

Chapitre C-VII

Induction magnétique.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Les applications technologiques de l'induction magnétique sont nombreuses : générateurs et moteurs électriques, transformateurs, circuits électriques oscillants pour l'émission et la réception d'ondes, four à induction, ralentisseurs à induction.

Après avoir rappelé la notion de champ électromoteur, on établit ici les lois de l'induction dans différents contextes, circuit fixe dans un champ variable, circuit mobile dans un champ stationnaire, cas général.

On montre que flux et intensités sont liés par une relation matricielle dont on étudie les propriétés, ce qui définit les coefficients d'auto-induction et de mutuelle induction. On met en œuvre ce formalisme dans l'étude du transformateur.

On calcule ensuite l'énergie magnétique d'un ensemble de circuits électriques et on montre l'équivalence entre plusieurs points de vue et formules. On en déduit une façon de calculer les forces d'interaction qui offre une alternative au calcul direct des forces de Laplace.

On étudie enfin sur deux exemples la façon de gérer les couplages électro-mécaniques qui apparaissent en présence d'un champ magnétique.

Table des matières

C-VII Induction magnétique.	1
1 Lois de Faraday.	5
1.a Rappels.	5
1.b Circuit fixe dans un champ variable.	8
1.c Circuit mobile dans un champ permanent.	9
1.d Synthèse des deux situations.	16
1.e Circuit mobile dans champ variable.	17
1.f Courants de Foucault.	18
2 Propriétés des flux magnétiques.	20
2.a Deux expressions équivalentes du flux.	20
2.b Circuit unique.	20
2.c Deux circuits en interaction...ou plus.	22
2.d Le flux propre est-il négligeable?	24
2.e Circuits couplés. Transformateurs.	25
3 Aspects énergétiques.	28
3.a Approche matricielle.	28
3.b Localisation de l'énergie.	29
3.c Application aux lignes coaxiales.	31
3.d Application au calcul des interactions.	33
3.e Cas des courants volumiques en régime permanent.	36
4 Couplages électro-mécaniques.	37
4.a La nature du couplage.	37

4.b Le haut-parleur électrodynamique.	38
4.c Un moteur à champ tournant.	40

1 Lois de Faraday.

1.a Rappels.

• Propriétés du champ magnétique.

Nous avons besoin dans ce chapitre de connaître quelques propriétés du champ magnétiques qui seront développées dans le chapitre C-VIII sur les équations de MAXWELL ; nous nous contenterons de les admettre ici.

Le champ magnétique est à flux conservatif, c'est-à-dire, entre autres, que deux surfaces ouvertes limitées par le même contour orienté et elles-mêmes orientées par la règle du tire-bouchon sont traversées par le même flux magnétique, ce qui permet de définir le flux à travers le contour sans avoir à préciser le choix de la surface qui s'y appuie.

Il en résulte que le champ magnétique peut-être présenté comme le rotationnel d'un *potentiel vectoriel magnétique*, traditionnellement appelé *potentiel-vecteur* et noté \vec{A} , soit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

En régime non permanent, le champ électrique \vec{E} est lié au potentiel scalaire électrique V et au potentiel vectoriel magnétique \vec{A} par $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Le couple des potentiels V et \vec{A} est une construction intellectuelle de niveau supérieur à celui des champs électrique et magnétique, les premiers décrivant en quelque sorte les seconds. Pour un couple de champs donné, il existe une infinité de couples de potentiels qui les décrivent ; on choisit bien sûr l'un des plus pratiques mais c'est purement arbitraire. Se choisir un couple de potentiels se traduit par l'expression : se choisir une *jauge*. Si V_0 et \vec{A}_0 est un couple de potentiels possible pour un couple de champs donné, tous les autres couples de potentiel qui les décrivent sont de la forme $V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$ et $\vec{A} = \vec{A}_0 + \text{grad } \phi$ où ϕ est un champ scalaire arbitraire.

• Loi d'Ohm locale.

Dans un conducteur métallique, on sait¹ que la densité de courant \vec{j} est $\vec{j} = -n e \vec{v}$ pour n électrons libres de charge $-e$ par unité de volume de vitesse \vec{v} (les ions sont immobiles).

La vitesse des électrons vérifie, en régime permanent :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \lambda \vec{v}$$

où le dernier terme modélise la dissipation d'énergie par les chocs avec les ions fixes² et

1. Voir chapitre C-V sur l'électrocinétique.

2. plus exactement avec les phonons du réseau cristallin.

où l'on peut négliger la force magnétique car la vitesse des électrons est extrêmement petite³. On en déduit donc $\vec{v} = -(e/\lambda) \vec{E}$ et donc $\vec{j} = (n e^2/\lambda) \vec{E} = \gamma \vec{E}$ où le coefficient γ est appelé *conductivité*.

Toutefois, si le conducteur se déplace, il faut bien sûr écrire $\vec{j} = -n e \vec{v}_{\text{rel}}$ car les intensités sont mesurées à travers le conducteur mobile et dans l'équation électrique la force dissipatrice est en $-\lambda \vec{v}_{\text{rel}}$ car c'est la vitesse relative des électrons par rapport à la matière qui provoque les chocs ; enfin la vitesse des électrons dans la force magnétique est la vitesse absolue qui se confond avec la vitesse d'entraînement car la vitesse relative est extrêmement petite (cf supra) , on a donc :

$$\vec{0} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) - \lambda \vec{v}_{\text{rel}}$$

d'où :

$$\vec{v}_{\text{rel}} = -(e/\lambda)(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

et :

$$\vec{j} = \frac{n e^2}{\lambda} (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) = \gamma (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

Or le champ électrique \vec{E} est lié au potentiel scalaire électrique V et au potentiel vectoriel magnétique \vec{A} par $\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, d'où :

$$\vec{j} = \gamma (-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

soit, en notant $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$, appelé *champ électromoteur*, homogène à un champ électrique :

$$\vec{j} = \gamma (-\text{grad} V + \vec{E}_m)$$

• Loi d'Ohm intégrale.

Soit une portion élémentaire de circuit filiforme de section S négligeable, de longueur $d\vec{l} = dl \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire, vérifiant la loi d'OHM locale. La densité de courant \vec{j} est canalisée par le fil donc $\vec{j} = j \vec{u}$. Considérons la section du fil de vecteur surface $\vec{S} = S \vec{u}$; l'intensité est $I = \vec{j} \cdot \vec{S} = j S$. Tout ceci est représenté sur la figure 1 p. 7.

De la loi d'OHM, on déduit :

$$\vec{E}_m = \frac{1}{\gamma} \vec{j} + \text{grad} V = \frac{1}{\gamma} j \vec{u} + \text{grad} V = \frac{1}{\gamma} \frac{I}{S} \vec{u} + \text{grad} V$$

³. de l'ordre du millimètre par seconde pour un courant intense (voir chapitre C-V sur l'électrocinétique).

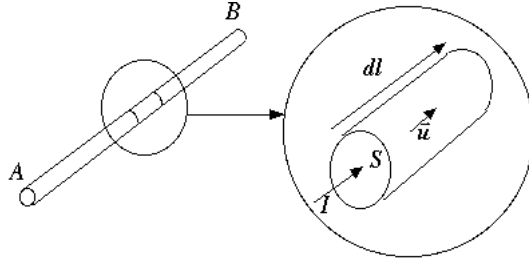


FIGURE 1 – Loi d'Ohm.

Multiplions scalairement par $\vec{dl} = dl \vec{u}$ et intégrons entre deux points A et B du circuit filiforme, on tire, avec classiquement $\text{grad } V \cdot dl = dV$:

$$\int_A^B \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \int_A^B \frac{1}{\gamma} \frac{I}{S} dl + \int_A^B dV = I \int_A^B \frac{dl}{\gamma S} + V_B - V_A$$

On reconnaît dans $dl/\gamma S$ la résistance de l'élément dl et dans l'intégrale la somme des résistances en série, et dans $\int_A^B \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$ la définition de la tension ou force électromotrice e_{AB} (voir chapitre C-V sur l'électrocinétique), d'où :

$$U_{AB} = V_A - V_B = R_{AB} I_{AB} - e_{AB}$$

où l'on reconnaît la loi d'OHM intégrale, d'où le schéma électrique de la figure 2 p. 7.

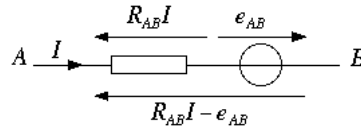


FIGURE 2 – Schéma électrique.

Dans le cas d'un circuit fermé, c'est-à-dire que le point B s'identifie au point A , on a bien sûr $U_{AB} = V_A - V_A = 0$ et

$$e_{AB} = R_{AB} I_{AB}$$

Remarque : Si la vitesse relative des électrons par rapport à la matière n'était pas négligeable, ce ne serait pas problématique; en effet le terme supplémentaire $\vec{v}_{\text{rel}} \wedge \vec{B}$ génère dans la tension électromotrice un terme $\int (\vec{v}_{\text{rel}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$ qui est nul car \vec{v}_{rel} et \vec{dl} sont parallèles (cf supra).

1.b Circuit fixe dans un champ variable.

Soit Γ un circuit filiforme orienté immobile et Σ une surface orientée par la règle du tire-bouchon de contour Γ . Le champ électromoteur se réduit donc à $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et la tension électromotrice apparaissant dans le circuit est, en utilisant le théorème de STOKES (voir chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle) :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = - \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \dots$$

$$\dots = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{dS} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

où $\Phi_m = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS}$ est le *flux magnétique* à travers Σ .

D'où la loi de FARADAY :

$$e = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Remarque 1 : la démonstration repose sur la permutation entre dérivation temporelle et intégration spatiale, c'est-à-dire $\oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dl}$; ce n'est mathématiquement licite que si le domaine d'intégration Γ est indépendant du temps, donc physiquement que si le circuit est immobile.

Remarque 2 : La loi de FARADAY a été découverte de façon empirique par FARADAY en 1831 et énoncée sous cette forme par LENZ en 1834. Sa démonstration est venue plus tard, dans les années 1860, avec les travaux théoriques de MAXWELL sur l'électromagnétisme.

Remarque 3 : Il est d'usage d'appeler $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ *champ électromoteur* de NEUMANN.

Remarque 4 : on a vu plus haut, en rappel, que le choix de la surface de contour Γ n'influe pas sur la valeur du flux ; bien sûr, en pratique, on la choisit de façon que le calcul soit simple.

Remarque 5 : dans un *changement de jauge* où l'on passe de \vec{A}_0 à $\vec{A} = \vec{A}_0 + \text{grad } \phi$, la tension électromotrice passe de $e_0 = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} \cdot \vec{dl}$ à :

$$e = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} \cdot \vec{dl} - \oint_{\Gamma} \text{grad } \phi \cdot \vec{dl} = e_0 - \oint_{\Gamma} d\phi = e_0 + [\phi]_A^A = e_0 - 0 = e_0$$

car le circuit fermé part d'un point A et finit au même point A . La loi de FARADAY n'est donc pas sensible aux changements de jauge.

Remarque 6 : on peut aussi démontrer la loi de FARADAY à partir de l'équation de

Maxwell-Faraday à savoir $\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ (voir chapitre C-VIII sur les équations de MAXWELL) après avoir remarqué que pour un circuit fermé, on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma} \text{grad } V \cdot d\vec{l} + \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = [V]_A^A + e = 0 + e = e$$

On procède ainsi, avec le théorème de STOKES :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Remarque 7 : l'interprétation physique du signe moins de la loi de FARADAY s'appelle loi de LENZ. Supposons que le champ magnétique « extérieur » traversant le circuit Γ (voir figure 3 p. 9) soit croissant ; alors le flux magnétique est croissant donc la tension électromotrice $-d\Phi_m/dt$ est négative, ainsi que le *courant induit* dans le circuit. Ce courant induit crée à son tour un champ magnétique appelé *champ induit* et la règle du tire-bouchon indique qu'il est dans le sens négatif. Donc ce champ induit s'oppose à l'augmentation du champ « extérieur » ; la loi de LENZ est une *loi de modération*, du même style que les lois de LE CHÂTELIER et de VAN'T HOFF en thermochimie des équilibres .

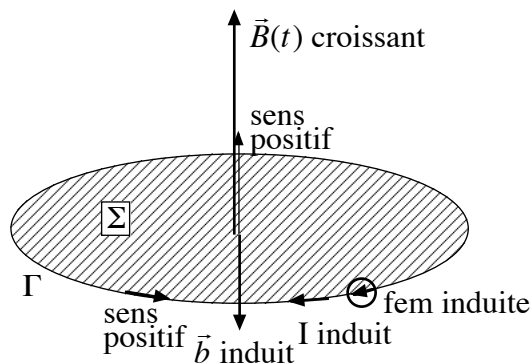


FIGURE 3 – Loi de Lenz.

1.c Circuit mobile dans un champ permanent.

Lorsque le champ magnétique ne dépend pas du temps, donc le potentiel-vecteur non plus, on a $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$ et le champ électromoteur se réduit à $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$. La tension électromotrice dans un élément AB de circuit filiforme est donc :

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

et pour un circuit Γ fermé :

$$e = \oint_{\Gamma} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

• Flux coupé.

Appliquons ce qui précède à un élément AB infiniment petit (on notera $\vec{dl} = \overrightarrow{AB}$) se déplaçant de $\vec{dL} = \vec{v}_e dt$ pendant le temps dt ; on a alors, en notant logiquement de au lieu de e_{AB} et en utilisant les propriétés du produit mixte :

$$de = (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \frac{(\vec{dL} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}}{dt} = - \frac{(\vec{dL} \wedge \vec{dl}) \cdot \vec{B}}{dt}$$

On appelle *surface balayée* la surface orientée de vecteur-surface $\vec{dS} = \vec{dL} \wedge \vec{dl}$ et *flux coupé* le flux magnétique $\delta_2\varphi = \vec{dS} \cdot \vec{B}$ à travers cette surface, d'où :

$$de = - \frac{(\vec{dL} \wedge \vec{dl}) \cdot \vec{B}}{dt} = - \frac{\vec{dS} \cdot \vec{B}}{dt} = - \frac{\delta_2\varphi}{dt}$$

ce qui est résumé par la figure 4 p. 10.

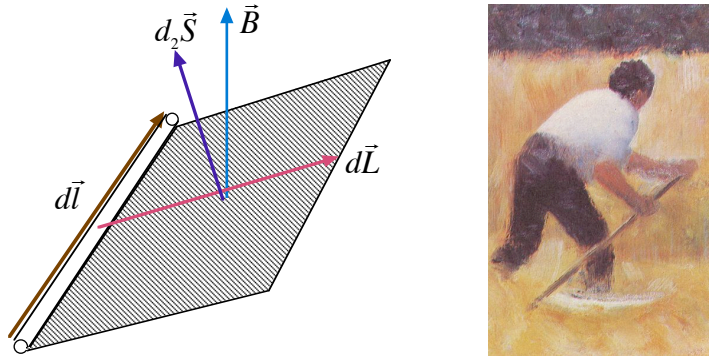


FIGURE 4 – Flux coupé.

On retrouve ici dans les phénomènes d'induction des notions développées pour le calcul du travail de la force de LAPLACE dans le chapitre consacré à la magnétostatique. Il faut bien faire attention à l'orientation de la surface balayée : le sens positif est celui du produit vectoriel « déplacement \wedge courant ».

Si l'on remplace mentalement l'élément de courant par une faux et les lignes de champ magnétique par des épis de blé mur, on comprend le sens de la métaphore du flux coupé; les physiciens ont l'âme très bucolique⁴. Le tableau (un extrait), issu de Wikimedia, est de SEURAT et s'appelle « Le faucheur ».

Pour un élément AB non infiniment petit, voire un circuit fermé, on procède par intégration sur les éléments de circuit, on notera $\delta\varphi$ la somme des $\delta_2\varphi$ et l'on aura comme tension électromotrice totale (E_{AB} ou e selon le contexte) :

4. « O fortunatos nimium sua si bona norint agricolas! » dirait le grand Virgile... et l'un des pirates récurrents des aventures d'Astérix.

$$e = -\frac{\delta\varphi}{dt}$$

On n'oubliera pas que cette formulation n'est qu'une seconde présentation de la formule de départ :

$$e = \oint_{\Gamma} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

qui est en fait plus simple à manipuler ; la formule avec le flux coupé a surtout un usage théorique : montrer l'équivalence avec la loi de FARADAY (voir ci-dessous).

• **Loi de Faraday : le retour.**

Plaçons-nous dans le cas d'un circuit fermé. La figure 5 p. 11 montre un circuit fermé qui passe de la position Γ_t à la position Γ_{t+dt} par un déplacement de $d\vec{L}$, dépendant possiblement de la position initiale du point du circuit⁵ et précise les sens positifs de parcours sur le circuit et les sens positifs des surfaces ayant pour contour les positions extrêmes du circuit.

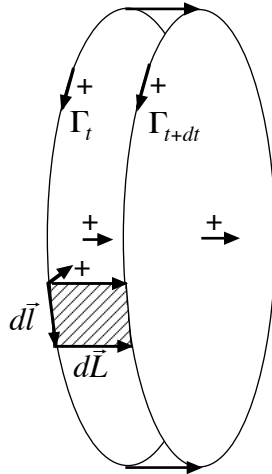


FIGURE 5 – Flux coupé et variation de flux.

Appellons $\Phi(t) = \iint_{\Gamma_t} \vec{B} \cdot \vec{dS}$ le flux magnétique à travers une surface quelconque de contour la position initiale du circuit, $\Phi(t + dt) = \iint_{\Gamma_{t+dt}} \vec{B} \cdot \vec{dS}$ le flux magnétique à travers une surface quelconque de contour la position finale du circuit et $\delta\varphi$ le flux coupé.

5. Mon logiciel de dessin est rustique et il était plus facile de tracer un $d\vec{L}$ uniforme.

Considérons la surface fermée constituée des deux surfaces s'appuyant sur les positions extrêmes du circuit et de la surface balayée par celui-ci. Dans le cas de la figure ⁶, $\vec{\Phi}(t + dt)$ est orientée positivement vers l'extérieur tandis que $\vec{\Phi}(t)$ et $\delta\varphi$ sont orientés positivement vers l'intérieur. Le champ magnétique est à flux conservatif, donc le flux total à travers une surface fermée orientée vers l'extérieur est nul, à un instant donné ⁷, d'où successivement :

$$\vec{\Phi}(t + dt) - \vec{\Phi}(t) - \delta\varphi = 0$$

$$\delta\varphi = \vec{\Phi}(t + dt) - \vec{\Phi}(t)$$

$$e = -\frac{\delta\varphi}{dt} = -\frac{\vec{\Phi}(t + dt) - \vec{\Phi}(t)}{dt} = -\frac{d\vec{\Phi}}{dt}$$

La loi de FARADAY s'applique encore, mais attention la démonstration s'appuie sur le fait que \vec{B} est à flux conservatif à un instant donné donc que $\vec{\Phi}(t + dt)$ dépend de la position du circuit mais pas de l'instant, c'est-à-dire qu'elle suppose tacitement que \vec{B} ne dépend pas du temps et que l'on soit donc en régime permanent.

• **Exemple des rails de Laplace.**

Considérons le dispositif des *rails de LAPLACE* constitué de deux rails fixes parallèles à Ox , sur lesquels se déplace en translation selon Ox une tige AB parallèle à Oy , de longueur a avec la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$, le circuit est fermé de façon quelconque. Le tout est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$. On choisit pour le circuit un sens positif tel que la règle du tire-bouchon oriente la surface dans le même sens que le champ. Tout ceci est résumé par la figure 6 p. 12.

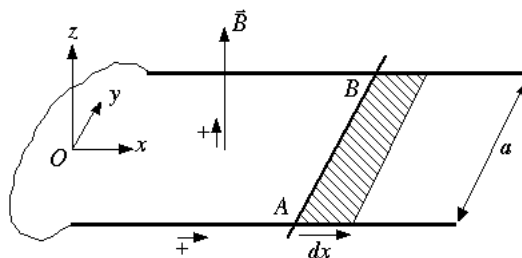


FIGURE 6 – Rails de Laplace.

6. Bien sûr pour les autres cas de figure on arrive à la même conclusion, on laisse au lecteur le soin de les explorer.

7. Le flux total est nul à un instant donné et l'on parle de $\vec{\Phi}(t + dt)$. Ce n'est pas contradictoire, car on parle du flux à travers Γ_{t+dt} d'un champ qui est le même à t et $t + dt$. Donc ici $t + dt$ ne désigne pas fondamentalement un instant mais une position.

On a, puisque \vec{v}_e est nul partout sauf entre A et B :

$$\begin{aligned} e &= \oint (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (v \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z) \cdot dy \vec{e}_y = \dots \\ &\dots = \int_A^B -v B \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y = - \int_A^B v B dy = -v B a \end{aligned}$$

On aurait pu aussi procéder ainsi : quand la tige se déplace de dx , la surface du circuit augmente de $dS = a dx$ et de flux de $d\Phi = B a dx = B a v dt$, d'où :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B a v$$

Remarque énergétique : Supposons que le circuit précédent soit parcouru par un courant I , que celui-ci soit créé par les phénomènes d'induction ou par un générateur non représenté. La tige est soumise à la force de LAPLACE :

$$\vec{F} = \int_A^B I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_A^B I dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = \int_A^B I B dy \vec{e}_x = I B a \vec{e}_x$$

La puissance de cette force est :

$$\mathcal{P}_{méca} = \vec{F} \cdot \vec{v} = I B a \vec{e}_x \cdot v \vec{e}_x = I v B a$$

Par ailleurs, la puissance électrique délivrée par la f.e.m. d'induction est :

$$\mathcal{P}_{élec} = e I = -(B a v) I = -I v B a$$

et donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{élec} = 0}$$

Le couplage entre électricité et mécanique est parfait, le bilan énergétique est nul. Nous généraliserons cela un peu plus loin, mais uniquement dans le cas d'un champ magnétique stationnaire.

• Loi de Faraday : conditions d'application.

Il est tentant de ne retenir qu'une formule valable dans les deux cas, c'est-à-dire la loi de FARADAY $e = -\frac{d\Phi_m}{dt}$. Ce serait une mauvaise idée.

La première est que l'utilisation de l'autre formule $e = \oint_{\Gamma} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ ne nécessite de connaître le champ magnétique qu'en tout point du contour Γ , alors que la première

nécessite de le connaître en tout point d'une surface de contour Γ et qu'il y soit assez simple pour que l'intégration soit possible ; ce n'est pas toujours le cas.

En outre, le passage d'une formule à l'autre suppose que, dans son déplacement, le circuit ne présente pas de singularité, ce qui n'est pas toujours le cas.

La figure 7 p. 14 représente un bon vieux rhéostat formé d'un enroulement hélicoïdal de fil, branché à un circuit extérieur entre le début de l'hélice et le sommet d'une spire, disons celle de rang n , que l'on place ici dans un champ magnétique uniforme et stationnaire parallèle à l'axe de l'hélice ; il est donc traversé par un flux approximativement égal à $n B S$ où S est la surface d'une spire. Si l'on décale le curseur d'une spire, le flux varie de $B S$ et pourtant il n'y a pas de phénomène d'induction car presque partout \vec{v}_e est nul donc le champ électro-moteur aussi, sauf au niveau du curseur, mais là \vec{v}_e est parallèle à \vec{B} donc le champ électro-moteur $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ est nul. D'où vient la contradiction entre les deux points de vue dont le premier est contraire à l'expérience ? C'est qu'entre les deux positions, le circuit a changé, on lui a ajouté de la matière. De façon plus parlante, le circuit s'est cassé au niveau du point de contact et les deux points de part et d'autre de la cassure ont évolué différemment : l'un a bougé, l'autre pas ; en d'autres termes, la vitesse des points du circuit n'est pas une fonction continue. Chaque fois que l'on constatera une telle discontinuité, il y aura lieu d'être méfiant et de revenir à la circulation du champ électro-moteur.

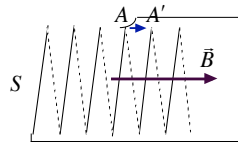


FIGURE 7 – Rhéostat.

Voici un autre exemple contraire où il y a une tension électro-motrice sans variation apparente de flux. Une *roue de BARLOW* ou *disque de FARADAY* est un disque conducteur d'épaisseur négligeable mobile autour de son axe Oz , on note a son rayon et J son moment d'inertie par rapport à l'axe. Un contact en graphite sur l'axe et avec un électrolyte en périphérie permet à un rayon OA de se conduire en portion de circuit filiforme (en fait les éventuels courants se dispersent dans la masse métallique mais on peut montrer que les effets sont les mêmes que si les courants restaient localisés sur le rayon OA ; comme le chapitre est dense, je m'en abstiens). Le circuit se referme à l'extérieur de la roue de façon quelconque. Tout le rayon OA se trouve dans une région où règne un champ magnétique stationnaire et uniforme parallèle à Oz et de même sens, de module B (cf figure 8 p. 15).

Si le disque tourne à la vitesse angulaire ω , le circuit formé de sa partie extérieure et du rayon OA est invariant et le flux qui le traverse constant, pourtant, il y a apparition d'une tension électro-motrice. En effet, en un point M du rayon OA à la distance r du point O , la vitesse est orthoradiale est vaut $r \omega \vec{e}_\theta$, le champ électro-moteur créé par le champ $\vec{B} = B \vec{e}_z$ est :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = r \omega \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z = r \omega B \vec{e}_r$$

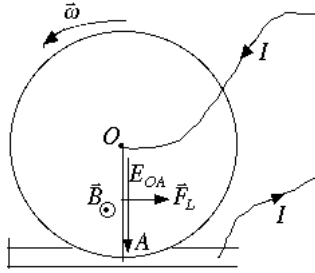


FIGURE 8 – Roue de Barlow

et la tension électro-motrice e_{OA} qui apparaît entre O et A en est la circulation entre ces points, soit, avec $\vec{dl} = dr \vec{e}_r$ sur OA :

$$e_{OA} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \int_O^A r \omega B \vec{e}_r \cdot dr \vec{e}_r = \omega B \int_0^a r dr = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

Là encore, c'est la discontinuité de vitesses au point A qui pose problème.

Remarque énergétique : si le dispositif est parcouru par un courant I compté positivement de O vers A (dans l'approximation précédente où le courant suit le rayon OA), un segment MM' de OA entre les distances r et $r + dr$ du point O est soumis à la force de LAPLACE élémentaire :

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \wedge \vec{B} = I dr \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z = -I B dr \vec{e}_\theta$$

dont le moment dynamique en O est :

$$\vec{dM}_O = \vec{OM} \wedge \vec{dF} = r \vec{e}_r \wedge (-I B dr \vec{e}_\theta) = -I B r dr \vec{e}_z$$

d'où un moment total :

$$\vec{M}_O = \int_0^A \vec{dM}_O = -I B \vec{e}_z \int_0^a r dr \vec{e}_z = -\frac{1}{2} I B a^2 \vec{e}_z$$

dont la puissance est :

$$\mathcal{P}_{\text{méca.}} = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} = -\frac{1}{2} I B a^2 \vec{e}_z \cdot \omega \vec{e}_z = -\frac{1}{2} I \omega B a^2$$

Quant à la puissance fournie par la f.e.m. d'induction, elle vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{élec.}} = e_{OA} I = \frac{1}{2} I \omega B a^2$$

On retrouve que le bilan énergétique est nul ($\mathcal{P}_{\text{méca}} + \mathcal{P}_{\text{élec}} = 0$), donc que le couplage entre électricité et mécanique est parfait.

• **Bilan énergétique dans le cas d'un champ stationnaire.**

Tentons de généraliser la dernière remarque. Dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la f.e.m. correspondant à un élément de circuit de longueur $d\vec{l}$ de vitesse \vec{v}_e est $de = \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$; si cet élément est parcouru par un courant I la puissance électrique est $d\mathcal{P}_{\text{élec.}} = de I = I (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$.

Par ailleurs la force de LAPLACE sur le même élément parcouru par le même courant est $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ dont la puissance mécanique est $d\mathcal{P}_{\text{méca.}} = d\vec{F} \cdot \vec{v}_e = I (\vec{d}l \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e$. Les propriétés du produit mixte font que l'échange de deux facteurs provoque un changement de signe, d'où $d\mathcal{P}_{\text{méca.}} = d\vec{F} \cdot \vec{v}_e = -I (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -d\mathcal{P}_{\text{élec.}}$.

donc par intégration sur le circuit :

$$\boxed{\text{Dans un champ magnétique stationnaire } \mathcal{P}_{\text{méca.}} + \mathcal{P}_{\text{élec.}} = 0}$$

A condition de ne pas oublier la condition d'application, cette remarque permet de gagner du temps : si l'on a déduit des forces de LAPLACE l'expression de la puissance mécanique, on en déduira avec trois fois rien⁸ de calcul que la f.e.m. dans le circuit est $e = -\frac{\mathcal{P}_{\text{méca.}}}{I}$.

1.d Synthèse des deux situations.

Sous réserve de la continuité de la vitesse ou ce qui revient au même de l'intégrité du circuit, la loi de FARADAY s'applique au circuit fixe dans un champ variable et à un circuit mobile dans un champ stationnaire non uniforme. Il ne faut pas s'étonner : dans le second cas, si l'on se place dans le référentiel lié au circuit, celui-ci est fixe mais perçoit le champ autour de lui comme variable.

Approfondissons ce changement de point de vue et demandons-nous comment se transforment les champs électrique et magnétique dans un changement de référentiel galiléen. Soient donc un référentiel absolu et un référentiel relatif en translation uniforme à la vitesse \vec{v}_e par rapport au premier.

Considérons une charge ponctuelle mobile à la vitesse \vec{v}_a par rapport au référentiel absolu et à la vitesse \vec{v}_r par rapport au relatif. Dans le changement de référentiel on sait que $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ et que la force subie par la charge est invariante (voir cours de mécanique, chapitre A-II).

8. [...] Si l'on peut trouver moins que rien c'est que rien vaut déjà quelque chose!
 On peut acheter quelque chose avec rien!
 En le multipliant une fois rien ... c'est rien
 Deux fois rien ... c'est pas beaucoup!
 Mais trois fois rien! ... Pour trois fois rien on peut déjà acheter quelque chose! ... Et pour pas cher! [...]
 Raymond DEVOS

Dans le référentiel mobile la charge subit la force :

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{rel} + \vec{v}_{rel} \wedge \vec{B}_{rel})$$

et dans le référentiel fixe :

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{abs} + \vec{v}_{abs} \wedge \vec{B}_{abs})$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{abs} + \vec{v}_{entr} \wedge \vec{B}_{abs} + \vec{v}_{rel} \wedge \vec{B}_{abs})$$

Ces deux formules doivent donner le même résultat quelle que soit la vitesse relative ; on en déduit⁹ d'une part $\vec{B}_{rel} = \vec{B}_{abs}$ et d'autre part $\vec{E}_{rel} = \vec{E}_{abs} + \vec{v}_{entr} \wedge \vec{B}_{abs}$. Il n'est plus besoin d'indice pour le champ magnétique qui s'avère invariant et la loi d'OHM $\vec{j} = \gamma \vec{E}_{rel}$ donne $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{abs} + \vec{v}_{entr} \wedge \vec{B})$. Dans la pratique, on ne fait plus mention du référentiel mobile et l'on écrit de façon abrégée :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

Le terme $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ dont nous avons dit plus haut qu'il était homogène à un champ électrique est en fait une des composantes du champ électrique « vu » par le circuit en mouvement. Nous verrons dans le chapitre C-VIII sur les équations de MAXWELL que les champs électrique et magnétique forment ensemble une seule entité appelée champ électromagnétique à six composantes et du reste une approche relativiste (chapitre C-X) sera particulièrement convaincante.

1.e Circuit mobile dans champ variable.

Que dire dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable ? La littérature est généralement muette à ce sujet, hormis des formulations en « on admettra que ». En fait, les choses sont assez simples à condition de les aborder... simplement.

Soit un circuit filiforme dont la forme à l'instant t est une courbe orientée $\Gamma(t)$. La seule chose qui soit sûre est que la f.e.m. dans ce circuit est, à l'instant t :

$$e(t) = \oint_{\Gamma(t)} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{dl} = - \oint_{\Gamma(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{\Gamma(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

Multiplions par un intervalle de temps infiniment petit dt et changeons les signes par commodité :

$$-e(t) dt = dt \oint_{\Gamma(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} - dt \oint_{\Gamma(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

9. On lit les deux formules comme des espèces de polynômes en \vec{v}_{entr} dont les coefficients sont égaux.

Interprétons le premier terme en nous inspirant de la démonstration dans la situation « circuit fixe dans un champ variable » ; notons provisoirement Γ_0 un circuit immobile confondu avec $\Gamma(t)$ et Σ une surface quelconque de contour Γ_0 :

$$\begin{aligned} dt \oint_{\Gamma(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} &= dt \oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = dt \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma_0} \vec{A}(t) \cdot \vec{dl} = dt \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B}(t) \cdot \vec{dS} = \dots \\ \dots &= dt \frac{d\Phi(\Gamma_0, t)}{dt} = d\Phi(\Gamma_0, t) = \Phi(\Gamma_0, t + dt) - \Phi(\Gamma_0, t) = \Phi(\Gamma(t), t + dt) - \Phi(\Gamma(t), t) \end{aligned}$$

où $\Phi(\Gamma(t_1), t_2)$ est le flux, calculé avec le champ à l'instant t_2 , à travers la courbe confondue avec la position du circuit en t_1

Dans le second terme $-dt \oint_{\Gamma(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$, si l'on remplace \vec{B} , tacitement calculé à l'instant t , par \vec{B} calculé en $t + dt$ on commet dans \vec{B} et dans l'intégrale une erreur du premier ordre en dt et dans le terme étudié, produit de dt par l'intégrale, une erreur en dt^2 négligeable pour dt infiniment petit¹⁰. En reprenant le raisonnement du cas « circuit mobile dans un champ stationnaire », on trouve que le terme en question est égal au flux coupé par le circuit entre les positions $\Gamma(t)$ et $\Gamma(t + dt)$ mais avec un champ magnétique constamment égal à $\vec{B}(t + dt)$ et, pourvu que la vitesse soit continue le long du circuit, ce flux coupé est égal à la variation de flux dans le circuit dans ce champ réputé stationnaire, soit :

$$-dt \oint_{\Gamma(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \Phi(\Gamma(t + dt), t + dt) - \Phi(\Gamma(t), t + dt)$$

Par addition entre les deux termes, on arrive à :

$$-e(t) dt = \Phi(\Gamma(t + dt), t + dt) - \Phi(\Gamma(t), t)$$

$$e = -\frac{d}{dt} \Phi(\Gamma(t), t)$$

qui est bien l'opposé de la dérivée temporelle du flux à travers le circuit que l'on notera plus simplement, maintenant que le résultat est démontré, $-\frac{d\Phi}{dt}$.

Sous réserve de continuité de la vitesse le long du circuit, la loi de FARADAY est donc valable dans toutes les situations.

1.f Courants de Foucault.

A titre d'exemple de phénomènes d'induction dans une situation de circuit non filiforme, donc de courants répartis en volume, appelés *courants de FOUCAULT*, étudions une méthode de chauffage par induction.

¹⁰. Pas d'affolement : c'est comme cela que les mathématiciens démontrent des formules classiques comme $(fg)' = f'g + fg'$.

Un solénoïde long, d'axe Oz contient n spires par unité de longueur parcourues par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et crée un champ magnétique $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ avec $B_0 = \mu_0 n I_0$.

Le plan méridien passant par le point M et l'axe Oz est plan d'antisymétrie ; le champ magnétique (un pseudo-vecteur ou vecteur axial) est donc dans ce plan et le potentiel-vecteur (un vrai vecteur ou vecteur polaire) lui est orthogonal, donc orthoradial. De plus l'invariance par rotation et translation selon Oz indique que son module ne dépend que de la distance r à l'axe et $\vec{A}(M, t) = A(r, t) \vec{e}_\theta$.

Le circulation de \vec{A} le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon r est donc d'une part $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r A(r, t)$ et, d'autre part, le flux de son rotationnel (théorème de STOKES), c'est-à-dire le flux magnétique à travers le disque, soit $\Phi = \pi r^2 B(t) = \pi r^2 B_0 \cos(\omega t)$, donc, successivement :

$$\begin{aligned} 2\pi r A(r, t) &= \pi r^2 B_0 \cos(\omega t) \\ A(r, t) &= \frac{1}{2} r B_0 \cos(\omega t) \\ \vec{A} &= \frac{1}{2} r B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_\theta \\ \vec{E}_m &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \omega B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Un cylindre immobile, conducteur cylindrique d'axe Oz , de hauteur H , de rayon R et de conductivité électrique σ est placé dans ce champ magnétique, en l'absence de champ donc de potentiel électrique (dans ces conditions $\vec{E} = \vec{E}_m$). Calculons la puissance moyenne développée par l'effet Joule. Plusieurs approches équivalentes sont possibles.

Considérons une boucle de courant filiforme, circulaire de rayon r (puisque $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ est orthoradial), dont la section par un plan méridien soit rectangulaire de côtés dz dans le sens axial et dr dans le sens radial ; elle est traversée par le courant élémentaire :

$$I = j S = \sigma E(r, t) dz dr = \frac{1}{2} \sigma r \omega B_0 \sin(\omega t) dz dr$$

Sa résistance électrique R_e est calculée par la formule classique ;

$$R_e = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{2\pi r}{\sigma dz dr}$$

Et l'effet Joule élémentaire est :

$$d_2 \mathcal{P} = R_e I^2 = \frac{\pi}{2} \sigma r^3 \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) dz dr$$

Une autre méthode, plus fondamentale, consiste à calculer la puissance transférée aux charges dans un volume élémentaire (voir chapitre C-VIII sur les équations de MAXWELL) :

$$d_3 \mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} d_3 V = \sigma \vec{E}^2 r dr d\theta dz = \frac{1}{4} \sigma r^3 \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) dr d\theta dz$$

L'intégration de $d_3\mathcal{P}$ de $\theta = 0$ à 2π conduit à $d_2\mathcal{P}$ (on retrouve bien sûr le résultat ci-dessus) qu'il suffit ensuite d'intégrer de $z = 0$ à H et de $r = 0$ à R .

$$\mathcal{P} = \frac{\pi}{2} \sigma \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) \int_0^H dz \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{8} \sigma R^4 H \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t)$$

dont la valeur moyenne dans le temps est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi}{16} \sigma R^4 H \omega^2 B_0^2$$

Cet effet JOULE est potentiellement nuisible sauf si c'est ce que l'on cherche¹¹, auquel cas, nous venons de concevoir un four à induction.

2 Propriétés des flux magnétiques.

2.a Deux expressions équivalentes du flux.

Il s'agit ici du simple rappel d'une équivalence déjà présentée puis utilisée dans ce chapitre : soit un circuit filiforme de contour Γ et Σ une surface quelconque de contour Γ . Le théorème de STOKES et la définition du potentiel-vecteur permettent d'affirmer que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_m$$

d'où les deux expressions équivalentes du flux magnétique :

$$\Phi_m = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

2.b Circuit unique.

Considérons un circuit traversé par un courant I . Il crée en tout point un champ magnétique orienté par la règle du tire-bouchon et proportionnel (cf formule de BIOT et SAVART) à I . Ce champ crée à son tour à travers une surface appuyée sur le circuit et orientée par la même règle du tire-bouchon un flux magnétique, appelé *flux propre* forcément positif et forcément proportionnel à I . On définit donc un coefficient positif appelé *coefficient d'auto-induction* ou *auto-inductance* ou *inductance*, voire en français moderne¹² *self*, noté L tel que $\Phi_{propre} = LI$.

La f.e.m. associée est :

$$e = -\frac{d\Phi_{propre}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

11. On rappelle que traditionnellement, « on appelle mauvaise herbe, une herbe dont on n'a pas encore découvert les vertus » (Ralph Emerson).

12. ou new french ?

d'où le schéma équivalent (figure 9 p. 21) et la formule $U = r I - e = r I + L \frac{dI}{dt}$, en tenant compte de la résistance r du circuit :

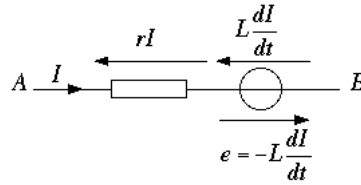


FIGURE 9 – Auto-inductance.

Remarque : Tout circuit a une inductance mais seuls quelques rares circuits de forme géométrique simple permettront son calcul ; dans les autres cas, il s'agira d'un résultat expérimental.

- **Exemple du solénoïde long.**

Pour un solénoïde contenant N spires de surface S sur une longueur ℓ , on sait¹³ qu'il crée un champ quasiment uniforme à l'intérieur de module $B = \mu_0 n I = \mu_0 N I / \ell$. Le flux total est N fois le flux à travers une seule spire soit :

$$\Phi_{propre} = N \varphi = N S B = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I$$

d'où :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

le plus important étant la dépendance en N^2 .

- **Difficulté introduite par le modèle filiforme.**

Soit un circuit filiforme circulaire d'axe Oz de centre O et de rayon R , supposé parcouru par une intensité stationnaire I ; pour le calcul du flux propre, on choisit comme surface le disque de centre O et de rayon r . En tout point M à une distance r de O , par symétrie, le champ a une composante axiale $B_z(r)$ et une composante radiale $B_r(r)$. Le flux propre est donc, en découpant en le disque en « ronds de poêle » :

$$\Phi = L I = \iint_{\vec{B}} \cdot \vec{dS} = \int_0^R 2 \pi r B_r(r) dr$$

13. Voir chapitre C-III de magnétostatique.

soit, avec le changement de variable $r = R - \rho$ (ρ est la distance de M au point du cercle le plus proche) :

$$L I = \int_0^R 2 \pi (R - \rho) B_r(R - \rho) d\rho$$

Or quand ρ tend vers zéro, donc devient négligeable devant le rayon de courbure du fil, le champ en M infiniment proche du fil conducteur est équivalent à celui d'un fil rectiligne infini soit $B_r(R - \rho) \sim \frac{\mu_0 I}{2 \pi \rho}$ et

$$2 \pi (R - \rho) B_r(R - \rho) d\rho \sim 2 \pi R \frac{\mu_0 I}{2 \pi \rho} d\rho \sim \mu_0 I R \frac{d\rho}{\rho}$$

La primitive de l'équivalent est un logarithme qui diverge en $\rho = 0$.

Cette divergence, énergétiquement impossible, est commune à tous les circuits filiformes. Le modèle du circuit filiforme est donc auto-contradictoire. Il reste toutefois commode en dehors du calcul des auto-inductances, car c'est alors une bonne approximation avec un usage simple.

Pour régler le problème de divergence, il suffit de donner au diamètre du fil la valeur non nulle qu'il a dans la réalité. Malheureusement dans ce cas plus moyen de définir une surface qui soit limitée par autre chose d'un contour filiforme, donc plus moyen de définir un flux propre. On verra un peu plus tard comment contourner le problème par une démarche énergétique.

2.c Deux circuits en interaction...ou plus.

• Matrice inductance et signes de coefficients.

Considérons maintenant deux circuits (en pratique deux bobines), l'un parcouru par un courant I_1 , l'autre par I_2 . En tout point le champ magnétique est somme du champ créé par le premier circuit et de celui créé par le second, donc est somme d'un terme proportionnel à I_1 et d'un terme en I_2 . Il en est donc de même pour le flux magnétique à travers l'un ou l'autre des circuits. On peut donc écrire de façon matricielle :

$$\begin{cases} \Phi_1 = M_{11} I_1 + M_{12} I_2 \\ \Phi_2 = M_{21} I_1 + M_{22} I_2 \end{cases}$$

Il suffit mentalement de choisir $I_2 = 0$ pour retrouver un circuit unique et se convaincre que M_{11} s'identifie à l'inductance L_1 du premier circuit (de même M_{22} à L_2) ; en effet la présence ou l'absence d'un second circuit et sa position s'il existe ne modifient en rien le champ créé par le premier, donc son flux propre.

Par contre et bien évidemment M_{12} et M_{21} dépendent de la position relative des deux circuits. Par ailleurs, si l'on change le sens positif du second circuit en conservant celui du

premier, l'expression du champ créé par le premier circuit au niveau du second ne change pas mais sa contribution au flux dans le second change de signe donc M_{21} aussi. Les signes de $L_1 = M_{11}$ et de $L_2 = M_{22}$ sont forcément positifs, ceux de M_{12} et M_{21} dépendent du choix relatif des orientations.

Ajoutons un troisième circuit parcouru par un courant I_3 qui ne modifiera pas les champs créés par les deux premiers mais en ajoutera un troisième proportionnel à I_3 . Aux flux à travers les deux premiers circuits s'ajoutera donc un terme supplémentaire sans changement des termes préexistants. On arrivera naturellement à cette écriture :

$$\begin{cases} \Phi_1 = M_{11} I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 \\ \Phi_2 = M_{21} I_1 + M_{22} I_2 + M_{23} I_3 \\ \Phi_3 = M_{31} I_1 + M_{32} I_2 + M_{33} I_3 \end{cases}$$

où les termes M_{11} , M_{12} , M_{21} et M_{22} sont les mêmes que précédemment, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de la présence ou l'absence d'un troisième circuit ni de sa position s'il existe. Il apparaît donc ici une différence fondamentale avec la matrice capacité d'un système de conducteurs où les phénomènes d'influence modifient les coefficients préexistants en présence d'un conducteur supplémentaire.

Désormais, nous ne traiterons que le cas de deux circuits en interaction ; nous faisons confiance au lecteur qui généralisera aisément au cas général d'un nombre n quelconque de circuits. On notera bien sûr en introduisant une *matrice inductance* :

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

• Symétrie de la matrice inductance.

Le terme $M_{21} I_1$ est le flux que crée le champ du circuit 1 noté Γ_1 à travers le circuit 2 noté Γ_2 que l'on peut écrire (cf supra) sous l'une des deux formes :

$$M_{21} I_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma_2} \vec{A}_1(M) \cdot d\vec{l}_M$$

où, dans la second forme, $d\vec{l}_M$ désigne un élément $\overrightarrow{MM'}$ du second circuit et $\vec{A}_1(M)$ le potentiel-vecteur créé par le premier circuit en M , soit (cf chapitre C-III sur la magnéto-statique ou C-VIII sur les équations de MAXWELL) :

$$\vec{A}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_P}{\|PM\|}$$

où $d\vec{l}_P$ désigne un élément $\overrightarrow{PP'}$ du premier circuit.

En reportant le second résultat dans le premier et en simplifiant par I_1 , on tire :

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\vec{dl}_P \cdot \vec{dl}_M}{\|\vec{PM}\|}$$

L'ordre des intégrations dans un intégrale double ne change pas le résultat, on en déduit que $M_{12} = M_{21}$ et plus généralement que les matrices inductances sont symétriques. On notera, dans le cas de deux circuits, M la valeur commune que l'on appelle *coefficient de mutuelle inductance* ou *mutuelle inductance*, voire *mutuelle* tout court. On réécrit donc :

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- **Coefficient de couplage entre circuits en interaction.**

Il est intéressant pour la fluidité de l'exposé d'admettre provisoirement la propriété suivante, qui sera démontrée un peu plus loin. Il s'agit de l'inégalité :

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

et on appelle *coefficient de couplage* le rapport, de valeur absolue inférieure ou égale à l'unité, $\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Son signe (cf supra) n'est pas significatif : il dépend du choix relatif des sens positifs des deux circuits.

- **Schéma électrique équivalent.**

On prendra garde que les f.e.m. d'induction dans les deux circuits ne sont plus respectivement $e_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$ et $e_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$, piège dans lequel on tombe aisément, mais :

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

D'où le schéma électrique et le schéma équivalent tenant compte des résistances des bobines sur la figure 10 p. 25

2.d Le flux propre est-il négligeable ?

Soit un circuit soumis à un champ extérieur \vec{B}_{ext} donné, ce qui permet d'en calculer le flux Φ_{ext} à travers le circuit. Il faut bien comprendre que ce champ est forcément créé

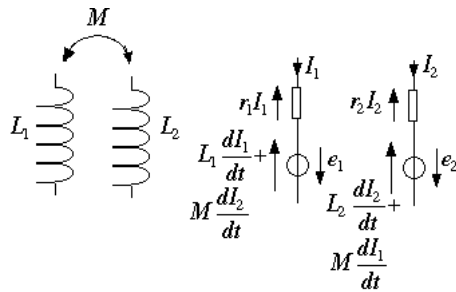


FIGURE 10 – Circuits couplés.

par un second circuit électrique non mentionné par l'énoncé et donc que Φ_{ext} se substitue à $M I_2$. Le flux à travers le premier circuit parcouru par le courant I est donc :

$$\Phi_{tot} = L I + \Phi_{ext}$$

$$e = -L \frac{dI}{dt} - \frac{d\Phi_{ext}}{dt}$$

On se pose souvent la question de tenir compte ou non du terme $L I$. En fait, il est aisé de trancher si l'on se souvient que L varie en N^2 où N est le nombre de spires. Si le circuit n'est pas une bobine et ne comporte qu'une spire, on peut sans hésitation négliger $L I$; si c'est une bobine, on doit en tenir compte. Ce critère simple peut bien sûr être mis en défaut dans de rares cas.

2.e Circuits couplés. Transformateurs.

Une application technologique importante des circuits couplés est le transformateur dont voici le principe.

Considérons le circuit ci-dessous (figure 11 p. 25), où deux bobines couplées sont branchées l'une à un générateur alternatif (modèle de THEVENIN) et l'autre à une résistance modélisant un circuit d'utilisation.

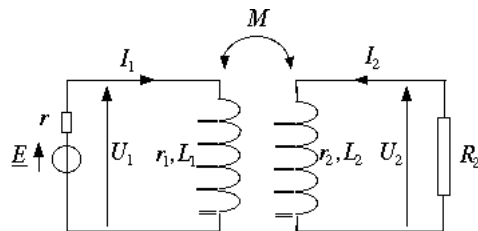


FIGURE 11 – Transformateur-1.

Le schéma équivalent est le suivant (figure 12 p. 26) où en convention générateur la f.e.m. d'induction dans le premier circuit est $e_1 = -d\Phi_1/dt = -L_1 dI_1/dt - M dI_2/dt$ (pour aérer, on a dessiné deux générateurs correspondant aux deux termes) et de même pour le second circuit.

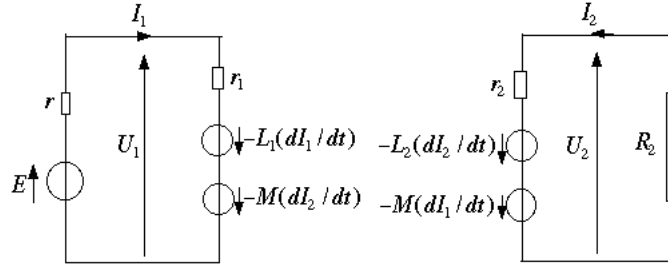


FIGURE 12 – Transformateur-2.

En courant sinusoïdal, on remplace les dérivées temporelles par $j\omega$, ce qui permet de remplacer par exemple le générateur $-L_1 dI_1/dt$ par un dipole $jL_1\omega$, avec un changement de signe pour repasser en convention récepteur, d'où le nouveau schéma équivalent (figure 13 p. 26), simplifié dans le cas où r , r_1 et r_2 sont négligeables devant $L_1\omega$, $L_2\omega$ et $M\omega$, ce qui est le cas pour un transformateur bien conçu.

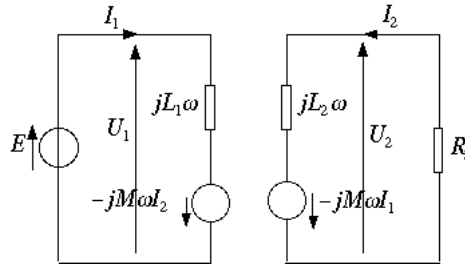


FIGURE 13 – Transformateur-3.

La loi des mailles appliquée à chacun des circuits conduit au système suivant, où les valeurs complexes des fonctions sinusoïdales sont indiquées par un soulignement :

$$\begin{cases} \underline{E} = jL_1\omega \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 \\ 0 = jM\omega \underline{I}_1 + (R_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 \end{cases}$$

On en déduit aisément :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = -\frac{R_2 + jL_2\omega}{(L_1L_2 - M^2)\omega^2 - jL_1\omega R_2} \underline{E} \\ \underline{I}_2 = \frac{jM\omega}{(L_1L_2 - M^2)\omega^2 - jL_1\omega R_2} \underline{E} \end{cases}$$

par ailleurs, il est clair que $\underline{U}_1 = \underline{E}$ et $\underline{U}_2 = -R_2 I_2$.

Pour un transformateur bien conçu, le coefficient de couplage plus haut vaut ± 1 d'où $L_1 L_2 - M^2 = 0$ et dans une utilisation normale R_2 est négligeable devant $L_2 \omega$; les résultats précédents se simplifient alors en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_1 = \frac{L_2}{L_1 R_2} \underline{E} \\ \underline{I}_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} \underline{E} \\ \underline{U}_1 = \underline{E} \\ \underline{U}_2 = \frac{M}{L_1} \underline{E} \end{array} \right.$$

Dans le cas très fréquent où les deux bobines ont même surface S et même longueur ℓ , on a (cf supra) $L_1 = \mu_0 N_1^2 S/\ell$, $L_2 = \mu_0 N_2^2 S/\ell$ et donc $M = \pm\sqrt{L_1 L_2} = \pm\mu_0 N_1 N_2 S/\ell$ (on prendra le signe plus pour fixer les idées) et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_1 = \frac{N_2^2}{N_1^2 R_2} \underline{E} \\ \underline{I}_2 = -\frac{N_2}{N_1 R_2} \underline{E} \\ \underline{U}_1 = \underline{E} \\ \underline{U}_2 = \frac{N_2}{N_1} \underline{E} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Finalement, ainsi conçu le transformateur multiplie la tension par N_2/N_1 et l'intensité par le rapport inverse, ce qui assure un rendement parfait avec ces approximations; dans la réalité, il dépasse les 95 %. A noter que pour assurer un fort coefficient de couplage et de fortes valeurs de $L_1 \omega$, $L_2 \omega$ et $M \omega$ (de sorte que R_1 et R_2 soient bien négligeables), les bobines enserrant un noyau ferromagnétique qui multiplie ces valeurs par un facteur de l'ordre de mille et qui canalise les lignes de champs (voir le chapitre C-XII qui traite de propriétés magnétiques de la matière, paragraphe sur les ferromagnétiques).

3 Aspects énergétiques.

On se place ici encore dans le cas de deux circuits couplés; il sera aisé au lecteur de généraliser à un nombre n de circuits.

3.a Approche matricielle.

Considérons les circuits de la figure figure 12 p. 26. La puissance totale apportée par les courants est :

$$\mathcal{P} = U_1 I_1 + U_2 I_2 = \left(r_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \right) I_1 + \left(r_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \right) I_2$$

$$\mathcal{P} = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + M \left(I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} \right)$$

qu'on réécrit, en reconnaissant l'effet JOULE :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \right) = \mathcal{P} - \mathcal{P}_{Joule}$$

Puisqu'on reconnaît une formulation-type de loi de conservation, on va définir l'énergie magnétique des circuits couplés par :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Cette démonstration reste valable si l'on remplace le générateur branché à la première bobine et la « résistance d'utilisation » branchée à la seconde par n'importe quels autres dipôles.

Le résultat peut être formulé sous l'allure d'une forme quadratique :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

L'analogie avec l'énergie électrique, développée dans le chapitre C-II sur les conducteurs à l'équilibre n'aura pas échappé à notre fidèle lecteur.

Compte tenu de la relation entre flux et intensité, soit :

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

on peut aussi écrire :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2)$$

Remarque : pour un circuit unique, la même méthode conduit bien sûr à $\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L I^2$.

3.b Localisation de l'énergie.

Prenons l'exemple de deux circuits filiformes parcourus respectivement par des intensités I_1 et I_2 qui gèrent simultanément un champ magnétique et une énergie magnétique. Nous allons tenter de lier l'énergie au champ en affectant à chaque volume élémentaire de l'espace une énergie liée au champ qui y règne. Pour y parvenir, il nous faut partager l'énergie totale que nous prendrons sous la forme $\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2)$ de façon pertinente.

La première étape de la démarche consiste à considérer l'espace comme une juxtaposition de tous les tubes de champ. La figure 14 p. 29 en montre un dans le cas particulier où il traverse les deux circuits. Le champ magnétique est à flux conservatif, c'est-à-dire, entre autres que le flux à travers le tube de champ est constant tout au long du tube, notons le $\delta_2 \Phi$. Si le tube traverse le premier circuit, il y découpe une surface traversé par ce flux qui est donc la contribution du tube à Φ_1 (sur le schéma, on a fait figurer un $\delta_2 \Phi_1$ égal donc à $\delta_2 \Phi$ et même chose s'il traverse le second. Affectons donc à chaque tube l'énergie élémentaire

- $\frac{1}{2} I_1 \delta_2 \Phi_1 = \frac{1}{2} I_1 \delta_2 \Phi$ s'il ne traverse que le premier circuit
- $\frac{1}{2} I_2 \delta_2 \Phi_2 = \frac{1}{2} I_2 \delta_2 \Phi$ s'il ne traverse que le second
- $\frac{1}{2} (I_1 \delta_2 \Phi_1 + I_2 \delta_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \delta_2 \Phi$ s'il traverse les deux

Quelques secondes de réflexion suffisent à se convaincre que la somme sur tous les tubes de leurs énergies reconstitue le bon résultat.

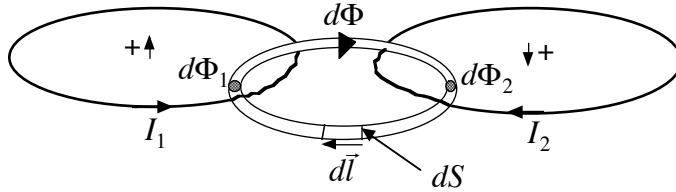


FIGURE 14 – Transformateur-3.

Nous résumerons les trois formules possibles en une seule :

$$\delta_2 \mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} I_{\text{enlacée}} \delta_2 \Phi$$

où $I_{\text{enlacée}}$ vaut respectivement I_1 , I_2 ou $I_1 + I_2$ dans les trois cas.

Poursuivons. Le théorème d'Ampère appliqué à une ligne de champ (donc \vec{B} et \vec{dl} sont parallèles et on les remplace par leurs normes) de l'un des tubes affirme que :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint B dl = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

donc que pour le tube :

$$\delta_2 \mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2 \mu_0} \delta_2 \Phi \oint B dl$$

Il est dès lors naturel d'affecter à une portion de tube de champ de longueur dl l'énergie élémentaire :

$$\delta_3 \mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \delta_2 \Phi B dl$$

puisque par sommation, l'on retrouve le bon total.

Si $d_2 S$ est l'aire d'une section droite de ce tube, par définition, le flux est $\delta_2 \Phi = B d_2 S$ et l'énergie élémentaire est :

$$\delta_3 \mathcal{E}_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0} d_2 S dl$$

On y reconnaît le volume de la portion de tube $d_3 V = d_2 S dl$ et l'on peut donc finalement justifier l'existence d'une *densité volumique d'énergie magnétique*, traditionnellement notée u_M dont la définition et l'expression sont :

$$u_M = \frac{\delta_3 \mathcal{E}_{mag}}{d_3 V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

On n'oubliera pas de relire dans le chapitre C-II sur les conducteurs à l'équilibre le paragraphe qui justifie une densité volumique d'énergie électrique d'expression $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

Par exemple, on a vu plus haut que l'inductance d'un solénoïde de N spires de surface S réparties sur une longueur ℓ est $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$ et s'il est parcouru par un courant I son énergie est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{2\ell}$$

Or le champ qu'il crée est, en bonne approximation, constant et égal à $B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$ à l'intérieur de volume $V = S \ell$ et nul ailleurs. L'approche par la densité volumique d'énergie donne :

$$\mathcal{E} = V u_M = V \frac{B^2}{2\mu_0} = S \ell \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N I}{\ell} \right)^2 = \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{2\ell}$$

On retrouve bien la même expression, ce qui assure de la cohérence entre les deux approches.

Remarque : par identification entre l'approche matricielle et l'approche par densité volumique, on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

ce qui assure que la forme quadratique est strictement positive, sauf si \vec{B} est partout nul, auquel cas elle est nulle. Les mathématiciens affirment dans leur cours sur les formes

quadratiques qu'alors le déterminant de la matrice est positif ou nul¹⁴ soit ici :

$$L_1 L_2 - M^2 \geq 0$$

On en déduit la propriété affirmée plus haut : $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$.

3.c Application aux lignes coaxiales.

Appliquons ce qui précède à un câble coaxial parce que cet objet technologique est d'un usage fréquent. Il est formé d'un conducteur intérieur cylindrique de rayon a et d'un conducteur extérieur cylindrique de même axe, creux de rayon intérieur b et de rayon extérieur $b + e$; nous supposons ici pour alléger les calculs que $e \ll b$ (voir figure 15 p. 31). Le conducteur intérieur est parcouru par l'intensité I et le conducteur extérieur par la même intensité mais en sens inverse. Pour l'instant, les conducteurs sont séparés par du vide (voir remarque finale).

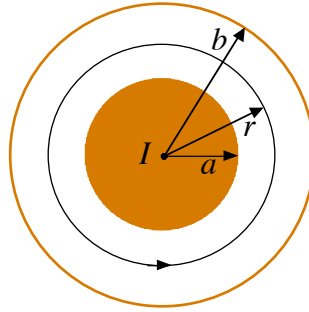


FIGURE 15 – Câble coaxial.

Le théorème d'AMPÈRE appliqué à un cercle dont l'axe est celui des cylindres et de rayon r compris entre a et b permet de calculer le champ magnétique entre les conducteurs ; on passe les calculs de routine et l'on arrive à :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{e}_\theta$$

.

Si l'on applique cette méthode pour $r > b$, on trouve un champ nul car le courant enlacé est somme de deux courants de même intensité en des sens contraires.

14. Impossible de le démontrer brièvement dans le cas général. Dans le cas de deux circuits, en posant $x = \frac{I_1}{I_2}$, on a :

$$\mathcal{E}_{mag} = I_2^2 (L_1 x^2 + 2 M x + L_2)$$

Le contenu de la parenthèse est un binôme toujours positif donc sans racines, donc de discriminant négatif ; ce discriminant $\Delta = 4 M^2 - 4 L_1 L_2$ est quatre fois l'opposé du déterminant de la matrice qui est donc positif.

Si l'on applique au cas $r < a$, on est coincé par le fait que l'on ne sait pas comment se répartit le courant dans le conducteur. On montrera dans le chapitre C-XIII sur les ondes électromagnétiques dans la matière au paragraphe concernant les conducteurs, qu'en très basse fréquence, en particulier en régime permanent, le vecteur densité de courant est uniforme. Dès lors l'intensité enlacée est proportionnelle à l'aire soit $I_{\text{enlacée}} = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$. On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{enlacée}}}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$$

Calculons l'énergie contenue par unité de longueur, l'énergie linéique donc, de coaxial par intégration de l'énergie entre r et $r + dr$:

$$\mathcal{E}_{\text{lin.}} = \int \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr$$

soit en reportant les expressions de B par zone de validité :

$$\mathcal{E}_{\text{lin.}} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_0^a \frac{r^3}{a^4} dr + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right)$$

Par identification avec $\mathcal{E}_{\text{lin.}} = \frac{1}{2} L_{\text{lin.}} I^2$, on trouve l'inductance linéique d'un tel coaxial, soit :

$$L_{\text{lin.}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right)$$

ce qui est un exemple de calcul énergétique de l'inductance, annoncé plus haut pour résoudre la contradiction du modèle filiforme.

Pour les hautes fréquences, le courant est limité dans une faible épaisseur en surface des conducteurs, à l'intérieur desquels le champ devient donc nul, on arrive alors à :

$$L_{\text{lin.}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Pour un coaxial tel que $\frac{b}{a} = 5$ le rapport des inductances en basse et haute fréquence est :

$$\frac{L_{HF}}{L_{BF}} = \frac{\ln 5}{\ln 5 + 0,25} = 0,87$$

La variation est nette mais l'ordre de grandeur est le même.

Remarque 1 : le même dispositif peut être vu comme un condensateur cylindrique ; on a calculé sa capacité linéique dans le chapitre sur les conducteurs à l'équilibre ; c'est :

$$C_{\text{lin.}} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

On a donc la relation valable en haute fréquence :

$$L_{\text{lin.}} C_{\text{lin.}} = \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

importante pour le calcul de la vitesse de propagation (ce sera c) de phénomènes haute-fréquence dans un coaxial.

Remarque 2 : pratiquement, on est obligé de placer un isolant entre les conducteurs, il faut remplacer μ_0 par $\mu = \mu_0 \mu_r$ et ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ (voir chapitre C-XII sur l'électromagnétisme dans la matière).

3.d Application au calcul des interactions.

• La méthode

On se place ici encore dans le cas de deux circuits couplés ; il sera aisé au lecteur de généraliser à un nombre n de circuits.

Imaginons que l'on déplace le second circuit, en translation ou en rotation voire les deux mais sans déformation, en maintenant, par un dispositif à préciser les deux intensités constantes. Dans l'expression de l'énergie, les intensités sont fixes, les auto-inductances aussi car les circuits ne se déforment pas ; par contre la mutuelle inductance varie à cause du mouvement relatif. Dans un déplacement élémentaire à vitesse infiniment lente de sorte que l'énergie cinétique soit négligeable l'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$ varie donc de :

$$d\mathcal{E} = dM I_1 I_2$$

Une partie de cette énergie, déduction faite de l'effet JOULE rétrocedé au milieu extérieur sous forme thermique, est fournie de façon électrique par des générateurs asservis de sorte que l'intensité soit constante (cf supra). Pour le premier circuit, le générateur fournissant une différence de potentiel U_1 doit vérifier, dans les conditions de l'expérience de pensée :

$$U_1 = R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} = R_1 I_1 + \frac{d}{dt}(L_1 I_1 + M I_2) = R_1 I_1 + \frac{dM}{dt} I_2$$

La puissance nette, déduction faite de l'effet JOULE est donc

$$\mathcal{P}_1 = U_1 I_1 - R_1 I_1^2 = + \frac{dM}{dt} I_2 I_1$$

et l'énergie élémentaire fournie par le premier générateur est :

$$d\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}_1 dt = dM I_1 I_2$$

De la même façon, on montre que le second générateur fournit :

$$d\mathcal{E}_2 = \mathcal{P}_1 dt = dM I_1 I_2$$

Enfin le reste de l'énergie est fournie par le travail l'opérateur qui déplace le circuit. Comme ce déplacement se fait de façon infiniment lente, c'est que la force de l'opérateur et celle que le premier circuit exerce sur le second sont exactement opposés donc que le travail $\delta W_{\text{op.}}$ de l'opérateur et celui $\delta W_{1 \rightarrow 2}$ de la force d'interaction aussi. On a donc successivement :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2 + \delta W_{\text{op.}} = d\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2 - \delta W_{1 \rightarrow 2}$$

$$dM I_1 I_2 = dM I_1 I_2 + dM I_1 I_2 - \delta W_{1 \rightarrow 2}$$

$$\delta W_{1 \rightarrow 2} = dM I_1 I_2 = d\mathcal{E}_{I=\text{Ctes}}, \text{ sans déform.}$$

où la dernière expression rappelle les conditions de l'expérience de pensée (circuits indéformables et courants constants).

Si le mouvement envisagé est une translation de vecteur \vec{dl} sans rotation, alors $\delta W_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{dl}$ et :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{dl} = d\mathcal{E}_{I=\text{Ctes}}, \text{ sans déform.}$$

d'où

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = + \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E} \Big|_{I=\text{Ctes}, \text{ sans déform.}}$$

où l'on a insisté sur le signe positif inhabituel, celui que l'on a trouvé dans le chapitre A-II sur les conducteurs à l'équilibre dans un déplacement imaginaire d'un conducteur à potentiels constants (là aussi les générateurs interviennent et provoquent l'apparition de ce signe positif).

• Un exemple.

On a vu, dans le chapitre C-III sur la magnétostatique, qu'une spire circulaire de centre O , d'axe Oz , de rayon R , parcourue par un courant I crée en un point P de son axe, repéré par $z = OP$, un champ magnétique :

$$\vec{B}(z) = B(z) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Plaçons une petite spire de centre P sur Oz , d'axe Oz , de rayon r très petit devant R , parcourue par un courant i . Calculons le flux envoyé par la première spire à travers la seconde (on choisit le disque comme surface de calcul) en considérant le champ créé par la première comme uniforme car la seconde est suffisamment petite ; on a donc :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \pi r^2 \vec{e}_z \cdot \vec{B}(z) = \pi r^2 B(z) = \frac{\pi \mu_0 I R^2 r^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Par définition, le coefficient de mutuelle inductance M est tel que $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M I$, d'où

$$M = \frac{\pi \mu_0 R^2 r^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Par symétrie la force exercée par la première spire sur la seconde est portée par Oz et les formules du paragraphe précédent par projection sur cet axe donne :

$$F_{1 \rightarrow 2} = + \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right|_{I=\text{Ctes, sans déform.}} = \frac{\partial M}{\partial z} I i = - \frac{3 \pi \mu_0 I i z R^2 r^2}{2(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

Remarque 1 : comme souvent en physique, seuls de rares cas de grande symétrie permettent le calcul explicite. Il ne faut toutefois pas pour autant bannir l'usage de la théorie : c'est elle qui permet de vérifier la validité des théories et de concevoir les applications technologiques.

Remarque 2 : bien que l'on ne sache pas calculer le champ créé par la seconde spire en dehors de son axe, donc a fortiori le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ qu'elle envoie à travers la première, la symétrie de la matrice inductance permet d'affirmer que :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i = \frac{\pi \mu_0 i R^2 r^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

• Lien avec la force de Laplace.

Bien entendu, cette méthode est une alternative à l'utilisation de la force de LAPLACE qui est souvent plus aisée à mettre en œuvre. Dans l'exemple précédent $F_{1 \rightarrow 2} = \oint i \vec{dl} \wedge \vec{B}$ où \vec{B} est le champ créé par la première spire au niveau de la seconde, en tant que cercle et non plus de disque, c'est-à-dire à une distance r de l'axe. On a vu, dans le chapitre C-III sur la magnétostatique, que la première spire y crée un champ avec une composante parallèle à Oz qui génère une force radiale dont le bilan est nul par symétrie et une composante radiale donnée par la formule :

$$B_r(z, r) = - \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{3 \mu_0 I z R^2 r}{4(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

On en déduit :

$$F_{1 \rightarrow 2} = i \oint dl \vec{e}_\theta \wedge B(r, z) \vec{e}_r = -i 2 \pi r B(r, z) \vec{e}_z = - \frac{3 \pi \mu_0 I i z R^2 r^2}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \vec{e}_z$$

qui est bien le résultat précédent.

• **Calcul de moments dynamiques.**

La méthode énergétique permet non seulement de calculer des forces mais aussi des moments. Si au lieu de déplacer le second circuit, on le fait tourner d'un angle $d\theta$ autour d'un axe Δ , le travail élémentaire est $\delta W_{1 \rightarrow 2} = \mathcal{M}_\Delta d\theta$ où \mathcal{M}_Δ est la projection sur Δ du moment dynamique calculé en un point de Δ et l'on a donc en adaptant la formule générale :

$$\delta W_{1 \rightarrow 2} = \mathcal{M}_\Delta d\theta = dM I_1 I_2 = d\mathcal{E}_{I=Ctes, \text{ sans déform.}}$$

Prenons un exemple : le premier circuit est un solénoïde créant un champ uniforme noté $\vec{B}_1 = k I_1 \vec{e}_z$ (où $k = \mu_0 N$ mais peu importe). Un second circuit est donc traversé par le flux :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot \iint d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S} = k I_1 S \cos \theta$$

où θ est l'angle entre le champ et le vecteur surface du second circuit.

La mutuelle induction est donc $M = k S \cos \theta$ et donc le terme interactif de l'énergie $\mathcal{E} = M I_1 I_2 = k S I_1 I_2 \cos \theta$.

Une rotation du circuit autour de l'axe qui porte \vec{S} laisse ce vecteur inchangé, donc le moment dynamique n'a pas de composante sur cet axe. Une rotation du circuit autour de l'axe qui porte \vec{B}_1 laisse $\cos \theta$ inchangé, donc le moment dynamique n'a pas de composante sur cet axe. Il est donc perpendiculaire à \vec{S} et \vec{B}_1 . Une rotation autour de cette direction conduit à :

$$\mathcal{M}_\Delta d\theta = d\mathcal{E} = k S I_1 I_2 d \cos \theta = -k S I_1 I_2 \sin \theta d\theta$$

d'où :

$$\mathcal{M}_\Delta = -k S I_1 I_2 \sin \theta$$

que l'on peut formuler ainsi :

$$\vec{\mathcal{M}}_\Delta = I_2 \vec{S} \wedge \vec{B}_1$$

Ce moment tend à faire tourner le second circuit, mais pas toujours dans le même sens ; ainsi conçu, le dispositif est impropre à fonctionner comme moteur électrique. Patience, nous y reviendrons dans quelques instants.

3.e Cas des courants volumiques en régime permanent.

Citons pour mémoire une autre formulation de l'énergie magnétique, mais uniquement valable en régime permanent. On part de $\mathcal{E}_{mag} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{B^2}{2\mu_0} dV$ puis on utilise une formule d'analyse vectorielle appliquée au potentiel-vecteur et au champ magnétique :

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

Or $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ et, en régime permanent $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (voir chapitre C-VIII sur les équations de MAXWELL, c'est une formulation locale du théorème d'AMPÈRE), d'où :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}^2 - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{A}$$

On en déduit, en utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI :

$$\mathcal{E}_{mag} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} dV + \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

où l'intégrale double de surface porte une sphère de rayon infini, on y est, sauf situation particulière, loin des courants, donc elle est nulle¹⁵ d'où :

$$\text{En régime permanent, } \mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} dV$$

On remarquera l'analogie avec l'électrostatique (chapitre A-II) où :

$$\mathcal{E}_{elec.} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho V dV$$

où V est le potentiel électrique et dV le volume élémentaire.

4 Couplages électro-mécaniques.

4.a La nature du couplage.

En présence d'un champ magnétique connu, uniforme ou non, stationnaire ou non, un circuit filiforme susceptible de se déplacer selon au moins un degré de liberté, le plus souvent en rotation autour d'un axe, sera soumis à des phénomènes d'induction magnétique, en partie liés à son mouvement, générant une tension électromotrice qui provoque le passage d'une intensité ou modifie l'intensité déjà présente. Par ailleurs les forces de LAPLACE liées à l'intensité qui le traverse, vont mettre en mouvement le circuit ou modifier le mouvement déjà présent.

Dans ce genre de situation, il y a deux inconnues : le mouvement du circuit et l'intensité qui le traverse et pour résoudre le problème ainsi posé, il y a deux équations l'une qui résulte des lois de la mécanique et tient compte des forces de LAPLACE et l'autre qui résulte des lois de l'électrocinétique et tient compte des tensions électromotrices d'induction.

D'un point de vue énergétique, il y a transformation d'énergie électrique en énergie mécanique (on a affaire à un moteur) ou l'inverse (il s'agit alors d'une génératrice).

Il est impossible de passer en revue toutes les situations qui relèvent de ce type de couplage tant il y en a ; nous nous contenterons de deux exemples significatifs.

¹⁵. Au loin, le potentiel-vecteur est dipolaire en $\frac{1}{r^2}$ et le champ en $\frac{1}{r^3}$, la surface totale est en $4\pi r^2$ donc un produit en $\frac{1}{r^3}$ qui tend bien vers zéro.

4.b Le haut-parleur électrodynamique.

- Description du dispositif.

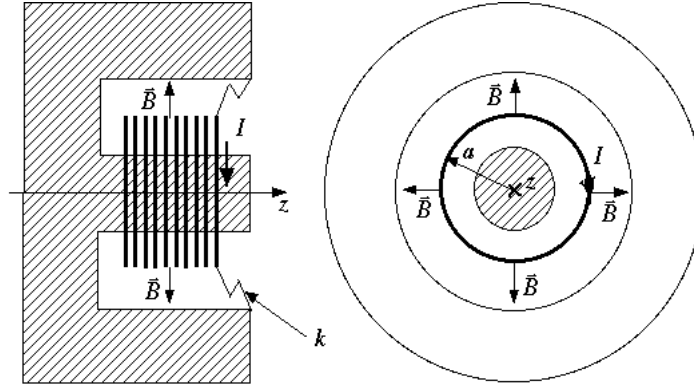


FIGURE 16 – Haut-parleur électrodynamique.

Une bobine de masse m composée de N spires circulaires coaxiales d'axe Oz et de rayon a est mobile en translation selon l'axe Oz horizontal ; une membrane exerce sur la bobine une force de rappel de raideur k et l'onde sonore qu'elle génère provoque un amortissement modélisé par une force de frottement fluide de coefficient λ . Elle est plongée dans l'entrefer d'un aimant permanent qui crée un champ magnétique radial vers l'extérieur soit $B \vec{e}_r$. On note z le déplacement de la bobine et I l'intensité électrique qui la traverse, le sens positif du courant est le sens orthoradial défini par la règle du tire-bouchon appliquée à Oz . Dans ce genre d'étude, il est essentiel de préciser les sens positifs du courant et du déplacement, faute de quoi on s'expose à de graves déboires. La figure 16 p. 38 nous y aide¹⁶.

- Equation mécanique.

La force de LAPLACE est :

$$\vec{F}_L = \int I dl \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_r = -IB \int dl \vec{e}_z = -2N\pi a BI \vec{e}_z$$

En projection sur l'axe Oz , l'équation du mouvement est donc :

$$m \ddot{z} = -kz - \lambda \dot{z} - 2N\pi a BI$$

soit :

$$\boxed{m \ddot{z} + \lambda \dot{z} + kz = F_L = -2N\pi a BI}$$

16. On rappelle que la vue de gauche se dessine à droite.

• **Equation électrique.**

Appelons R et L la résistance et l'inductance de la bobine, supposée alimentée par un générateur de force électromotrice E ; en notant e la force électromotrice d'induction, le schéma électrique équivalent est celui de la figure 17 p. 39.

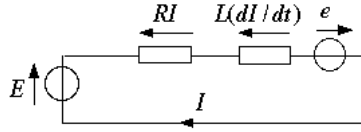


FIGURE 17 – Haut-parleur : schéma électrique.

d'où $E = RI + L (dI/dt) - e$. Or on calcule e par :

$$e = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int (\dot{z} \vec{e}_z \cdot B \vec{e}_r) \cdot dl \vec{e}_\theta = \dot{z} B \int \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = \dot{z} B \int dl = 2 N \pi a B \dot{z}$$

Remarquons au passage qu'on retrouve la condition de couplage parfait :

$$\mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{élec} = eI + F_L \dot{z} = 2 N \pi a B \dot{z} I - 2 N \pi a B I \dot{z} = 0$$

L'équation électrique est donc :

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} - 2 N \pi a B \dot{z}$$

• **Fonction de transfert et impédance motionnelle.**

Notons $\alpha = 2 N \pi a B$ qui est un coefficient de couplage. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} m \ddot{z} + \lambda \dot{z} + k z = -\alpha I \\ E(t) = RI + L \frac{dI}{dt} - \alpha \dot{z} \end{cases}$$

En régime sinusoïdal, on en déduit pour les valeurs complexes, indiquées par un soulignement :

$$\begin{cases} (k + j \lambda \omega - m \omega^2) \underline{z} = -\alpha \underline{I} \\ \underline{E} = (R + j L \omega) \underline{I} - j \alpha \omega \underline{z} \end{cases}$$

On en déduit aisément une relation donnant l'intensité :

$$\underline{E} = Z \underline{I}$$

avec :

$$Z = R + jL\omega + \frac{j\alpha^2\omega}{(k + j\lambda\omega - m\omega^2)}$$

On voit que l'impédance classique est corrigée par un terme provenant du couplage et appelé *impédance motionnelle*.

On en tire aussi une équation donnant le mouvement (c'est ce que l'on cherche à obtenir) provoqué par l'alimentation électrique :

$$\underline{z} = \mathcal{H}(j\omega) \underline{E}$$

avec, pour fonction de transfert :

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{-\alpha}{(k + j\lambda\omega - m\omega^2)(R + jL\omega) - j\alpha^2\omega}$$

Voici un exemple de tracé de $G(\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|$ en fonction de ω avec des valeurs arbitraires (figure 18 p. 40).

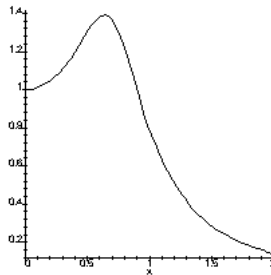


FIGURE 18 – Haut-parleur : fonction de transfert.

Cette courbe n'est pas très bonne, on aimerait une courbe la plus plate possible jusqu'à la fréquence maximale audible par l'oreille humaine et ça c'est tout un art.

4.c Un moteur à champ tournant.

• Champ tournant.

Deux paires de bobines de HELMHOLTZ ont leur axes concourant (au point O), coplanaires (plan xOy) et orthogonaux. On prend leurs axes comme axes Ox et Oy . Les deux bobines sont parcourues respectivement par deux courants sinusoïdaux de même pulsation, de même amplitude mais en quadrature, soit

$$I_1 = I_M \cos(\omega t) \quad I_2 = I_M \sin(\omega t)$$

On rappelle que chacune des bobines crée un champ quasiment uniforme, parallèle à son axe et proportionnel au courant qui la parcourt, en $B = \alpha I$ où α est une constante dont l'expression importe peu dans cet exercice.

Le champ total est

$$\vec{B} = \alpha (I_1 \vec{e}_x + I_2 \vec{e}_y) = \alpha I_M [\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y]$$

ce qui est manifestement l'expression d'un champ magnétique uniforme, de module constant $B_0 = \alpha I_M$, dans le plan xOy et faisant avec Ox un angle ωt , donc une direction tournant avec la vitesse angulaire uniforme ω ; c'est ce qu'on appelle un champ tournant.

En pratique, EDF alimente la France en courant triphasé qui donne automatiquement trois courants déphasés de 120° et l'on obtient le champ tournant avec trois bobines d'axes coplanaires espacés de 120° les uns des autres. La justification est plus calculatoire.

• Exemple du moteur asynchrone.

On place une petite bobine constituée de N spires de surface S de vecteur normal \vec{n} dans un champ magnétique uniforme tournant \vec{B} de norme B_0 constante et dont la direction, de vecteur unitaire \vec{u} , reste dans le plan xOy et fait avec Ox l'angle ωt . On envisage pour la bobine la possibilité d'une rotation uniforme de son vecteur normal \vec{n} dans le plan xOy , en faisant avec Ox l'angle $\omega' t$ avec $\omega' \neq \omega$. On note R la résistance de la bobine et, aux fréquences utilisées (50 hZ), l'effet de son inductance peut être négligé.

Le vecteur surface total de la bobine est $NS \vec{n}$ et le flux qui la traverse dans le champ uniforme est

$$\begin{aligned} \Phi &= NS B_0 \vec{n} \cdot \vec{u} = NS B_0 [\cos(\omega' t) \vec{e}_x + \sin(\omega' t) \vec{e}_y] \cdot [\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y] = \\ &NS B_0 [\cos(\omega' t) \cos(\omega t) + \sin(\omega' t) \sin(\omega t)] = NS B_0 \cos[(\omega' - \omega) t] = \\ &NS B_0 \cos[(\omega - \omega') t] = NS B_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

avec $\Omega = \omega - \omega'$

L'équation électrique du circuit conduit successivement à :

$$RI = e = -\frac{d\Phi}{dt} = NS B_0 \Omega \sin(\Omega t)$$

$$I = \frac{NS B_0 \Omega}{R} \sin(\Omega t)$$

On a vu plus haut qu'une bobine (pour N tours, la surface totale est $S_{\text{tot.}} = NS$) subit

de la part du champ un couple $\vec{\Gamma} = I \vec{S}_{\text{tot.}} \wedge \vec{B}$, soit ici :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= N S I B_0 \vec{n} \wedge \vec{u} = \\ & N S I B_0 [\cos(\omega' t) \vec{e}_x + \sin(\omega' t) \vec{e}_y] \wedge [\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y] = \\ & N S I B_0 [\cos(\omega' t) \sin(\omega t) - \sin(\omega' t) \cos(\omega t)] \vec{e}_z = \\ & N S I B_0 \sin[(\omega - \omega') t] \vec{e}_z = N S I B_0 \sin(\Omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où en y reportant la conclusion de l'équation électrique et en projection sur l'axe :

$$\Gamma_z = \frac{N^2 S^2 B_0^2 \Omega}{R} \sin^2(\Omega t)$$

Ce couple non constant est nuisible à la longévité du moteur, aussi solidarise-t-on deux bobines tournant autour du même axe mais orthogonales (ou trois à 120° les unes des autres, le résultat est le même, le calcul plus long) ; le couple devient :

$$\Gamma_z = \frac{N^2 S^2 B_0^2 \Omega}{R} \left[\sin^2(\Omega t) + \sin^2\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{N^2 S^2 B_0^2 \Omega}{R}$$

qui est cette fois constant.

Le couple n'est positif donc moteur que si $\Omega = \omega - \omega' > 0$ soit $\omega' < \omega$, c'est-à-dire que si la bobine tourne moins vite que le champ. La vitesse de rotation n'est pas celle du champ d'où le nom d'« asynchrone ».

En régime permanent, le couple moteur doit être égale à la valeur absolue du couple exercée par l'outil, notée Γ_r ; on a donc

$$\frac{N^2 S^2 B_0^2 (\omega - \omega')}{R} = \Gamma_r$$

Si Γ_r augmente, il en est de même pour $\omega - \omega'$, donc, ω étant fixé, ω' diminue. Donc quand le couple résistant augmente, le moteur tourne moins vite.

Bien sûr, le moteur devant tourner à une vitesse positive, le couple résistant ne pourra pas dépasser la valeur :

$$\Gamma_{max} = \frac{N^2 S^2 B_0^2 \omega}{R}$$

sinon le moteur cale.