 – Quelques équipotentielles.

• **Lignes de champ.**

La symétrie indique qu'une même ligne de champ est contenue dans un plan méridien. Par définition, une ligne de champ est parallèle en chacun de ses points au champ électrique. Un déplacement élémentaire $d\ell = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ (expression classique en coordonnées polaires) est parallèle au champ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos\theta \vec{e}_r + p \sin\theta \vec{e}_\theta)$ donc aussi à $2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta$, ce qui se traduit par :

$$\frac{dr}{2 \cos\theta} = \frac{r d\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

d'où par intégration :

$$\ln r = 2 \ln(\sin\theta) + Cte$$

$$r = Cte \sin^2\theta$$

Le même logiciel, mis à contribution, conduit, avec plusieurs valeurs pour la constante, à la figure 4 p. 10 où, là non plus, il ne faut surtout pas oublier que, près du point O (là où se regroupent toutes les courbes), l'approximation n'est plus valable et le tracé non plus.

4. Il faut se rafraîchir la mémoire sur le tracé de courbes en polaires.

5. si $V > 0$, il faut $\cos\theta > 0$ soit, à 2π près, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et si $V < 0$, il faut $\cos\theta < 0$ soit, à 2π près, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

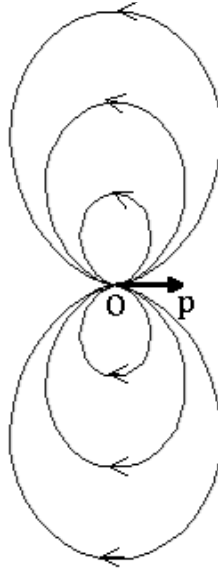


FIGURE 4 – Quelques lignes de champ.

1.d Distributions quadripolaires.

Certaines distributions⁶ de charges sont telles que $\sum_i q_i = 0$ et $\sum_i q_i \vec{a}_i = \vec{0}$; on appelle un tel édifice un *quadripôle*. En électrostatique, leur effet est en pratique négligeable mais en électromagnétisme, les distributions quadripolaires peuvent générer une onde électromagnétique (voir chapitre C-XI) et c'est pourquoi nous ne les passons pas sous silence ici.

Pour calculer une bonne approximation du potentiel créé, il faut alors poursuivre le développement limité, effectué ci-dessus, un cran plus loin. Reprenons donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{A}_i \vec{M}\|} &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(-2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \vec{a}_i + \frac{\vec{a}_i^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \vec{a}_i + \frac{\vec{a}_i^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \vec{a}_i + \frac{\vec{a}_i^2}{r^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

soit en ne conservant que les termes d'ordre 2 au plus :

$$\frac{1}{\|\vec{A}_i \vec{M}\|} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{u}}{r} \cdot \vec{a}_i - \frac{1}{2} \frac{\vec{a}_i^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{u} \cdot \vec{a}_i)^2}{r^2} + \dots \right]$$

6. C'est le cas, par symétrie, de molécules linéaires symétriques comme CO_2 (mais pas H_2O coudée) ou planes avec trois liaisons à 120° comme NO_3 (mais pas NH_3 non plane).

d'où par sommation, avec $\sum_i q_i = 0$ et $\sum_i q_i \vec{a}_i = \vec{0}$ et en introduisant artificiellement $\vec{u}^2 = 1$ pour donner une *allure* plus homogène :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3}{2} \sum_i q_i (\vec{u} \cdot \vec{a}_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{a}_i^2 \vec{u}^2 \right]$$

Après quelques calculs de routine, en notant x_i, y_i et z_i les composantes de \vec{a}_i et u_x, u_y et u_z celles de \vec{u} , on peut présenter le résultat comme une forme quadratique des composantes de \vec{u} notée matriciellement :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} {}^t(\vec{u})(Q)(\vec{u})$$

où $Q_{11} = \sum_i \frac{q_i}{2} (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2)$ et analogues et où, avec une matrice symétrisée, $Q_{12} = Q_{21} = \sum_i \frac{q_i}{2} (3x_i y_i)$ et analogues. En pratique, on sait qu'une forme quadratique a une matrice diagonale dans une base orthonormée bien choisie, en physique celle qui respecte les symétries du problème ; dans cette base, seuls Q_{11}, Q_{22} et Q_{33} sont non nuls.

Remarque 1 : notez l'analogie, quoiqu'imparfaite, avec la matrice d'inertie d'un solide (voir chapitre B-VIII).

Remarque 2 : notez que la trace de la matrice Q (c'est-à-dire $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}$) est nulle, ce qui est anecdotique.

2 Dipôle électrique « passif »

Il s'agit ici de considérer un dipôle subissant l'action d'autres charges par l'intermédiaire du champ qu'elles créent.

2.a Force exercée sur un dipôle par un champ.

Un dipôle est réputé tout petit. En bonne première approximation, on peut considérer que le champ \vec{E} (créé par les charges autres que celles qui constituent le dipôle) est uniforme dans la région restreinte occupée par le dipôle. Par addition⁷ des forces subies par les charges du dipôle, on a :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i \vec{E} = \left(\sum_i q_i \right) \vec{E} = 0 \cdot \vec{E} = \vec{0}$$

⁷. ou par intégration pour une distribution de charges, ce qui ne change pas la méthode de calcul, mais sa présentation.

car la charge totale $\sum_i q_i$ est nulle par définition.

Lorsqu'une approximation conduit un résultat nul, celui-ci n'est pas valable quantitativement (hormis ici le cas d'un champ uniforme, comme celui qui règne dans un condensateur plan) mais quantitativement : il faut comprendre que la force est très petite.

Détaillons sur l'une des composantes de la force, celle sur x par exemple, avec une approximation plus fine :

$$F_x = \sum_i q_i E_x(A_i)$$

Entre un point O « au beau milieu du dipôle » et un point A_i où se trouve la charge q_i la variation de E_x est assez faible pour qu'on puisse l'assimiler à une différentielle, soit $E_x(A_i) - E_x(O) = dE_x$; or une propriété du gradient est que $dE_x = \overrightarrow{\text{grad}} E_x \cdot \overrightarrow{d\ell}$ avec ici $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{OA_i}$ et le gradient calculé en O , d'où

$$E_x(A_i) - E_x(O) = dE_x = \overrightarrow{\text{grad}} E_x \cdot \overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x$$

Reportons dans l'expression de F_x , en tenant compte que $\sum_i q_i = 0$, on arrive à :

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_i q_i E_x(O) + \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x = \left(\sum_i q_i \right) E_x(O) + \left(\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x = \dots \\ &\dots = 0 E_x(O) + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned}$$

L'approche énergétique (cf infra) donne une approche possible qui, cerise sur le gâteau, donnera facilement l'effet de cette force ; patience !

2.b Moment dynamique exercé sur un dipôle par un champ.

La force subie est quasiment nulle, il en résulte que le moment dynamique est quasiment indépendant du point de calcul (voir chapitre B-II en mécanique) et l'on parle alors de couple. Son moment est calculé par addition des moments élémentaires calculés en un même point arbitraire nommé ici O . On a donc, avec, par définition $\overrightarrow{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$:

$$\overrightarrow{\Gamma} = \sum_i \mathcal{M}_i(O) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge q_i \overrightarrow{E} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{E} = \left(\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \right) \wedge \overrightarrow{E} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$$

Retenons :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$$

Ici le résultat est non nul et l'approximation commise (\overrightarrow{E} uniforme) donne donc un résultat acceptable.

Quel effet ce couple va-t-il avoir ? Dans la pratique un dipôle est une molécule pas ou peu déformable se comportant à peu près comme un solide et le couple le fera tourner dans le sens qui amène \vec{p} vers \vec{E} (voir la direction et le sens du produit vectoriel et le sens de rotation associé par la règle du tire-bouchon). Formellement, puisque $\|\vec{T}\| = \|\vec{p} \wedge \vec{E}\| = \|\vec{p}\| \|\vec{E}\| |\sin \theta|$ où θ est l'angle entre \vec{p} (qui tourne) et \vec{E} (fixe par hypothèse), on a le même type de moment que dans le mouvement du pendule ; les inévitables phénomènes dissipatifs vont aboutir à un équilibre où \vec{p} se sera aligné (en direction et sens) avec \vec{E} (soit $\theta = 0$).

2.c Energie d'interaction entre un dipôle et un champ.

Il suffit de se souvenir que l'énergie d'interaction d'une charge q en M et d'un champ \vec{E} dérivant du potentiel V est $\mathcal{E} = qV(M)$. Dès lors par sommation, on a, pour un dipôle :

$$\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i q_i V(A_i)$$

Entre un point O « au beau milieu du dipôle » et un point A_i où se trouve la charge q_i la variation de V est assez faible pour qu'on puisse l'assimiler à une différentielle (même démarche que plus haut), soit $V(A_i) - V(O) = dV$; or une propriété du gradient est que $dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{d\ell}$ avec ici $\vec{d\ell} = \overrightarrow{OA_i}$ et le gradient calculé en O (on notera $\overrightarrow{\text{grad}} V \Big|_O$) ; enfin $\vec{E}(O) = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Big|_O$ par définition du potentiel. Résumons :

$$V(A_i) - V(O) = dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{d\ell} = \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V \Big|_O = -\overrightarrow{OA_i} \cdot \vec{E}(O)$$

Reportons dans l'expression de l'énergie, en tenant compte que $\sum_i q_i = 0$, on arrive à :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_i q_i V(A_i) = \sum_i q_i \left(V(O) - \overrightarrow{OA_i} \cdot \vec{E}(O) \right) = \dots \\ &\dots = \left(\sum_i q_i \right) V(O) - \left(\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \right) \cdot \vec{E}(O) = 0 \cdot V(O) - \vec{p} \cdot \vec{E}(O) = -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Retenons :

$$\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

2.d Retour sur la force exercée sur un dipôle par un champ.

Imaginons que l'ensemble des charges qui constituent le dipôle est « gelé » de sorte que celui-ci se comporte comme un solide, susceptible de se déplacer en translation et rotation sans déformation (en particulier le module (la norme) p du moment dipolaire \vec{p} est constante).

On rappelle (voir chapitre B-VIII) que la puissance d'une action dont la résultante (force totale) est \vec{F} et le champ de moment est \vec{M} , appliquée à un solide soumis dont le centre de gravité G a une vitesse $\vec{v}(G)$ et dont le vecteur rotation est $\vec{\omega}$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(G) + \vec{M}(G) \cdot \vec{\omega}$$

Imaginons maintenant un déplacement élémentaire en translation sans rotation (cette, non seulement p mais aussi \vec{p} est constant), alors par définition de l'énergie potentielle, on a, en n'oubliant pas que, dans ce type de mouvement, tous les points d'un solide ont la même vitesse et le même déplacement :

$$d\mathcal{E} = -\delta W = -\mathcal{P} dt = -\vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Par comparaison avec $d\mathcal{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E} \cdot d\vec{\ell}$, on en déduit, en rappelant les conditions de la dérivation :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E} \Big|_{\vec{p}=\overrightarrow{Cte}}$$

Voyons ce que cela donne pour l'une des composantes de \vec{F} (les autres se traitent de la même façon), par exemple sur x :

$$F_x = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \Big|_{\vec{p}=\overrightarrow{Cte}} = \frac{\partial}{\partial x} (p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) \Big|_{(p_x, p_y, p_z) = (Cte)}$$

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

où l'on notera⁸ que la dérivation est par rapport à x pour les trois termes.

On retrouve pas la même expression que dans le résultat obtenu plus haut, au paragraphe 2.a p. 11. Les deux expressions de F_x diffèrent de :

$$p_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - p_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

qui n'est autre que la composante sur Ox de $\vec{p} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$, or en régime stationnaire, qui est le cadre de cette étude, on sait que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$. Tout va bien, donc.

Remarque 1 : si l'on imagine une rotation sans translation autour d'un axe Gz perpendiculaire à \vec{p} et \vec{E} dans le sens de $\vec{E} \wedge \vec{p}$, la même méthode conduit à :

$$d\mathcal{E} = -\delta W = -\mathcal{P} dt = -\mathcal{M}_z \omega_z dt = -\mathcal{M}_z d\theta$$

8. Par expérience, on commet souvent des fautes d'inattention à ce sujet.

où θ est l'angle entre \vec{E} (fixe) et \vec{p} (en rotation); d'où $\mathcal{M}_z = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}$. Or dans ces conditions, $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}\| \cos \theta = -p E \cos \theta$, d'où :

$$\mathcal{M}_z = p E \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} = -p E \sin \theta$$

ce qui est une formulation équivalente à $\vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E}$; là aussi, une fois maîtrisée, la méthode est plus rapide.

Remarque 2 : Dès qu'une action dérive d'une énergie potentielle, elle fait évoluer le système vers un minimum d'énergie, ici de $-p E \cos \theta$. Dans l'hypothèse d'un moment p pas ou peu variable (c'est toujours le cas en fait), d'un point de vue orientation à position fixe (donc avec E fixe) le minimum est obtenu pour $\theta = 0$ soit le dipôle aligné avec le champ, ce que l'on a établi plus haut. Pour un dipôle orienté parallèlement au champ, l'énergie est $-p E$ et dans l'hypothèse d'un déplacement de dipôle orienté, le minimum est obtenu pour E maximum. Résumons : dans un champ créé par d'autres charges, le dipôle s'aligne avec le champ puis se dirige vers les zones où le champ est fort.

3 Autres aspects du dipôle électrique.

3.a Dipôle déformable.

Lorsqu'un dipôle est placé dans un champ, uniforme en bonne approximation, dans l'espace qu'il occupe, les charges positives sont attirées dans le sens du champ et les charges négatives dans le sens opposé, il en résulte des déplacements dans ces mêmes sens qui aboutissent, si le champ n'est pas trop fort, à un nouveau équilibre interne lorsque les forces intérieures compensent les forces extérieures. Au cours de ce déplacement le vecteur moment dipolaire varie d'une valeur initiale $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$ à une valeur $\vec{p}' = \sum_i q_i \overrightarrow{OA'_i}$ où les $\overrightarrow{A_i A'_i}$ sont les déplacements des charges. Il en résulte que la variation du moment dipolaire est :

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{A_i A'_i}$$

Au vu des remarques précédentes les $q_i \overrightarrow{A_i A'_i}$ sont dans le sens du champ, que la charge soit positive ou négative et donc la variation du moment aussi. Cette variation reçoit le nom de *moment dipolaire induit*, il se superpose (s'ajoute) au moment préexistant en champ nul, appelé dans ce contexte *moment dipolaire permanent* (éventuellement nul pour une distribution quadripolaire).

Un molécule qui acquiert un moment induit sous l'action d'un champ est dite *polarisable* (en fait, toutes le sont) et le phénomène que l'on vient de décrire s'appelle la *polarisation électrique*. Un milieu contenant des molécules électriquement polarisables est un *diélectrique* (en fait, tous le sont).

Le lien entre champ subi et moment induit relève de plusieurs mécanismes qui seront étudiés dans le chapitre C-XII consacré aux propriétés électriques de la matière, c'est-à-dire aux diélectriques.

La logique de mon cours autorise des copiés-collés entre chapitres ; ici ce n'est pas pertinent, car ça alourdirait trop ce chapitre. Admettons simplement ce résultat : en général, il y a proportionnalité entre le champ et le dipôle induit, noté plus haut $\Delta \vec{p}$, et plus couramment \vec{p}_i . On note traditionnellement $\vec{p}_i = \alpha \vec{E}$ où α s'appelle la *polarisabilité électrique* de la molécule. Je passe volontairement sous silence les cas plus exotiques.

Remarque : si le champ est trop intense, les déformations sont si grandes qu'elles conduisent à la rupture, c'est-à-dire l'ionisation de la molécule.

3.b Forces de Van der Waals

Quand on considère l'interaction entre deux dipôles, on peut étudier l'action subie par l'un (en tant que dipôle passif) de la part du champ créé par l'autre (en tant que dipôle actif). L'application des formules établies plus haut aboutit aisément à des résultats mais dans la pratique, ce serait calamiteux de s'en satisfaire béatement : en effet, l'agitation thermique vient perturber ce bel édifice, essentiellement en faisant tourner les dipôles sur eux mêmes, ce qui change du tout au tout l'énergie d'interaction. Un traitement thermodynamique s'impose ; il est réalisé dans le chapitre E-VI consacré, entre autres, aux gaz de Van der Waals. Là encore le copié-collé alourdirait trop ce chapitre.

4 Dipôle magnétique « actif ».

4.a Potentiel-vecteur créé à grande distance par une distribution de courants.

- Développement limité.

Soit un ensemble de courants répartis en volume (densité de courant au point P notée $\vec{j}(P)$ ou \vec{j}_P) et contenus dans un volume \mathcal{V} borné de l'espace dont ils ne sortent pas. On se propose de calculer le potentiel-vecteur en un point M dont la distance à \mathcal{V} est grande devant la taille de \mathcal{V} . Ce modèle est plus complexe à gérer que la traditionnelle boucle de courant, mais il est beaucoup plus proche de la réalité.

Remarque : Dans la pratique, un dipôle est censé représenter la répartition des courants électroniques dans un édifice atomique ou moléculaire.

En régime permanent car le dipôle est réputé fixe, le potentiel-vecteur recherché est donné rigoureusement par la formule :

$$\vec{A}(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P) d\mathcal{V}}{4\pi \|\vec{PM}\|}$$

Nous allons remplacer cette expression par une approximation plus pratique, par la même méthode que pour le dipôle électrique.

Soit O un point choisi arbitrairement au beau milieu de la région qui contient les courants. On note $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ ainsi que $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ comme sur la figure 1 p. 5 (où P remplace A_i).

On reprend sans le redémontrer le résultat établi plus haut :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{u}}{r} \cdot \vec{r}_P + \dots \right)$$

d'où l'on tire le résultat suivant où \vec{u} et r sont relatifs au point M où l'on calcule le potentiel-vecteur et où les intégrations portent sur les coordonnées du point P du domaine où circulent les courants :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P d\mathcal{V} + \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) d\mathcal{V}$$

• Etude du premier terme.

Le premier terme est nul mais ce n'est pas aisé⁹ à montrer mathématiquement de façon simple. Le mieux est de traiter composante par composante. Selon Ox , la composante de \vec{j}_P est, en notant \vec{j} pour \vec{j}_P et x pour x_P :

$$j_x = \vec{e}_x \cdot \vec{j} = \overrightarrow{\text{grad}} x \cdot \vec{j} = \overrightarrow{\text{grad}} x \cdot \vec{j} + x \text{div} \vec{j} = \text{div}(x \vec{j})$$

où l'on a utilisé différentes astuces :

- le fait que $\overrightarrow{\text{grad}} x = \vec{e}_x$ (il suffit d'effectuer le calcul)
- le fait qu'en régime permanent ou quasi-permanent, on sait que $\text{div} \vec{j} = 0$
- la formule d'analyse vectorielle $\text{div}(f \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V} + f \text{div} \vec{V}$

Si l'on appelle Σ la surface limitant \mathcal{V} , au niveau de laquelle, par construction de \mathcal{V} qui englobe les courants sans les laisser sortir, les courants sont nuls ou à la rigueur tangentiels, on a, avec le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI :

$$\iiint_{\mathcal{V}} j_x d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(x \vec{j}) d\mathcal{V} = \oint_{\Sigma} x \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Il en est de même pour les autres composantes et finalement, on a $\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P d\mathcal{V} = \vec{0}$

On préférerait quelque chose de plus physique. On peut imaginer que les courants s'organisent en tubes de courant fermés, assimiler un de ces tubes parcouru par une intensité

⁹. L'étude du second l'est encore moins. Un grand merci à David Augier pour sa précieuse collaboration à ce calcul du potentiel-vecteur.

I , uniforme en régime permanent ou quasi-permanent, à un courant filiforme en remplaçant l'élément de courant $\vec{j}_P d\mathcal{V}$ par $I d\vec{l}$. La contribution du tube est alors $\oint I d\vec{l} = I \oint d\vec{l} = \vec{0}$ puisque le circuit est fermé. Par sommation sur tous les tubes, on obtient bien un résultat nul.

• **Etude du second terme.**

Intéressons nous au terme $\vec{j}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) = \vec{j}_P (\vec{r}_P \cdot \vec{u})$ dont la structure ne permet pas de « sortir » le terme constant \vec{u} de l'intégrale. L'astuce consiste à partir de la formule du double produit vectoriel¹⁰. On a donc, en réorganisant l'ordre des termes :

$$\vec{j}_P (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) - \vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{j}_P) = \vec{u} \wedge (\vec{j}_P \wedge \vec{r}_P)$$

Une seconde astuce, beaucoup moins immédiate consiste à mettre les composantes sur les trois axes du premier membre de ce résultat, en changeant la différence en somme (notée \vec{S}), sous forme de la divergence d'une fonction dont le flux est nul sur Σ comme plus haut. En notant \vec{j} pour \vec{j}_P et x pour x_P , la composante S_x sur x de $\vec{S} = \vec{j}_P (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + \vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{j}_P)$ est :

$$\begin{aligned} S_x &= j_x (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + x (\vec{u} \cdot \vec{j}) = (\vec{e}_x \cdot \vec{j}) (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + x (\vec{u} \cdot \vec{j}) = \dots \\ &\dots = (\overrightarrow{\text{grad}} x \cdot \vec{j}) (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + \vec{u} \cdot (x \vec{j}) = \dots \\ &\dots = (\overrightarrow{\text{grad}} x \cdot \vec{j} + x \text{div} \vec{j}) (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + \text{grad}(\vec{r}_P \cdot \vec{u}) (x \vec{j}) = \dots \\ &\dots = \text{div}(x \vec{j}) (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + \text{grad}(\vec{r}_P \cdot \vec{u}) (x \vec{j}) = \text{div} \left[(\vec{r}_P \cdot \vec{u}) (x \vec{j}) \right] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé différentes astuces :

- une nouvelle fois le fait que $\overrightarrow{\text{grad}} x = \vec{e}_x$
- une nouvelle fois le fait qu'en régime permanent ou quasi-permanent, on sait que $\text{div} \vec{j} = 0$
- une nouvelle fois la formule d'analyse vectorielle $\text{div}(f \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V} + f \text{div} \vec{V}$
- le fait que $\text{grad}(\vec{r}_P \cdot \vec{u}) = \vec{u}$ (il suffit d'effectuer le calcul, sans oublier que vis-à-vis des dérivations par rapport aux coordonnées de P , \vec{u} , lié à M , point où l'on calcule le potentiel-vecteur, est constant)
- une dernière fois la formule $\text{div}(f \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V} + f \text{div} \vec{V}$ au « niveau de jeu supérieur »

La projection sur x de l'intégrale de \vec{S} sur \mathcal{V} est :

$$\iiint_{\mathcal{V}} S_x d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \left[(\vec{r}_P \cdot \vec{u}) (x \vec{j}) \right] d\mathcal{V} = \oint_{\Sigma} (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) (x \vec{j}) d\vec{\Sigma} = 0$$

10. Une des formulations est $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$ utilisée ici avec $\vec{a} = \vec{u}$, $\vec{b} = \vec{j}_P$ et $\vec{c} = \vec{r}_P$

et de même pour les autres projections, d'où $\iiint_{\mathcal{V}} \vec{S} \, d\mathcal{V} = \vec{0}$, parce que les courants sont nuls ou à la rigueur tangentiels sur Σ (cf supra).

• **Synthèse.**

Le premier terme du développement du potentiel-vecteur est nul, on a donc, au premier ordre non nul :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) \, d\mathcal{V}$$

On a les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{j}_P (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) - \vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{j}_P) &= \vec{u} \wedge (\vec{j}_P \wedge \vec{r}_P) \\ \vec{j}_P (\vec{r}_P \cdot \vec{u}) + \vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{j}_P) &= \vec{S} \end{aligned}$$

où l'intégrale de \vec{S} est nulle. Par demi-somme puis intégration on en déduit :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) \, d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{u} \wedge (\vec{j}_P \wedge \vec{r}_P) \, d\mathcal{V} = \vec{u} \wedge \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} (\vec{j}_P \wedge \vec{r}_P) \, d\mathcal{V}$$

On appelle *moment dipolaire magnétique* de la distribution de courants et l'on note habituellement \vec{m} la quantité (attention à la permutation de termes du produit vectoriel) :

$$\vec{m} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} (\vec{r}_P \wedge \vec{j}_P) \, d\mathcal{V}$$

d'où

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) \, d\mathcal{V} = -\vec{u} \wedge \vec{m} = \vec{m} \wedge \vec{u}$$

et

$$\boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2}}$$

résultat que l'on a encadré parce qu'on a beaucoup souffert pour l'obtenir.

• **Le moment dipolaire est intrinsèque.**

Il nous reste un point à régler : la définition du moment dipolaire dépend d'un point origine arbitraire O cachée par la notation \vec{r}_P . Au lieu d'écrire :

$$\vec{m} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} (\vec{r}_P \wedge \vec{j}_P) \, d\mathcal{V}$$

il eût été prudent de noter :

$$\vec{m}(O) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} (\vec{OP} \wedge \vec{j}(P)) d\mathcal{V}$$

Nous allons montrer que \vec{m} est indépendant du choix de O , donc qu'il ne dépend que de la distribution. Pour cela, il suffit de montrer qu'avec deux origines O et O' quelconques $\vec{m}(O) - \vec{m}(O') = \vec{0}$. En exploitant un résultat intermédiaire établi un peu plus haut, à savoir $\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_P d\mathcal{V} = \vec{0}$, c'est aisé :

$$\begin{aligned} \vec{m}(O) - \vec{m}(O') &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} [(\vec{OP} - \vec{O'P}) \wedge \vec{j}(P)] d\mathcal{V} = \dots \\ &\dots = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} (\vec{OO'} \wedge \vec{j}(P)) d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \vec{OO'} \wedge \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}(P) d\mathcal{V} = \vec{0} \end{aligned}$$

Désormais le dipôle sera décrit par la seule donnée de son moment dipolaire qui s'avère ne dépendre que de la répartition des courants et est donc une grandeur intrinsèque.

4.b La boucle de courant, vue comme un dipôle.

Un spire filiforme, plane ou non, de section négligeable, est un cas particulier. On a vu dans le chapitre sur le magnétisme que l'élément de courant $\vec{j} d\mathcal{V}$ peut être réécrit sous la forme $I \vec{dl}$ sans modification de la réalité physique sous-jacente ; parallèlement l'intégrale triple de volume se traduit par une intégrale simple curviligne sur une courbe fermée. Sans qu'il soit besoin de redémontrer quoi que ce soit, l'on peut affirmer que dans ce contexte, le moment dipolaire magnétique de la spire est défini par :

$$\vec{m} = I \oint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \vec{r}_P \wedge \vec{dl}$$

et que l'on a toujours :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Une spire de courant, quelles que soient sa forme et même sa taille, pourvu qu'on mesure le champ loin d'elle (à une distance grande devant sa taille), est aussi un dipôle magnétique.

• Autre présentation du moment dipolaire d'une spire.

Un élément de circuit \vec{dl} est un segment $\vec{PP'}$ élémentaire et \vec{r}_P n'est autre que \vec{OP} . On sait alors que $\frac{1}{2} \vec{r}_P \wedge \vec{dl} = \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge \vec{PP'}$ est le vecteur surface du triangle OPP' . Géométriquement, la juxtaposition de tous les triangles OPP' reconstitue le cône de sommet

O et de base la spire et la somme des $\frac{1}{2} \vec{r}_P \wedge d\vec{l}$ n'est donc autre que le vecteur surface de ce cône. Si l'on se souvient que toutes les surfaces¹¹ de même contour (ici la spire) ont même vecteur surface, définissant ipso facto le vecteur surface \vec{S} de la spire, on a donc tout simplement :

$$\boxed{\vec{m} = I \vec{S}}$$

Pour terminer, un petit dessin sur un ticket de métro usagé suffit à montrer qu'ainsi défini, le vecteur surface est conforme à la règle du tire-bouchon appliquée au sens du courant dans la spire.

• **Indications sur les calculs à partir de la spire.**

Si l'on décide dans un cours de première approche de prendre la spire comme modèle de dipôle, les calculs deviennent beaucoup plus aisés. Je suis parti d'un modèle plus réaliste car il s'agit ici d'un cours d'approfondissement. Je donne ci-après quelques indications pour ceux qui en auraient besoin.

La clef est qu'un élément de circuit $d\vec{l}$ est un segment $\overrightarrow{PP'}$ élémentaire, d'où :

$$d\vec{l} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = d\overrightarrow{OP} = d\vec{r}_P$$

Le développement du potentiel vecteur aboutit par le même type de calcul à :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint d\vec{r}_P + \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)$$

Le premier terme est nul car :

$$\oint d\vec{r}_P = [\vec{r}_P]_{\text{début}}^{\text{fin}} = 0$$

car le circuit est fermé et la fin en est aussi le début.

Pour le second terme, la formule du double produit vectoriel donne ici :

$$\vec{u} \wedge (\vec{r}_P \wedge d\vec{r}_P) = \vec{r}_P (d\vec{r}_P \cdot \vec{u}) - d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)$$

soit en introduisant $d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r}_P \wedge d\vec{r}_P$ (cf supra) puis en changeant de signe par permutation des facteurs du produit vectoriel :

$$2 \vec{u} \wedge d\vec{S} = \vec{r}_P (d\vec{r}_P \cdot \vec{u}) - d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)$$

11. Evidemment, si la spire est plane, on choisira la surface dans son plan, l'intégration vectorielle se résumera alors à une intégration scalaire.

$$2 d\vec{S} \wedge \vec{u} = d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) - \vec{r}_P (d\vec{r}_P \cdot \vec{u})$$

Par ailleurs, la dérivation d'un produit de trois termes dont un constant (\vec{u}) puis une réécriture en permutant les deux facteurs d'un produit scalaire donne :

$$d[\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)] = d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) + \vec{r}_P (\vec{u} \cdot d\vec{r}_P)$$

$$d[\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)] = d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) + \vec{r}_P (d\vec{r}_P \cdot \vec{u})$$

On effectue la demi-somme des résultats des deux approches puis on intègre sur le circuit fermé :

$$\begin{aligned} \oint d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) &= \left(\oint d\vec{S} \right) \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} \oint d[\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)] = \dots \\ &\dots = \vec{S} \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} [\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P)]_{\text{début}}^{\text{fin}} = \vec{S} \wedge \vec{u} \end{aligned}$$

et en multipliant par le coefficient mis de côté :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{S} \wedge \vec{u} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

C'est plus simple et plus rapide, bien sûr, mais avec un modèle peu réaliste.

4.c Champ magnétique créé à grande distance par une distribution de courants.

• Calcul direct.

Le champ magnétique se calcule par $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, les dérivations portant sur les coordonnées de M point où l'on calcule le champ. En coordonnées sphériques, d'origine le point O choisi au beau milieu du dipôle et en prenant Oz parallèle à \vec{m} , dont on note m le module (la norme), on a, en remarquant que \vec{u} n'est autre que le vecteur unitaire radial \vec{e}_r et avec les notations classiques :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta \vec{e}_\varphi}{r^2}$$

donc de composantes $A_r = 0$, $A_\theta = 0$ et $A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2}$.

Le formulaire sur le rotationnel en coordonnées sphériques donne ici :

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) = \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

ce qui est formellement identique au champ créé par un dipôle électrique en y remplaçant $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $\frac{\mu_0}{4\pi}$ et p par m .

• **Les raisons profondes de l'analogie.**

Cette identité formelle semble ici le fruit d'un hasard de calcul ; nous nous proposons maintenant de montrer qu'au vu de l'analyse vectorielle c'est une nécessité¹².

Nous utiliserons les remarques suivantes :

- les expressions du champ et du potentiel électriques créés par une charge ponctuelle permettent d'affirmer que $\overrightarrow{\frac{u}{r^2}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$
- la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{V}$ qui devient, si \overrightarrow{V} est un vecteur constant comme \overrightarrow{m} , la formule simplifiée $\overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{V}$
- la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{V} - \Delta \overrightarrow{V}$
- la formule d'analyse vectorielle $\text{div}(f \overrightarrow{V}) = f \text{div} \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{V}$ qui devient, si \overrightarrow{V} est un vecteur constant comme \overrightarrow{m} , la formule simplifiée $\text{div}(f \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{V}$
- la formule d'analyse vectorielle, valable dans le cas où \overrightarrow{V} est un vecteur constant, $\Delta(f \overrightarrow{V}) = \Delta f \overrightarrow{V}$
- l'équation de LAPLACE (voir le chapitre sur l'électrostatique) appliquée au potentiel électrique créé par une charge ponctuelle permet d'affirmer que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, sauf en $r = 0$, ce qui n'est pas le cas à grande distance

On peut donc dire que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \overrightarrow{m} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{r} \overrightarrow{m} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\frac{1}{r} \overrightarrow{m} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \overrightarrow{m} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \overrightarrow{m} \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \overrightarrow{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{u}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

L'analogie entre $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{u}}{r^2} \right)$ et $\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{u}}{r^2} \right)$ est dès lors flagrante et l'on peut en transcrire point par point toutes les conséquences.

L'expression intrinsèque du champ magnétique créé par le dipôle sera donc :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{u}) \overrightarrow{u} - \overrightarrow{m}]$$

L'équation polaire, dans un plan méridien, des lignes de champ sera donc $r = Cte \sin^2 \theta$

12. Si vous n'avez pas encore lu « Le hasard et la nécessité » de Jacques MONOD, il n'est pas encore trop tard.

5 Dipôle magnétique « passif ».

Il s'agit ici de considérer un dipôle subissant l'action d'autres courants par l'intermédiaire du champ qu'ils créent.

5.a Force exercée sur un dipôle par un champ.

Un dipôle est réputé tout petit. En bonne première approximation, on peut considérer que le champ \vec{B} (créé par les courants autres que ceux qui constituent le dipôle) est uniforme dans la région restreinte occupée par le dipôle. Il suffit de sommer les forces de LAPLACE sur les différents éléments de courant, soit, selon que l'on préfère le modèle volumique ou le modèle de la spire :

$$\vec{F} = \iiint \vec{j}_P dV \wedge \vec{B} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = \oint I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F} = \left(\iiint \vec{j}_P dV \right) \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = I \left(\oint \vec{dl} \right) \wedge \vec{B}$$

car $\iiint \vec{j}_P dV$ et $\oint dl$ sont nuls (cf supra). Comme pour le dipôle électrique, cela signifie que la force est petite et qu'il faut revenir sur l'hypothèse du champ uniforme ou trouver une autre approche, énergétique par exemple (cf infra) si l'on veut un résultat plus fin.

5.b Moment dynamique exercé sur un dipôle par un champ.

La force subie est quasiment nulle, il en résulte que le moment dynamique est quasiment indépendant du point de calcul (cf chapitre B-II) et l'on parle alors de couple. Son moment est calculé par addition des moments élémentaires calculés en un même point arbitraire, par exemple le point O qui a servi au calcul du moment dipolaire, d'où, en notant encore $\vec{r}_P = \vec{OP}$:

$$\vec{\Gamma} = \iiint \vec{r}_P \wedge \left(\vec{j}_P dV \wedge \vec{B} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\Gamma} = \oint \vec{r}_P \wedge \left(I \vec{dl} \wedge \vec{B} \right)$$

En utilisant la formule du double produit vectoriel, on a, selon le contexte, l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$\vec{\Gamma} = \iiint \vec{j}_P (\vec{B} \cdot \vec{r}_P) dV - \vec{B} \cdot \iiint \vec{r}_P \cdot \vec{j}_P dV$$

ou, en rappelant que $\vec{dl} = d\vec{r}_P$

$$\vec{I} = \oint I d\vec{r}_P (\vec{B} \cdot \vec{r}_P) - I \vec{B} \cdot \oint \vec{r}_P \cdot d\vec{r}_P$$

De la même façon qu'avec \vec{u} indépendant du point P , on avait $\iiint \vec{j}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) = \vec{m} \wedge \vec{u}$ et $\oint I d\vec{r}_P (\vec{u} \cdot \vec{r}_P) = \vec{m} \wedge \vec{u}$, le premier terme des deux expressions est $\vec{m} \wedge \vec{B}$. Le second terme est nul, dans le cas filiforme c'est simple :

$$\oint \vec{r}_P \cdot d\vec{r}_P = \left[\frac{\vec{r}_P^2}{2} \right]_{\text{début}}^{\text{fin}} = 0$$

et dans le cas volumique, on met ce terme sous forme d'une divergence d'un vecteur nul en dehors du dipôle. On ne fait pas ici le calcul intégralement du même type que ceux déjà effectués, on se contente de donner quelques jalons :

$$\vec{r}_P \cdot \vec{j}_P = x j_x + y j_y + z j_z$$

$$x j_x = \overrightarrow{\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot \vec{j} = \overrightarrow{\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot \vec{j} + \frac{x^2}{2} \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \left(\frac{x^2}{2} \vec{j} \right)$$

etc.

On arrive donc à un résultat analogue à celui d'un dipôle électrique dans un champ électrique :

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{I} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

dont l'effet est d'aligner par rotation le dipôle sur le champ.

5.c Energie d'interaction entre un dipôle et un champ.

Trouver l'expression d'une énergie potentielle, c'est montrer qu'un travail élémentaire est la différentielle d'une fonction de la position.

On a vu dans le chapitre sur la magnétostatique que le travail des forces de LAPLACE est dans le cas général $\delta W = I \delta \varphi_{\text{coupé}}$ où $\delta \varphi_{\text{coupé}}$, de par sa définition, est certes un infiniment petit mais pas une variation élémentaire d'une grandeur fonction de la position. Si le champ est stationnaire, alors, ce travail a une autre expression, $\delta W = I d\Phi$, où $d\Phi$ est bien la variation du flux magnétique à travers le circuit, mais $I d\Phi$ n'est pas en général une différentielle. Si le champ et l'intensité sont stationnaires, alors $\delta W = d(I\Phi)$ et $U = -I\Phi$ est une énergie potentielle mécanique. N'exultons pas pour autant car dans ce contexte, les phénomènes d'induction ont des effets énergétiques importants. Bref, pour des circuits filiformes, en particulier une boucle de courant, ce n'est que dans le cadre du chapitre

C-VII sur l'induction que l'on pourra mener à bien une étude énergétique rigoureuse. Ce sera fait.

Pour une répartition volumique de courant, on peut arriver à mener à bien les calculs si cette répartition est celle d'un *dipôle rigide*, c'est à dire une répartition qui se comporte comme un solide, c'est-à-dire encore une répartition stationnaire dans un référentiel mobile. C'est le cas en très bonne approximation.

Par intégration des puissances élémentaires (ici le passage par la puissance plutôt que le travail est plus aisé), on obtient :

$$\mathcal{P} = \iiint (\vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_P$$

Puisque le dipôle se comporte comme un solide, les différentes vitesses sont liées ; du reste, si ce n'était pas le cas, aucun espoir d'en déduire quoi que ce soit. On reporte donc $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$ où O est le point précédemment choisi comme origine et $\vec{\omega}$ le vecteur rotation. L'intégrale se scinde en somme de deux intégrales.

La première est :

$$\iiint (\vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_O = \vec{v}_O \cdot \iiint \vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B} = \vec{v}_O \cdot \vec{F} = 0$$

car on a reconnu l'expression de la force calculée plus haut.

La puissance recherchée est donc égale à la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iiint (\vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) = \iiint (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) \cdot (\vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B}) = \dots \\ \dots &= \iiint \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_P \wedge (\vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B})] = \vec{\omega} \cdot \iiint \vec{r}_P \wedge (\vec{j}_P d\mathcal{V} \wedge \vec{B}) = \vec{\omega} \cdot \vec{\Gamma} = \vec{\omega} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

car on a reconnu l'expression du couple calculée plus haut.

Bien sûr, on aurait pu retrouver ce résultat sans calcul car on sait que la puissance exercée sur un solide par un couple est $\vec{\omega} \cdot \vec{\Gamma}$, mais c'était intéressant ici d'aller y voir de plus près. Reste à mettre le résultat sous la forme de la dérivée temporelle d'une énergie potentielle.

Il suffit de se souvenir que la dérivée temporelle d'un vecteur lié à un solide, ici \vec{m} , est $\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{m}$, donc dans l'hypothèse d'un champ magnétique stationnaire :

$$\mathcal{P} = \vec{\omega} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{m}) = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = -\frac{d}{dt} (-\vec{m} \cdot \vec{B})$$

L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ magnétique *stationnaire* est donc :

$$\boxed{\mathcal{E} = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

Comme cette formule est formellement la même que $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ pour un dipôle électrique, on en tirera les mêmes conséquences, en particulier l'attraction vers les zones de champ fort et l'expression de la force dans un champ inhomogène est :

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + m_z \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

et analogues pour F_y et F_z .

Ô mon lecteur, tu émetts un murmure de protestation car la formule de l'énergie nécessite un champ stationnaire. C'est vrai mais ça ne pose aucun problème. En effet, la force à un instant donné ne dépend que de cet instant, parfois du passé mais jamais de l'avenir, causalité oblige. Donc si l'on change, par la pensée, d'avenir, on ne change rien à la valeur instantanée de la force ; il suffit donc d'imaginer un avenir où \vec{B} est stationnaire et le tour est joué !

6 Dipôle déformable.

Comme pour un dipôle électrique, l'action d'un champ sur un dipôle, outre les effets d'orientation et d'attraction vers les champs forts, provoque des modifications internes dans la répartition des courants, toutefois extrêmement faibles sauf exceptions dans le cas des dipôles magnétiques. La valeur du moment dipolaire magnétique varie donc d'une grandeur vectorielle, appelée *moment induit*.

Un molécule qui acquiert un moment induit sous l'action d'un champ est dite *polarisable* (en fait, toutes le sont) et le phénomène que l'on vient de décrire s'appelle la *polarisation magnétique*. Un milieu contenant des molécules magnétiquement polarisables est un *milieu magnétique* (en fait, tous le sont).

Le lien entre champ subi et moment induit relève de plusieurs mécanismes qui seront étudiés dans le chapitre C-XII consacré aux propriétés magnétiques de la matière, c'est-à-dire aux milieux magnétiques.