Chapitre C-IX

Mouvements de charges dans un champ électromagnétique.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Après avoir montré pourquoi le mouvement d'une charge électrique ponctuelle dans un champ électro-magnétique donné est un problème généralement impossible à résoudre, on se penche sur quelques cas simples.

Le mouvement d'une charge dans un champ électrique et/ou magnétique uniforme et stationnaire ne soulève pas de difficulté. Dans des champ stationnaires mais non uniformes, on arrive à dégager des tendances, les plus intéressantes sont les effets de dérive et de bouteille magnétique.

On s'intéresse aux applications technologiques : accélérateur linéaire, lentille électrostatique, chambre à bulles ou à brouillard, cyclotron, spectromètre de masse, filtre de vitesse, piègeage d'un particule (piège de Penning).

On se penche aussi sur les effets relativistes, en particulier sur la nécessité du synchrocyclotron.

On étudie enfin deux des rares cas simples d'écoulement de charges, l'un est unidirectionnel et stationnaire, la diode à vide, l'autre relève de la magnéto-hydrodynamique (ou MHD) et se cantonne à la recherche d'ondes planes sinusoïdales après linéarisation aux faibles amplitudes.

Table des matières

C-IX Mouvements de charges dans un champ électromagnétique. 1

1 L'impossible mission et ce qui reste accessible. 4

1.a Le vice de forme initial. 4

1.b L'équation insoluble. 4

1.c Que faire ? 4

2 Mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique stationnaire. 5

2.a Mouvement dans un champ électrique uniforme et stationnaire. . 5

2.b Mouvement dans un champ électrique stationnaire non uniforme. Lentille électrostatique. Accélérateur linéaire. 5

2.c Mouvement dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Cyclotron. Spectromètre de masse. 8

2.d Deux exemples de mouvement dans un champ magnétique stationnaire non uniforme. Vitesse de dérive. Bouteille magnétique. . . 10

2.e Un exemple de mouvement dans un champ électromagnétique uniforme et stationnaire. Filtre de vitesse. 16

2.f Un exemple de mouvement dans un champ électromagnétique stationnaire non uniforme. Piège de Penning. 17

2.g Cas des particules relativistes. 20

3 Exemples d'écoulement de charges. 23

3.a Un exemple unidirectionnel stationnaire : la diode à vide. 23

3.b Un exemple d'ondes planes progressives sinusoïdales en magnétohydrodynamique. 26

1 L'impossible mission et ce qui reste accessible.

1.a Le vice de forme initial.

L'usage est de commencer doucettement par le mouvement d'une particule chargée unique dans un champ électrique uniforme et stationnaire puis un champ magnétique uniforme et stationnaire, puis de superposer les deux et enfin d'apporter quelques complications.

Cela ne me paraît guère honnête et je préfère prendre le point de vue diamétralement opposé : montrer pourquoi, en général, on ne peut pas résoudre explicitement le mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique donné. Ensuite, on pourra enfin se poser la bonne question à savoir : dans quel(s) cas, peut-on se hasarder à tenter quelque chose ?

1.b L'équation insoluble.

Quand on étudie le mouvement d'une charge ponctuelle q de masse m plongée dans un champ électromagnétique (champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ et champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$) ni forcément uniforme, ni forcément stationnaire et considéré comme donnée du problème, l'équation du mouvement est simple : la charge est soumise à la force de Lorentz. En notant $M(t)$ sa position à l'instant t repérée dans un repère galiléen $Oxyz$ et $\overrightarrow{v}$ sa vitesse, on a :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Malheureusement, il faut comprendre cela ainsi :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = q\,\left[\overrightarrow{E}(M(t),t) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{B}(M(t),t)\right]$$

et la fonction inconnue $M(t)$ intervient comme argument de fonctions quelconques non précisées. Il n'y a pas de méthode de résolution explicite dans ce type de situation.

1.c Que faire ?

On devra se contenter de peu, une remarque énergétique dans un contexte stationnaire, une résolution rigoureuse dans de rares cas extrêmement simples, des tendances dans des cas un peu moins simples et remplacés par des situations idéalisées (voir plus loin).

On sera un peu plus armé si l'on étudie non pas une charge unique mais tout un écoulement de charges car alors, on pourra ressortir tous les outils conceptuels de la mécanique des fluides, en particulier le point de vue eulérien (voir le chapitre B-XIII). Mais le risque est alors que le champ magnétique créé par le courant de ces charges ne vienne modifier le champ magnétique préexistant et nous oblige à aborder le redoutable domaine de la magnétohydrodynamique (voir paragraphe 3.b p. 26).

2 Mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique stationnaire.

On ne traitera que de quelques exemples dans des situations diverses ; on les a choisis si possible avec un intérêt astronomique ou technologique.

2.a Mouvement dans un champ électrique uniforme et stationnaire.

Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est constant dans le temps et l'espace (on le note $\overrightarrow{E}_0$), le champ magnétique est supposé nul. L'équation du mouvement est :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = q\,\overrightarrow{E}_0$$

C'est formellement la même équation que le mouvement d'une masse dans un champ de pesanteur uniforme. On obtient avec une vitesse initiale non nulle un mouvement parabolique.

Que voulez-vous de plus [1] ?

2.b Mouvement dans un champ électrique stationnaire non uniforme. Lentille électrostatique. Accélérateur linéaire.

• Une analogie optique.

En régime stationnaire le champ électrique $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel électrique V (soit $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$), donc la force électrostatique $\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{E}$ qu'exerce ce champ sur une charge ponctuelle de charge q (et de masse m) dérive de l'énergie potentielle $U = q\,V$ puisque $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$.

En l'absence d'autres forces, le théorème de l'énergie mécanique entraîne que celle-ci est une constante, soit $E = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{v}^2 + q\,U = Cte$.

Si la charge est créée par ionisation en un point O avec une vitesse négligeable et si on prend l'origine des potentiels nulle en ce point, alors $E = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{v}^2 + q\,V = 0$. Certes, ça ne nous donne pas la trajectoire, mais comme d'habitude avec les théorèmes énergétiques, on connaît la vitesse en fonction de la position et ça n'est pas si mal. On remarque au passage que si q est positif, V doit être négatif et vice-versa.

Essayons d'aller plus loin : la figure 1 p. 6 montre, dans le cas où le problème peut se ramener à un problème plan (plan méridien dans le cas d'une symétrie de révolution et plan orthogonal à un axe d'invariance par translation), deux courbes équipotentielles correspondant à deux valeurs infiniment proches du potentiel notées V et V'. On a dessiné

1. « *What else ?* » si vous êtes accro aux capsules qui coûtent deux fois plus cher que le café moulu.

une normale commune en un point de la première équipotentielle (on y a placé, uniquement pour faire joli, le centre de courbure C) qui donne la direction du champ électrique $\overrightarrow{E}$ en ce point, orienté dans le sens des potentiels décroissants (la figure est donc telle que $V > V'$).

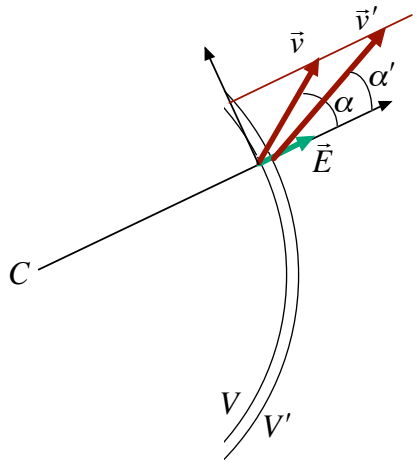

FIGURE 1 – Réfraction électrostatique.

Soit une particule de charge q traversant la première équipotentielle en ce point en faisant un angle α avec la normale ; on note $\overrightarrow{v}$ sa vitesse et v le module (la norme) de celle-ci et ses composantes normale et tangentielle sont respectivement $v\,\cos\alpha$ et $v\,\sin\alpha$; la particule traverse ensuite l'équipotentielle infiniment proche avec une vitesse $\overrightarrow{v}'$ de module et de composantes v', $v'\,\cos\alpha'$ et $v'\,\sin\alpha'$ où α' est l'angle avec la normale, commune aux deux surfaces car elles sont infiniment proches. Entre ces deux points, le champ électrique est normal, donc aussi la force et donc aussi la variation vectorielle de vitesse ; la composante tangentielle est donc inchangée et l'on a donc $v\,\sin\alpha = v'\,\sin\alpha'$. Dans l'hypothèse de validité de la formule $E = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{v}^2 + q\,V = 0$ établie plus haut, on a respectivement, puisque sur la figure $v' > v$ et que, vu le sens de $\overrightarrow{E}$ on a aussi $V' < V$ et donc finalement que $V' < V < 0$ et q positif, $v = \sqrt{-\frac{2\,q\,V}{m}}$ et $v' = \sqrt{-\frac{2\,q\,V'}{m}}$. En reportant dans l'égalité $v\,\sin\alpha = v'\,\sin\alpha'$ et en simplifiant par $\sqrt{\frac{2\,q}{m}}$, on arrive à :

$$\sqrt{|V|}\,\sin\alpha = \sqrt{|V'|}\,\sin\alpha$$

qui serait valable aussi avec q négatif et des potentiels positifs. Bien évidemment, cela ressemble furieusement à la loi de SNELL-DESCARTES pour la réfraction où $\sqrt{|V|}$ joue le rôle d'indice de réfraction.

On s'est placé dans un contexte où la figure est plane, mais la démonstration reste valable dans toutes les situations au pris de minimes adaptations.

On voit donc qu'un problème de mouvement dans un champ électrique stationnaire est en tous points analogue à celui de la propagation de la lumière dans un milieu dont l'indice varie continûment (voir le chapitre D-V traitant des lois de l'optique géométrique).

• **Lentille électrostatique.**

Si l'on sait créer un potentiel électrique par morceaux, on pourra fabriquer des lentilles. En fait c'est facile si l'on se souvient que le potentiel est uniforme dans un conducteur creux à l'équilibre électrostatique dont la surface peut être remplacée, là vers où la charge se dirige, par un grillage à mailles assez larges qui la laissera passer, sauf malchance.

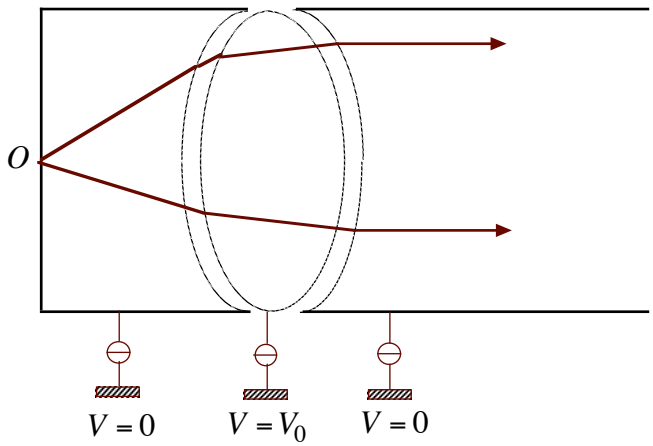

FIGURE 2 – Lentille électrostatique.

La figure 2 p. 7 montre ce que pourrait être une lentille de foyer objet O qui, à partir d'un flot l'électrons émis au point O dans toutes les directions formerait un faisceau d'électrons ayant tous la même direction. Cet exemple est naïf car il ne prévoit pas l'accélération des électrons. Dans la pratique, la focalisation est assurée par la combinaison subtile de champs électriques et magnétiques plutôt que ce système à grille totalement abandonné. Pour les dispositifs actuels, il y a trop de variantes pour les exposer ici.

• **Accélérateur linéaire**

L'application de loin la plus courante de cette étude reste l'accélérateur linéaire où une charge créée à un endroit est attirée vers un autre porté à un potentiel électrique élevé en valeur absolu, son signe dépendant de celui de la charge. C'est rustique donc fiable ; le seul défaut c'est que pour arriver à de grandes vitesses, il faut qu'il soit très long ; on verra à peu plus loin la solution apportée à ce petit détail.

2.c Mouvement dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Cyclotron. Spectromètre de masse.

Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est constant dans le temps et l'espace (on le note $\overrightarrow{B}_0$), le champ électrique est supposé nul. L'équation du mouvement est :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0}$$

Multiplions vectoriellement par $\overrightarrow{v}$, puisque $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v} = q\,(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0})\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

On en déduit que $v = \|\overrightarrow{v}\|$ est constant.

Choisissons l'axe Oz parallèle à $\overrightarrow{B}_0 = B_0\,\overrightarrow{e_z}$ et multiplions vectoriellement par $\overrightarrow{e_z}$, puisque $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{B}_0$ donc à $\overrightarrow{e_z}$, on a :

$$m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_z})}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{e_z} = q\,\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0}\right)\cdot\overrightarrow{e_z} = 0$$

On en déduit que v_z est constant, donc aussi, puisque $v = \|\overrightarrow{v}\|$, l'angle α que fait $\overrightarrow{v}$ avec Oz (avec cette notation $v_z = v\,\cos\alpha$).

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ tourne donc sans déformation (on veut dire à module ou norme constante) autour de Oz ; par analogie avec un solide, on a donc $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e_z}$ et ω égale à la vitesse angulaire de rotation. Par identification avec $m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0}$, on en déduit que ω est constant et vaut $\omega = -\frac{q\,B_0}{m}$, connue sous le nom de *pulsation cyclotron.* Abstraction faite du signe qui donne le sens de rotation, la fréquence est $f = \frac{|\omega|}{2\,\pi} = \frac{q\,B_0}{2\,\pi\,m}$ et la période $T = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B_0}$

En remarquant que la norme de la projection de $\overrightarrow{v}$ sur le plan xOy est $v\,\sin\alpha$, on donc, avec un bon choix de l'origine de temps :

$$\begin{cases} v_x = v\,\sin\alpha\,\cos\left(\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right) \\ v_y = v\,\sin\alpha\,\sin\left(\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right) \\ v_z = v\,\cos\alpha \end{cases}$$

En intégrant et avec un bon choix de l'origine du repère :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\omega}\,v\,\sin\alpha\,\cos(\omega\,t) \\ y = \frac{1}{\omega}\,v\,\sin\alpha\,\sin(\omega\,t) \\ z = v\,t\,\cos\alpha \end{cases}$$

où l'on reconnaît aisément un mouvement hélicoïdal.

Le rayon du mouvement projeté sur xOy est $R = \frac{1}{|\omega|}\, v = \frac{m\, v}{q\, B_0}$ et la mesure de ce rayon si la trajectoire est matérialisée par des bulles dans une *chambre à bulles* ou des gouttes dans une *chambre à brouillard* (voir le chapitre E-V sur les potentiels thermodynamiques) dans un champ magnétique connu donne accès à la vitesse donc l'énergie.

• **Cyclotron.**

La rotation induite par le champ magnétique permet de concevoir des accélérateurs plus compacts que les linéaires. Les charges tournent dans un conducteur creux (donc il y règne un champ électrique nul) en forme de boîte cylindrique de faible hauteur. Afin de réaliser une accélération, cette boîte est coupée en deux par un plan méridien et les deux moitiés en forme de lettre D (*dee* en anglais), sont écartées latéralement d'une faible distance et portées à une importante différence de potentiel qui crée dans le petit intervalle entre les demi-boîtes un champ accélérateur.

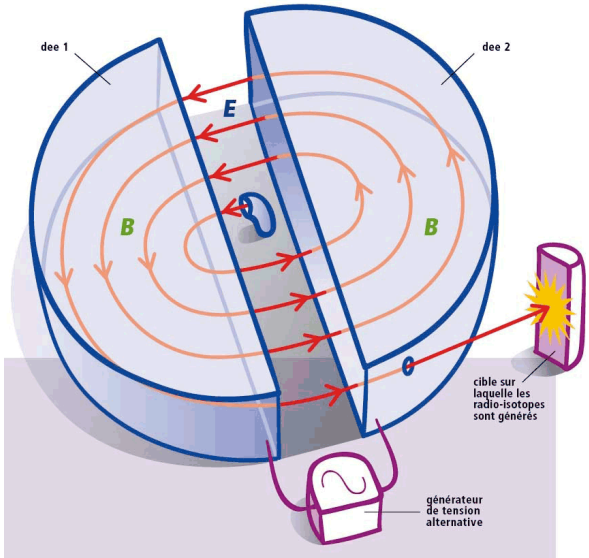

FIGURE 3 – Cyclotron.

Pour éviter qu'après un demi-tour, les charges traversent l'intervalle dans le sens inverse en étant donc décélérées, on inverse, suprême astuce, pendant ce demi-tour de signe de la différence de potentiel. C'est d'autant plus facile que la période de rotation $T = \frac{2\,\pi\, m}{q\, B_0}$ (cf supra) ne dépend pas de la vitesse de particule accélérée et qu'il suffit donc d'utiliser une différence de potentiel sinusoïdale de fréquence appropriée. Par contre le rayon $R = \frac{m\, v}{q\, B_0}$ (cf supra) devient de plus en plus grand au fur et à mesure que les charges s'accélèrent ; elles décrivent donc une spirale jusqu'à ce qu'elles atteignent le bord extérieur de la boîte ; elles sont alors éjectées par un dispositif ad hoc (un autre champ magnétique !) vers le lieu

où on les utilisera. La figure 3 p. 9, trouvée sur internet, visualise le dispositif.

• Spectromètre de masse.

Le rayon de la trajectoire de l'hélice décrite par une particule dans un champ magnétique dépend de sa masse. Des particules de même charge, accélérées par une même différence de potentiel, donc de même vitesse, mais de masse légèrement différentes (par exemple des isotopes d'un même élément ionisé) n'ont pas exactement le même mouvement et peuvent être séparées. Il y a tant de variantes pratiques possibles qu'en décrire une serait de peu d'intérêt.

2.d Deux exemples de mouvement dans un champ magnétique stationnaire non uniforme. Vitesse de dérive. Bouteille magnétique.

• Dérive latérale.

On étudie ici le mouvement d'une charge ponctuelle q de masse m dans un champ magnétique légèrement non uniforme de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(y)\,\overrightarrow{e_z}$, c'est-à-dire que la non-uniformité se traduit par une variation de module (de norme) dans une direction orthogonale à celle du champ. On supposera aussi que l'amplitude du mouvement est suffisamment faible pour que l'on puisse se contenter d'un développement limité à l'ordre 1 de la forme $B(y) = B_0\,\left(1 + \frac{y}{a}\right)$.

∘ ***Analyse qualitative.*** On modélise violemment la situation en remplaçant ce champ par un champ tel que $\overrightarrow{B} = B_1\,\overrightarrow{e_z}$ si $y < 0$ et $\overrightarrow{B} = B_2\,\overrightarrow{e_z}$ si $y > 0$ et l'on suppose qu'à l'instant initial, la position de la particule est telle que $y = 0$ et que sa vitesse est $v_0\,\overrightarrow{e_y}$ avec $v_0 > 0$ ou plus exactement, on choisit l'origine de l'axe Oy là où la vitesse est dans la direction et le sens de Oy. On montre comme plus haut que la vitesse a un module (une norme) constant (donc v_0), que la vitesse selon Oz est constante et qu'en projection sur xOy, dans le demi-plan $y < 0$ le mouvement est circulaire de rayon $R_1 = \frac{m\,v_0}{q\,B_1}$ et de période théorique $T_1 = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B_1}$ et dans le demi-plan $y > 0$ le mouvement est circulaire de rayon $R_2 = \frac{m\,v_0}{q\,B_2}$ et de période théorique $T_2 = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B_2}$.

La figure 4 p. 11 tracée avec $B_2 > B_1$ et q positif montre le mouvement de la charge qui est une succession de demi-cercles de rayons égaux alternativement à R_1 et R_2 parcourus en des demi-périodes théoriques $\frac{T_1}{2}$ et $\frac{T_2}{2}$. On constate qu'après chaque couple de deux demi-cercles, la particule s'est décalée parallèlement à Ox de $2\,R_2 - 2\,R_1$ (ici négatif) pendant le temps $\frac{T_2}{2} + \frac{T_1}{2}$; il en résulte une *vitesse de dérive* v_d selon Ox d'expression algébrique :

$$v_d = \frac{2\,(R_2 - R_1)}{\frac{1}{2}\,(T_2 + T_1)} = \frac{\frac{2\,m\,v_0}{q}\,\left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1}\right)}{\frac{\pi\,m}{q}\,\left(\frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_1}\right)}$$

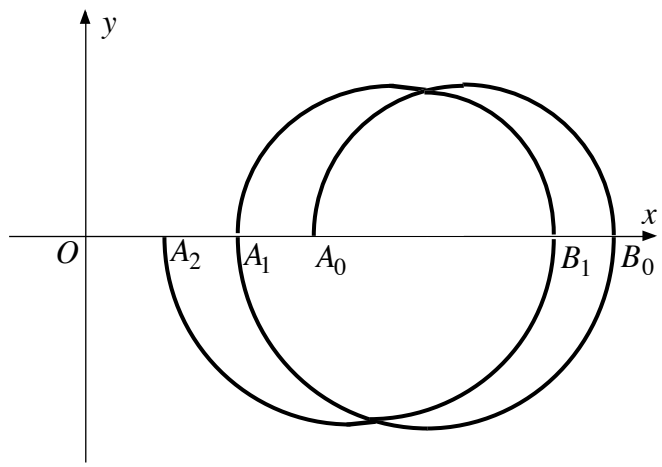

FIGURE 4 – Vitesse de dérive.

d'où :

$$\frac{v_d}{v_0} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{B_2 - B_1}{B_2 + B_1}$$

◦ ***Analyse quantitative.*** On revient à l'énoncé $B(y) = B_0\,\left(1 + \frac{y}{a}\right)$. Si l'on considère que la trajectoire projetée sur xOy est une courbe d'équation $y = f(x)$ dont la tangente en tout point fait avec Ox l'angle α et dont on note s l'abscisse curviligne ; localement le rayon de courbure est $R = \frac{m\,v_0}{q\,B(y)}$ et la courbure $\frac{1}{R}$; or une des formules donnant la courbure est $\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ et les définitions de l'abscisse curviligne et de l'angle α entraînent que $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\,\cos\alpha$. On touillant tout ça, on arrive à :

$$\frac{q\,B_0}{m\,v_0}\,\left(1 + \frac{y}{a}\right) = \frac{q\,B(y)}{m\,v_0} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\,\cos\alpha$$

soit encore :

$$\mathrm{d}x = \frac{m\,v_0}{q\,B_0}\,\left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-1}\,\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha \approx \frac{m\,v_0}{q\,B_0}\,\left(1 - \frac{y}{a}\right)\,\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

Le terme en $\frac{y}{a}$ est un terme correctif d'ordre 1 et classiquement si l'on veut le mouvement à l'ordre 1, on peut remplacer dans ce terme y par sa valeur à l'ordre 0. Or dans un mouvement circulaire de rayon $R_0 = \frac{m\,v_0}{q\,B_0}$ pour lequel on a quelque chose en $x = Cte + R_0\,\cos\theta$ et $y = R_0\,\sin\theta$ et une tangente faisant l'angle $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$ (faire un petit dessin en marge) d'où $y = -R_0\,\cos\alpha$ et en reportant dans le résultat précédent :

$$\mathrm{d}x = \frac{m\,v_0}{q\,B_0}\,\left(1 + \frac{m\,v_0}{a\,q\,B_0}\,\cos\alpha\right)\,\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

Reste à intégrer sur un tour (sur la figure de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en A_0 à la même valeur en A_1 mais dans le sens décroissant que induit un changement de signe donc on n'intègre pas sur un

demi-tour) pour une dérive Δx par tour de :

$$\Delta x = -\frac{\pi}{a}\left(\frac{m\,v_0}{q\,B_0}\right)^2$$

parcouru à l'ordre 0 en un temps $T_0 = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B_0}$ qui conduit à une vitesse de dérive v_d telle que :

$$\frac{v_d}{v_0} = -\frac{m\,v_0}{2\,a\,q\,B_0} = -\frac{R_0}{2\,a}$$

Remarque : si dans le modèle qualitatif, on considère que B_1 et B_2 sont des moyennes de $B(y)$ pour les demi-cercles inférieur et supérieur soit en grossière approximation d'une part $B_2 = B\left(\frac{R_0}{2}\right) = B_0\left(1+\frac{R_0}{2\,a}\right)$ et d'autre part $B_1 = B\left(-\frac{R_0}{2}\right) = B_0\left(1-\frac{R_0}{2\,a}\right)$, alors $B_2 + B_1 = 2\,B_0$, $B_2 - B_1 = \frac{R_0}{a}\,B_0$ et $\frac{B_2-B_1}{B_2+B_1} = \frac{R_0}{2\,a}$ et la grossière approximation donne, un peu miraculeusement [2] le bon résultat à l'ordre 1.

∘ ***Un exemple.*** L'ionosphère est une couche de l'atmosphère que le bombardement par les particules solaires ionise en ions positifs et électrons négatifs. Ceux-ci sont soumis au champ magnétique terrestre qui est un champ dipolaire. Dans le plan équatorial (par exemple), il est orienté nord-sud son module décroît radialement (dans la direction nadir-zénith) avec la distance à la Terre, les particules chargées ont un mouvement de dérive orienté est-ouest (le sens dépend de leur signe) et tournent donc lentement autour de la Terre dans le plan équatorial.

• Bouteille magnétique.

On étudie ici le mouvement d'une charge ponctuelle de charge [3] $-q$ de masse m dans un champ magnétique légèrement non uniforme de la forme $\overrightarrow{B}(M) \approx B(z)\,\overrightarrow{e_z}$, c'est-à-dire que la non-uniformité se traduit par une variation de module (de norme) dans une direction parallèle à celle du champ. On a écrit $\overrightarrow{B}(M) \approx B(z)\,\overrightarrow{e_z}$ et non $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\,\overrightarrow{e_z}$ car un tel champ ne respecterait pas la première des équations de Maxwell, à savoir div $\overrightarrow{B} = 0$. Pour espérer pouvoir montrer quelque chose, il faut simplifier au maximum la situation et l'on considérera que le champ a une symétrie de révolution autour de l'axe Oz ; sa composante axiale sera notée $B(z)\,\overrightarrow{e_z}$ (on pourra considérer que $B(z)$ est une fonction paire croissante de $z = 0$ à $z \to \infty$) et sa composante radiale est classiquement [4] $b(r,z) = -\frac{r}{2}\,B'(z)\,\overrightarrow{e_r}$.

2. Pédagogiquement, c'est dangereux : on pourrait croire qu'il suffit d'une grossière approximation pour trouver systématiquement le bon résultat ; un truc à mettre les professeurs de physique au chômage.

3. On note ainsi la charge de sorte que si, q est positif donc la charge négative et $B(z)$ positif, le mouvement se fasse dans le sens trigonométrique ; on risque ainsi moins les problèmes de signe.

4. Considérons un cylindre d'axe Oz de rayon r limité par deux disques de rayon r aux cotes z et $z+\mathrm{d}z$. Le flux total à travers les différentes surfaces orientées vers l'extérieur est nul ; sur le disque supérieur, le flux est $\pi\,r^2\,B(z+\mathrm{d}z)$ soit au premier ordre $\pi\,r^2\,(B(z)+B'(z)\,\mathrm{d}z)$; sur le disque inférieur, orienté vers le bas, le flux est $-\pi\,r^2\,B(z)$ et sur la surface latérale, le flux est $2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z\,b$. Il ne reste qu'à dire que le total est nul et à simplifier.

On supposera qu'à l'instant initial et juste autour, le mouvement de la charge est hélicoïdal d'axe Oz (comme dans un champ uniforme) avec une très faible vitesse parallèle à Oz. La condition initiale respecte la symétrie de révolution et l'on peut donc espérer qu'à tout moment le mouvement a une composante circulaire d'axe Oz de rayon r variable de grande vitesse orthoradiale et d'un mouvement lent selon Oz.

◦ ***Mise en équation.*** Paramétrons les grandeurs pertinentes. En projection sur la base formé dans cet ordre par les vecteurs unitaires radial, orthoradial et axial, le champ magnétique présenté en vecteur colonne est :

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}\,B'(z) \\ 0 \\ B(z) \end{pmatrix}$$

et les vecteurs position, vitesse et accélération de la charge, repérée par ses coordonnées cylindriques r, θ et z, sont classiquement (on note la dérivation temporelle par un point au dessus de la variable) :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\,\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

On projette sur les trois axes (radial, orthoradial et axial) l'équation du mouvement $m\,a = (-q)\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ pour arriver au système :

$$\begin{cases} m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -q\,r\,\dot{\theta}\,B(z) \\ m\,(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}) = q\,\left[\dfrac{r}{2}\,\dot{z}\,B'(z) + \dot{r}\,B(z)\right] \\ m\,\ddot{z} = -q\,\dfrac{r^2}{2}\,\dot{\theta}\,B'(z) \end{cases}$$

◦ ***Conclusions.*** Après quelques nuits blanches et de nombreuses feuilles de brouillon gâchées, on finit par se rendre compte qu'il faut faire le moins de choses possible [5] pour réussir à comprendre ce qui se passe.

Dans la première des équations, sur les trois termes présents, deux contiennent l'importante vitesse orthoradiale $r\,\dot{\theta}$ et le troisième contient $\ddot{r}$ qui est lié au faible mouvement selon Oz ; on peut donc le négliger et arriver après simplification à :

$$\dot{\theta} = \frac{q\,B(z)}{m}$$

c'est-à-dire que cette relation est la même que dans un champ uniforme, à ceci près qu'elle est ici valable localement ($\dot{\theta}$ varie avec z comme $B(z)$).

5. Il faut diriger l'empire comme on fait frire un petit poisson, a dit Lao-Tseu.

Multiplions la seconde équation par r et reconnaissons dans les deux membres une dérivée de produit ; on a successivement :

$$m\,(2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\,\ddot{\theta}) = q\,\left[\frac{r^2}{2}\,\dot{z}\,B'(z) + r\,\dot{r}\,B(z)\right]$$

$$m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\,\dot{\theta}) = q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{r^2}{2}\,B(z(t))\right]$$

Si l'on y reporte $\dot{\theta} = \frac{q\,B(z)}{m}$, on obtient après simplification par q

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r^2\,B(z(t))\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r^2\,B(z(t))\right]$$

qui n'est possible que si :

$$r^2\,B(z) = Cte$$

Or cette propriété est aussi celle qui lie le rayon r d'un tube de champ à la côte z au champ qui règne car $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif. On en déduit que le mouvement de la charge se fait à la surface du tube de champ qui s'appuie sur le premier tour de l'hélice (lentement variable) que décrit la charge.

En revenant à la forme $m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\,\dot{\theta}) = q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{r^2}{2}\,B(z(t))\right]$, on en déduit aussi que $r^2\,\dot{\theta} = Cte$ soit, en y reconnaissant la vitesse orthoradiale $v_\theta = r\,\dot{\theta}$ (ou aussi $v_\theta = \frac{q\,r\,B(z)}{m}$ en reportant la valeur de $\dot{\theta}$) :

$$r\,v_\theta = Cte$$

Par ailleurs et comme plus haut, on déduit classiquement de l'équation du mouvement que $\overrightarrow{v}^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 = Cte$. Plaçons nous dans le cas d'un tube de champ de section lentement variable ; il faut un grand déplacement selon Oz pour que le rayon du tube (donc, cf supra, de la trajectoire) varie significativement et l'on peut donc négliger v_r devant v_z, d'où :

$$v_\theta^2 + v_z^2 = Cte$$

Désormais les choses sont très simples à expliquer. Supposons que lorsque la charge est en $z = 0$, sa vitesse orthoradiale soit V_0 (d'où, en notant B_0 la valeur de $B(0)$, l'on tire en notant r_0 le rayon à ce niveau $V_0 = \frac{q\,r_0\,B_0}{m}$ qui donne la valeur de r_0 que l'on explicitera pas car cela rendrait les choses moins lisibles)) et que sa vitesse selon Oz soit v_0 supposée positive pour fixer les idées. La particule se déplace vers les z croissants, arrivée à la cote z, le rayon se déduit de $r^2\,B(z) = Cte$ d'où :

$$r^2\,B(z) = r_0^2\,B_0 \Longrightarrow r = r_0\,\sqrt{\frac{B_0}{B(z)}}$$

où la fonction $B(z)$ est une donnée du problème ; on l'a supposée croissante donc r décroît. La vitesse orthoradiale se déduit de $r\,v_\theta = Cte$ d'où :

$$r\,v_\theta = r_0\,V_0 \Longrightarrow v_\theta = \frac{r_0\,V_0}{r}$$

et puisque r décroît v_θ croît. La vitesse axiale se déduit de $v_\theta^2 + v_z^2 = Cte$, d'où :

$$v_\theta^2 + v_z^2 = V_0^2 + v_0^2 \Longrightarrow v_z = \sqrt{V_0^2 + v_0^2 - v_\theta^2}$$

et puisque v_θ croît, v_r décroît. En particulier si v_θ croît jusque la valeur $\sqrt{V_0^2 + v_0^2}$, v_r s'annulera et la charge repartira vers sa position de départ qu'elle dépassera vers les z décroissant jusqu'à un autre point (symétrique si $B(z)$ est paire) où v_r s'annulera pour redevenir positif. La charge sera piégée entre ces deux positions et l'on dit avoir affaire à une *bouteille magnétique*.

Dès que l'on connaît la fonction $B(z)$, on connaît en fonction de z tous les paramètres locaux du mouvement hélicoïdal (tangent oserai-je dire). Que manque-t-il à notre bonheur [6] ? Savoir comment z varie avec le temps ; pour cela il suffit d'intégrer $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ soit en détaillant :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sqrt{V_0^2 + v_0^2 - v_\theta^2} = \sqrt{V_0^2 + v_0^2 - \frac{r_0^2\,V_0^2}{r^2}} = \sqrt{V_0^2 + v_0^2 - V_0^2\,\frac{B(z)}{B_0}}$$

qui pourra aisément être intégré de façon numérique.

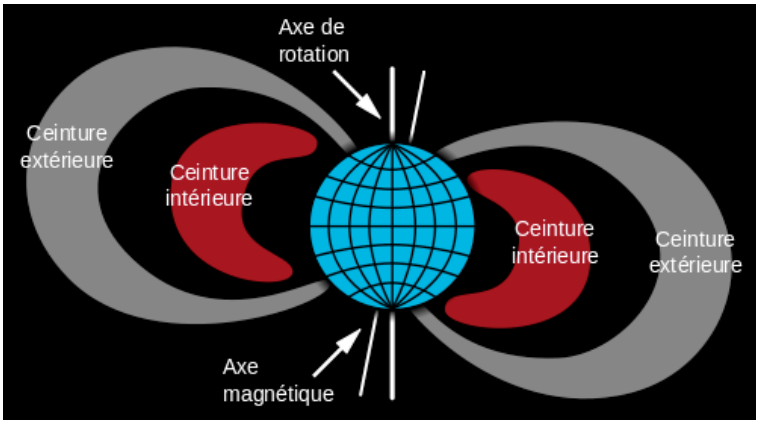

FIGURE 5 – Ceintures de Van Allen.

∘ ***Un exemple.*** Revenons à l'ionosphère. Le champ magnétique terrestre est un champ dipolaire dont les lignes de champ se resserrent de l'équateur aux pôles (le fait que le tube

6. Méfions-nous des Saint-Just qui veulent « arrêter la révolution à la perfection du bonheur ».

de champ n'ait pas un axe de symétrie de révolution ne change pas qualitativement ce qui précède). Les charges sont donc piégées dans une bouteille magnétique et au mouvement de dérive est-ouest étudié plus haut, se superpose un mouvement alternatif dans le sens nord-sud en gros symétriquement par rapport à l'équateur. Ce double mouvement regroupe les charges en deux ceintures dites de Van Allen : la ceinture intérieure qui regroupe essentiellement des protons et la ceinture extérieure qui regroupe les électrons. La figure 5 p. 15, issue de la NASA via Wikipedia en donne le schéma.

2.e Un exemple de mouvement dans un champ électromagnétique uniforme et stationnaire. Filtre de vitesse.

Nous nous placerons, à titre d'exemple dans le cas où le champ électrique, le champ magnétique et la vitesse initiale sont deux à deux orthogonaux. Nous choisirons les axes de sorte que $\overrightarrow{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{e_x}$, que $\overrightarrow{E}_0 = E_0\,\overrightarrow{e_y}$ et que $\overrightarrow{B}_0 = B_0\,\overrightarrow{e_z}$. En projetant sur les axes $m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,[\overrightarrow{E}_0 + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}_0]$, on arrive, en posant $\omega = \frac{q\,B_0}{m}$ et en divisant par m, à :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \omega\,v_y \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{q\,E_0}{m} - \omega\,v_x \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

On en déduit d'abord que v_z et constant. Compte tenu de la vitesse initiale, on a donc $v_z = 0$.

Utilisons maintenant une méthode classique : posons $V(t) = v_x(t) + i\,v_y(t)$ et additionnons à la première équation la seconde multipliée par i, soit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x + i\,v_y) = i\,\frac{q\,E_0}{m} + \omega\,(v_y - i\,v_x) = i\,\frac{q\,E_0}{m} - \omega\,(i^2\,v_y + i\,v_x) = i\,\frac{q\,E_0}{m} - i\,\omega\,(v_x + i\,v_y)$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + i\,\omega\,V = i\,\frac{q\,E_0}{m}$$

dont la solution, puisque la vitesse initiale est telle que $v_{x0} = v_0$ et $v_{y0} = 0$ et donc aussi $V_0 = v_0$, est :

$$V = \frac{q\,E_0}{m\,\omega} + \left(v_0 - \frac{q\,E_0}{m\,\omega}\right)\,[1 - \exp(-i\,\omega\,t)]$$

dont on prend les parties réelle et imaginaire pour arriver à :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{q\,E_0}{m\,\omega} + \left(v_0 - \frac{q\,E_0}{m\,\omega}\right)\,[1 - \cos(\omega\,t)] = v_0 - \left(v_0 - \frac{q\,E_0}{m\,\omega}\right)\,\cos(\omega\,t) \\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(v_0 - \frac{q\,E_0}{m\,\omega}\right)\,\sin(\omega\,t) \end{cases}$$

d'où par intégration, avec un bon choix de l'origine des axes :

$$\begin{cases} x = v_0\,t + \frac{1}{\omega}\left(\frac{q\,E_0}{m\,\omega} - v_0\right)\sin(\omega\,t) \\ y = \frac{1}{\omega}\left(\frac{q\,E_0}{m\,\omega} - v_0\right)\cos(\omega\,t) \end{cases}$$

où un œil exercé reconnaît l'équation paramétrique d'une cycloïde, allongée ou raccourcie [7].

Remarque : dans le cas particulier où $v_0 = \frac{q\,E_0}{m\,\omega}$ soit, avec $\omega = \frac{q\,B_0}{m}$, dans le cas où $v_0 = \frac{E_0}{B_0}$, le mouvement est rectiligne ce que l'on pouvait aisément prévoir : en effet à l'instant initial, la force électrique $q\,\overrightarrow{E_0}$ et la force magnétique $q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ se compensent exactement, l'accélération est nulle et la vitesse se conserve ainsi donc que le bilan nul de forces. On peut sur ce principe concevoir un *filtre de vitesse* : si un faisceau de particules chargées, de charge égale (rappelons que la charge est quantifiée en multiples entiers de e, charge de l'électron) et dont la vitesse est de même direction Ox, est placé dans ces deux champs uniformes et stationnaires croisés, le champ électrique E_0 selon Oy et le magnétique B_0 selon Oz, seules les particules de vitesse $v_0 = \frac{E_0}{B_0}$ vont tout droit. Il est aisé d'éliminer les autres en plaçant sur le trajet des particules sélectionnées une succession d'écrans absorbants percés de trous alignés selon Ox.

2.f Un exemple de mouvement dans un champ électromagnétique stationnaire non uniforme. Piège de Penning.

Un charge ponctuelle q de masse m est *confinée* dans un espace vide si, lors de son mouvement, elle reste proche d'une position d'équilibre quelles que soient les conditions initiales pourvu qu'elle restent raisonnables (faible écart entre position initiale et position d'équilibre, faible vitesse initiale). Ceci suppose que cet équilibre soit stable et qu'il corresponde donc à une position où l'énergie potentielle est minimale.

Un champ magnétique seul ne peut y parvenir car la force magnétique $\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ a une puissance $P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{v} = 0$ nulle qui ne correspond donc à aucune énergie potentielle.

Un champ électrique stationnaire, correspondant à un potentiel électrostatique V et une énergie potentielle $q\,V$, semble à tort une possibilité car un équilibre stable en un point noté O (dans un région vide par hypothèse) correspondra, selon le signe de q à un maximum ou un minimum de V au point O. Or c'est un résultat connu d'électrostatique (voir le chapitre C-II) que le potentiel ne peut être extremum dans le vide. Rappelons le principe de la démonstration : si V est maximum (pour fixer les idées) en O, quelle que soit la direction dans laquelle on s'éloigne de O, V décroît donc le champ électrique est strictement dirigé de façon centrifuge puisqu'il l'est dans le sens des potentiels décroissants ; le théorème de Gauss, appliqué à une sphère de centre O et de rayon suffisamment petit,

7. Je laisse le lecteur se documenter là-dessus ; il n'aura aucune difficulté à trouver cela.

prévoit qu'elle est donc traversée par un flux strictement positif et prévoit donc aussi l'existence de charges à l'intérieur ce qui impossible dans le vide.

On va donc rechercher ici la superposition d'un champ électrique, nul en un point qui sera une position d'équilibre instable et d'un champ magnétique qui rendra stable cet équilibre. Cette situation rappelle le problème des planètes troyennes [8] aux points de Lagrange du système Soleil-Jupiter (voir le chapitre B-V) qui sont des positions d'équilibre instable mais stabilisées par la force de Coriolis, formellement identique à la force magnétique (produit vectoriel de la vitesse et d'un autre vecteur).

On considère le champ dérivant du potentiel $V(x,y,z) = V_0 - a\,(x^2+y^2) + b\,z^2$ qui a une symétrie de révolution autour de Oz. Dans le vide la densité volumique de charges ρ est nulle et l'on a donc grâce l'équation de Maxwell-Gauss :

$$0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}\overrightarrow{E} = -\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V\right) = -\Delta V = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 2\,a + 2\,a - 2\,b$$

d'où $b = 2\,a$ et $V(x,y,z) = V_0 - a\,(x^2+y^2) + 2\,a\,z^2$ correspondant à un champ dont les composantes sont :

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2\,a\,x \\[2ex] E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 2\,a\,y \\[2ex] E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = -4\,a\,z \end{cases}$$

Le théorème d'unicité (voir chapitre C-II) montre qu'un tel champ est celui qui règne dans un condensateur dont les deux armatures sont deux surfaces équipotentielles, ici deux hyperboloïdes de révolution et il est plus « enveloppant » de choisir l'un à une nappe, l'autre à deux nappes, une belle occasion de relire son cours de géométrie.

Les équations du mouvement d'une charge q et de masse m sont alors :

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = 2\,q\,a\,x \\ m\,\ddot{y} = 2\,q\,a\,y \\ m\,\ddot{z} = -4\,q\,a\,z \end{cases}$$

On remarque au passage que l'origine du repère et une position d'équilibre puisque le champ électrique donc la force électrique y sont nuls. Selon que q et a ont ou non le même signe, certaines des équations ont pour solutions des fonctions sinusoïdales du temps qui permettent le confinement et d'autres des solutions exponentielles qui divergent et quel que soit le cas, il y en a au moins une qui donne une divergence ; l'équilibre est donc instable

8. C'est par un hasard quasi-miraculeux que j'ai traité ce chapitre-ci juste après celui-là ; jusqu'ici, l'analogie de ces deux situations m'avait échappé.

et le confinement impossible. Par la suite et pour fixer les idées, on supposera q et a tous deux positifs

On superpose au champ électrique précédent un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}$. Cette fois, l'équation du mouvement est $m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$

d'où sur les trois axes (calculs aisés) :

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = q\,B\,\dot{y} + 2\,q\,a\,x \\ m\,\ddot{y} = -q\,B\,\dot{x} + 2\,q\,a\,y \\ m\,\ddot{z} = -4\,q\,a\,z \end{cases}$$

Pour $z(t)$, on trouve, si a est positif, un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 avec $\omega_0^2 = \frac{4\,q\,a}{m}$, sinusoïdal donc borné.

Sur Oxy, introduisons la variable $\xi = x(t) + i\,y(t)$, réalisons la combinaison linéaire membre à membre de la première équation et de la seconde préalablement mulipliée par i et posant $\omega_c = \frac{q\,B}{m}$ (pulsation« cyclotron »), on arrive aisément à

$$\ddot{\xi} = -i\,\omega_c\,\dot{\xi} + \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\xi$$

$$\ddot{\xi} + i\,\omega_c\,\dot{\xi} - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\xi = 0$$

qui est une équation linéaire homogène dont les solutions sont combinaisons linéaires d'exponentielles dont les coefficients sont solutions de

$$X^2 + i\,\omega_c\,X - \frac{1}{2}\,\omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2$$

qui est réel.

S'il est positif, l'une des racines est $-i\,\omega_c/2 + \sqrt{\Delta}/2$ qui correspond à

$$\xi(t) = \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}\,t}{2}\right)\,\exp\left(i\,\frac{\omega_c\,t}{2}\right)$$

c'est-à-dire à une pseudo-sinusoïde d'amplitude croissant exponentiellement : le mouvement n'est pas borné.

A l'inverse si Δ est négatif, les solutions de l'équation résolvante sont les imaginaires purs $-i\,\omega_c/2 \pm i\,\sqrt{(-\Delta)/2}$ qui correspondent chacun à ξ exponentiel imaginaire et donc $x(t)$ et $y(t)$ respectivement un cosinus et un sinus : il s'agit d'un mouvement circulaire,

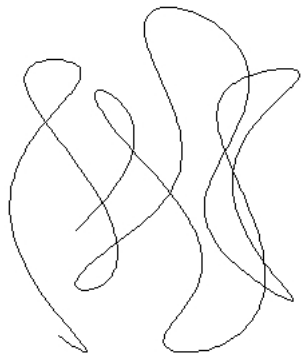

FIGURE 6 – Piège de Penning.

donc borné. On veut donc Δ négatif, soit $2\,\omega_0^2$ inférieur à ω_c^2 soit encore, en revenant à la définition de ω_0, a inférieur à

$$a_c = \frac{m\,\omega_c^2}{8\,q}$$

Le mouvement complet combine dans le plan xOy deux mouvements circulaires de vitesses et rayons différents (cf les manèges de la foire du Trône) et un mouvement sinusoïdal selon Oz. La figure 6 p. 20 en est, en perspective, un exemple arbitraire mais plutôt esthétique.

2.g Cas des particules relativistes.

Dans les cas où l'on peut résoudre facilement le problème classique, la mécanique relativiste n'apporte guère de complications. Voyons cela sur deux exemples, mais auparavant quelques menus rappels : une particule de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ a une quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ et une énergie $\mathcal{E}$ données par les formules :

$$\overrightarrow{p} = \frac{m\,\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}}$$

et l'on remarquera qu'à vitesse nulle on a $\mathcal{E} = m\,c^2$ (énergie au repos). On notera qu'on en déduit les relations suivantes entre $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{p}$ et $\mathcal{E}$ qui allégeront les calculs ultérieurs :

$$\overrightarrow{v} = \frac{c^2\,\overrightarrow{p}}{\mathcal{E}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}^2 = c^2\,\overrightarrow{p}^2 + m^2\,c^4$$

Enfin la formule de LORENTZ est toujours $\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$ (voir chapitre C-X relatif à la formulation relativiste de l'électromagnétisme).

• **Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme et stationnaire.**

Nous noterons le champ $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{e_x}$. L'équation du mouvement s'écrira $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{E}$ avec $\overrightarrow{p} = \frac{m\,\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}}$. L'axe Oy sera choisi de sorte que la vitesse initiale et donc la quantité de mouvement initiale soient dans le plan xOy.

En projetant l'équation du mouvement sur les trois axes, on en déduit que la composante sur Oz de $\overrightarrow{p}$ est constante et nulle, celle sur Oy est constante[9] et celle sur Ox, telle que $m\,\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = q\,E$, a pour expression :

$$p_x(t) = p_x(0) + q\,E\,t$$

Il est astucieux ici de procéder au changement d'origine de temps défini par le changement de variable $t = -\frac{p_x(0)}{q\,E} + t'$ de sorte que $p_x(t') = q\,E\,t'$. Ainsi formellement la quantité de mouvement initiale et donc la vitesse initiale sont donc parallèles à Oy et on les note respectivement $\overrightarrow{p}_0 = p_0\,\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{v}_0 = v_0\,\overrightarrow{e_y}$ avec $p_0 = \frac{m\,v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ et l'on a donc :

$$\overrightarrow{p}(t') = p_0\,\overrightarrow{e_y} + q\,E\,t'\,\overrightarrow{e_x}$$

On va en déduire la vitesse grâce aux deux dernières relations rappelées plus haut (désormais, on note t pour t'). On a d'abord :

$$\mathcal{E}^2 = c^2\,\overrightarrow{p}^2 + m^2\,c^4 = c^2\,\left[p_0^2 + (q\,E\,t)^2\right] + m^2\,c^4 = \mathcal{E}_0^2 + (q\,E\,c\,t)^2$$

où $\mathcal{E}_0^2 = c^2\,p_0^2 + m^2\,c^4$ est une donnée du problème et sans qu'il soit utile de le vérifier on a $\mathcal{E}_0 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}_0^2}{c^2}}}$.

On tire ensuite :

$$\overrightarrow{v} = \frac{c^2\,\overrightarrow{p}}{\mathcal{E}} = c^2\,\frac{p_0\,\overrightarrow{e_y} + q\,E\,t\,\overrightarrow{e_x}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (q\,E\,c\,t)^2}}$$

On n'oublie pas de remarquer que quand t tend vers l'infini, $\overrightarrow{v}$ tend vers $c\,\overrightarrow{e_x}$, car pour $t \to \infty$, on a $\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (q\,E\,c\,t)^2} \sim q\,E\,c\,t$, et l'on retrouve, dans ce cas particulier, que c est une vitesse limite infranchissable.

Pour trouver la position en fonction du temps, il suffit d'intégrer $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, d'où, en effectuant les changements de variables successifs[10] définis par $u = q\,E\,c\,t$ d'où

9. Attention au piège : la formule $p_y = \frac{m\,v_y}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}}$ où $\overrightarrow{v}^2 = v_y^2 + v_x^2$ avec un v_x forcément croissant, montre que $p_y = Cte$ ne permet pas d'affirmer que v_y soit constant ; on est même sûr du contraire.

10. On peut le faire en une étape mais le risque d'erreur de calcul est plus grand.

$\mathrm{d}t = \frac{1}{q\,E\,c}\,\mathrm{d}u$ puis $u = v\,\mathcal{E}_0$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = c^2\,\dfrac{q\,E\,t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (q\,E\,c\,t)^2}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{q\,E}\,\dfrac{u}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + u^2}}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\mathcal{E}_0}{q\,E}\,\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y = c^2\,\dfrac{p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (q\,E\,c\,t)^2}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{c\,p_0}{q\,E}\,\dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + u^2}}\,\mathrm{d}u = \dfrac{c\,p_0}{q\,E}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathrm{d}v \end{cases}$$

On reconnaît dans $\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$ la dérivée de $\sqrt{1+v^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$ est la dérivée de la fonction réciproque du sinus hyperbolique dite « argument sinus hyperbolique », noté argsinh ou argsh. En prenant comme origine la position de départ, correspondant à $v = 0$, on a donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathcal{E}_0}{q\,E}\,\left(\sqrt{1+v^2} - 1\right) = \dfrac{\mathcal{E}_0}{q\,E}\,\left[\sqrt{1 + \left(\dfrac{u}{\mathcal{E}_0}\right)^2} - 1\right] = \dfrac{\mathcal{E}_0}{q\,E}\,\left[\sqrt{1 + \left(\dfrac{q\,E\,c\,t}{\mathcal{E}_0}\right)^2} - 1\right] \\ y = \dfrac{c\,p_0}{q\,E}\,\operatorname{argsh} v = \dfrac{c\,p_0}{q\,E}\,\operatorname{argsh}\left(\dfrac{u}{\mathcal{E}_0}\right) = \dfrac{c\,p_0}{q\,E}\,\operatorname{argsh}\left(\dfrac{q\,E\,c\,t}{\mathcal{E}_0}\right) \end{cases}$$

Et puisqu'il est aisé d'éliminer le temps, on peut même en déduire l'équation cartésienne de la trajectoire. En inversant la relation entre y et t, on a :

$$\frac{q\,E\,c\,t}{\mathcal{E}_0} = \operatorname{sh}\left(\frac{q\,E\,y}{c\,p_0}\right)$$

que l'on reporte dans la relation entre x et t, d'où (avec $1 + \operatorname{sh}^2\xi = \operatorname{ch}^2\xi$) :

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{q\,E}\,\left[\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\left(\frac{q\,E\,y}{c\,p_0}\right)} - 1\right] = \frac{\mathcal{E}_0}{q\,E}\,\left[\operatorname{ch}\left(\frac{q\,E\,y}{c\,p_0}\right) - 1\right]$$

où l'on signale, anecdotiquement, que cette courbe (avec un cosinus hyperbolique) est appelée *chaînette*.

• Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme et stationnaire.

Cette fois, on doit résoudre $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ avec $\overrightarrow{p} = \frac{m\,\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}}$. En fait ici, aucune complication, il suffit d'adapter le raisonnement du cas classique. Multiplions l'équation du mouvement scalairement par $\overrightarrow{p}$, parallèle à $\overrightarrow{v}$, ce qui fait apparaître un produit mixte nul et en reconnaissant la dérivée du carré scalaire de $\overrightarrow{p}$:

$$\frac{\mathrm{d}(\|\overrightarrow{p}\|^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}^2}{\mathrm{d}t} = 2\,\overrightarrow{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = 2\,q\,\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{p} = 0$$

d'où l'on déduit que la quantité de mouvement a un module (une norme) constant et, puisque $p = \|\overrightarrow{p}\| = \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}}$ (avec $v = \|\overrightarrow{v}\|$) est une fonction strictement croissante de v, qu'il en est de même pour v.

Multiplions maintenant l'équation du mouvement scalairement par $\overrightarrow{B}$, ce qui fait apparaître encore un produit mixte nul et en reconnaissant dans $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{B}$ le produit de B par la composante p_z de $\overrightarrow{p}$:

$$\frac{\mathrm{d}(p_z\, B)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{B})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{B} = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

d'où l'on déduit successivement que $p_z\, B$, p_z, $\cos\alpha = \frac{p_z}{p}$ sont constants. $\overrightarrow{p}$ et donc $\overrightarrow{v}$ sont un angle constant α avec $\overrightarrow{B}$ et Oz.

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ tourne donc sans déformation (on veut dire à module ou norme constante) autour de Oz ; par analogie avec un solide, on a donc $m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e_z}$ et ω égale à la vitesse angulaire de rotation. Par identification avec :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1 - \frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

où l'on a pas oublié que $\overrightarrow{v}$ varie mais pas v, on en déduit que $\omega = -\frac{q\,B_0}{m}\sqrt{1 - \frac{\overrightarrow{v}^2}{c^2}}$.

Un effet connu concerne le cyclotron (voir paragraphe 2.c p. 8) : quand les particules, accélérées à chaque demi-tour, deviennent relativistes, la fréquence de rotation diminue avec la vitesse et il faudra alors synchroniser la fréquence de la différence de potentiel alternative entre les deux *dees* ; on a alors affaire à un *synchro-cyclotron*.

3 Exemples d'écoulement de charges.

On a vu en introduction qu'un tel problème devient éminemment complexe car l'écoulement de charges modifie le champ électromagnétique qui lui même agit sur l'écoulement, ce qui crée un couplage entre hydrodynamique et électromagnétisme. On abordera ici, deux exemples pas trop complexes au delà desquels les ambitions et le niveau de ce cours sont dépassés. Ces exemples ont du reste déjà été traités dans d'autres chapitres et sont simplement copiés-collés ici, comme prévu par mon approche par thèmes : un phénomène qui relève de deux thèmes sera présent dans deux chapitres.

3.a Un exemple unidirectionnel stationnaire : la diode à vide.

Dans un problème unidirectionnel stationnaire, les fonctions ne dépendent que d'une variable d'espace, qu'on choisit comme abscisse x, et pas du temps et les vecteurs ont la direction de Ox ; dans cette situation, les choses doivent être mathématiquement plus aisées avec une seule variable et une seule dimension vectorielle. Remarquons que cela exclut les produits vectoriels donc le magnétisme.

On modélise une diode à vide par un tube dans lequel on a fait le vide dans lequel on a placé un condensateur plan dont les armatures ont une surface S et sont distantes de a ; on choisi les axes de sorte que l'une soit dans le plan $x = 0$ et l'autre $x = a$. L'armature $x = 0$ est chauffé par effet Joule grâce à un filament annexe à une température suffisante pour que certains électrons de charge $-e$ et de masse m acquièrent assez d'énergie pour s'échapper au métal (énergie d'extraction) et en sortent avec une vitesse négligeable. Ils sont alors attirés vers l'autre armature par l'action d'un champ électrique dirigé de $x = a$ vers $x = 0$ de la forme $\overrightarrow{E} = E(x)\,\overrightarrow{e_x}$ avec $E(x)$ négatif, aux effets de bords près, engendré par une différence de potentiel entre les armatures ; on prendra l'origine des potentiels en $x = 0$, de sorte que l'armature en $x = a$ soit au potentiel U positif et l'on notera $V(x)$ le potentiel entre les armatures. Entre celles-ci, il y a des électrons qui se déplacent à une vitesse $\overrightarrow{v}(x) = v(x)\,\overrightarrow{e_x}$, d'où l'existence d'une densité volumique de charges $\rho(x)$ négative et d'une densité de courant $\overrightarrow{j} = \rho(x)\,\overrightarrow{v}(x)$. Nous sommes tacitement placés en régime permanent établi.

Appliquons la loi de la dynamique à un électron, mais en gérant l'approche eulérienne par la dérivée particulaire (voir chapitre B-XIII de mécanique des fluides). Le poids d'un électron est toujours négligeable devant les forces électriques, d'où :

$$m\,\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = m\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v}\right) = -e\,\overrightarrow{E}$$

On est en régime permanent, $\overrightarrow{v} = v(x)\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel V On arrive donc à :

$$m\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = e\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

Par intégration, on en déduit, compte tenu qu'en $x = 0$ on a $v(0) = 0$ et $V(0) = 0$, que :

$$\frac{1}{2}\,m\,v(x)^2 = e\,V(x)$$

que l'on peut bien sûr trouver directement en appliquant le théorème de l'énergie mécanique. Toutefois, la première approche permet, en appliquant sa conclusion en $x = 0$, de montrer que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ s'y annule car $v(0) = 0$, ce qui simplifie la suite.

L'équation de Poisson (voir le chapitre C-VIII sur les équations de Maxwell) donne ici :

$$\Delta V = \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Enfin le flux de $\overrightarrow{j} = \rho\,\overrightarrow{v}$ à travers un plan parallèle aux armatures, dont seule une surface S est traversé par les électrons, est l'intensité, négative [11] car les électrons négatifs

11. Historiquement, on a choisi un sens positif avant de connaître la nature des porteurs. c'était une chance sur deux... et on a perdu. Cette erreur-là, c'est la faute à Volta, quel manque de pot, c'est la faute à Rousseau.

vont dans le sens positif, notée $-I$ dans ces conditions. On a donc :

$$\rho(x)\, v(x)\, S = -I$$

où I est indépendant de x en régime permanent, car si $I(x_1)$ était différent de $I(x_2)$, la charge entre x_1 et x_2 varierait et le régime ne serait pas permanent.

On en déduit une équation différentielle vérifiée par $V(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{I}{\varepsilon_0\, S\, v(x)} = \frac{I}{\varepsilon_0\, S}\sqrt{\frac{m}{2\,e}}\sqrt{\frac{1}{V(x)}}$$

On multiplie les deux membres par $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ ce qui permet une première intégration où le constante est déterminée grâce à $V(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ nul en $x = 0$ (voir remarque ci-dessus) ; on arrive ainsi à :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{I}{\varepsilon_0\, S}\sqrt{\frac{m}{2\,e}}\, 2\sqrt{V(x)}$$

On extrait la racine (dans ce contexte $V(x)$ croît de gauche à droite car $V(a) = U > 0$) et l'on sépare les variables :

$$\frac{\mathrm{d}V}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\left(\frac{I}{\varepsilon_0\, S}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$$

d'où par intégration et avec $V(0) = 0$:

$$\frac{4}{3}\, V(x)^{\frac{3}{4}} = 2\left(\frac{I}{\varepsilon_0\, S}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{\frac{1}{4}} x$$

et enfin avec $V(a) = U$, on arrive à la relation qui lie U et I, qui est la *caractéristique* de la diode, soit ici :

$$U^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3\,a}{2}\right)\left(\frac{I}{\varepsilon_0\, S}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{\frac{1}{4}}$$

dont on retiendra surtout que c'est de la forme $U^{\frac{3}{4}} = Cte\, I^{\frac{1}{2}}$ ou mieux de la forme $U = Cte\, I^{\frac{2}{3}}$. La diode à vide est donc fondamentalement non linéaire.

La diode a vide a été remplacée à peu près partout par la diode à semi-conducteurs (et les triodes [12] par les transistors), car elle a deux défauts majeurs : elle est encombrante et à l'allumage, il faut attendre une bonne minute pour que l'armature concernée soit suffisamment chaude pour émettre des électrons. Toutefois, elle a une inertie très faible car il s'agit d'électrons de masse infime se déplaçant dans le vide ; dans les fonctions amplificatrice de la triode, le temps de réponse à une impulsion est dès lors extrêmement faible et rien ne vaut un amplificateur à lampes pour amplifier sa guitare électrique.

12. On intercale une grille entre les armatures à un potentiel répulsif dont les variations modulent le courant de la diode ; à partir de là, on arrive aisément à amplifier les variations du potentiel de grille.

3.b Un exemple d'ondes planes progressives sinusoïdales en magnéto-hydrodynamique.

Si l'on considère un système légèrement écarté d'un état d'équilibre, l'on peut espérer que les termes non linéaires soient négligeables et ainsi que le puissant formalisme des ondes planes progressives sinusoïdales conduisent à des résultats pertinents. Voici donc un exemple de situation que l'on peut traiter ainsi.

C'est un cas où pas mal de complications s'aplanissent : celui d'un fluide incompressible de masse volumique constante ρ_0 (pas besoin de thermodynamique), de conductivité σ très élevée [13] (qu'on modélisera par une conductivité infinie, ce qui simplifiera la loi d'Ohm et la gestion de l'électromagnétisme) et placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}_0$ assez intense pour que le champ créé par les courants soit faible.

C'est l'enjeu de ce dernier point qu'il faut bien mesurer. Le couplage s'effectue par des forces volumiques en $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$ dans le bilan de forces et un terme en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ dans la loi d'Ohm appliquée à un fluide conducteur mobile. Ces termes sont non linéaires et dans l'approximation des petites déformations, ils sont d'ordre 2 et donc négligeables : on ne peut donc gérer ces couplages qu'en mode non-linéaire, ce qui est toujours extrêmement difficile. Ajouter à $\overrightarrow{B}$ un champ statique $\overrightarrow{B}_0$ introduit des termes de couplage d'ordre 1 et c'est à ce prix que l'on pourra faire des choses plus ou moins simples.

En l'absence de mouvement et de courant, la situation de référence est la suivante : la pression p_0 est uniforme (on néglige donc le rôle de la pesanteur) et rien ne crée de champ électrique, celui-ci est donc uniformément nul. En présence d'un phénomène magnéto-hydrodynamique (on dira désormais « MHD »), on a :

- la pression : $p_0 + p_1(M,t)$
- la vitesse du fluide : $\overrightarrow{v}_1(M,t)$
- le champ électrique : $\overrightarrow{E}_1(M,t)$
- le champ magnétique : $\overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_1(M,t)$
- la densité de courant : $\overrightarrow{j}_1(M,t)$ (on se convaincra [14] qu'il n'y a aucun lien a priori entre $\overrightarrow{j}_1(M,t)$ et $\overrightarrow{v}_1(M,t)$)

où tous les paramètres avec l'indice « 1 » sont réputés assez petits pour qu'on puisse se contenter d'une linéarisation c'est-à-dire un développement limité à l'ordre 1.

L'équation d'Euler sans oublier les forces de Laplace et en négligeant l'effet de la

13. du mercure ou du sodium fondu par exemple.

14. Les ions sont entraînés par le fluide à la vitesse $\overrightarrow{v_1}$, les électrons, plus mobiles ont une vitesse relative non négligeable notée $\overrightarrow{u}$ et ont donc une vitesse absolue $\overrightarrow{v}'_1 = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u}$. Il y a, par unité de volume, le même nombre n d'électrons libres et d'ions positifs d'où $\overrightarrow{j_1} = n\,e\,(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_1'}) = -n\,e\,\overrightarrow{u}$ donc sans rapport avec $\overrightarrow{v_1}$

pesanteur [15] s'écrit alors :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

On rappelle en effet que le bilan des forces de Lorentz sur toutes les charges d'un volume élementaire conduit à une force volumique $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$ (voir chapitre C-VIII sur les équations de Maxwell). La linéarisation consiste à négliger les termes d'ordre deux comme $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}_1$, d'où (avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, p_0$ nul) :

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1 + \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{B_0} \qquad \text{(équation 1)}$$

L'incompressibilité se traduit classiquement par

$$\text{div}\, \overrightarrow{v_1} = 0 \qquad \text{(équation 2)}$$

La loi d'Ohm s'écrit (voir chapitre traitant de sur l'induction électromagnétique) dans le cas d'un fluide en mouvement :

$$\overrightarrow{j} = \sigma\, (\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

soit aussi

$$\frac{\overrightarrow{j}}{\sigma} = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

lorsque la conductivité devient infinie, on a alors $\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ et à l'ordre un :

$$\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{0} \qquad \text{(équation 3)}$$

On prend l'hypothèse raisonnable que le milieu reste électriquement neutre [16] et que l'on est dans le cadre des régimes quasi-stationnaires [17]. Les équations de Maxwell deviennent (avec $\overrightarrow{B}_0$ uniforme et stationnaire) :

$$\text{div}\, \overrightarrow{B_1} = 0 \qquad \text{(équation 4)}$$

15. si l'on ne le fait pas le terme $\rho_0\, \overrightarrow{g}$ se simplifiera alors avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, p_0$ car p_0 n'est plus uniforme dans ce cas, cf. hydrostatique.

16. Remarque : il existe certains types d'onde MHD longitudinales pour lesquels ce n'est pas vrai.

17. Notez que c'est la conductivité infinie qui rend l'hypothèse quasi-stationnaire crédible : car on y doit y avoir :

$$\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right\| \ll \|j\| = \sigma \|\overrightarrow{E}\|$$

validée ici par $\sigma = \infty$, l'adjonction du terme en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ ne changeant pas fondamentalement les choses.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E_1} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \qquad \text{(équation 5)}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E_1} = 0 \qquad \text{(équation 6)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B_1} = \mu_0\,\overrightarrow{j_1} \qquad \text{(équation 7)}$$

Une fois ce système linéarisé, on va lui chercher, bien évidemment des solutions sous forme d'ondes planes progressives sinusoïdales (voir le chapitre D-II cours de physique ondulatoire). Il faut toutefois prendre conscience que la présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ préexistant à l'onde donne une direction privilégiée à l'espace ; l'anisotropie est de la partie. La vitesse de propagation dépend donc a priori de l'angle que fait la direction de propagation avec ce champ.

L'objectif étant ici illustratif, on se place dans le cas simple où l'onde se propage dans la direction du champ $\overrightarrow{B_0}$, choisie comme axe Oz. Pour une onde en $\exp j\,(\omega\,t - k\,z)$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ se traduit par une multiplication par $j\,\omega$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ par $-j\,k$ et donc l'opérateur $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$ par $-j\,k\,\overrightarrow{e_z}$

L'équation 2, l'équation 4 et l'équation 6 deviennent [18]

$$-j\,k\,\overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{v_1} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\text{de même} \qquad \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{B_1} = 0$$

$$\text{de même} \qquad \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{E_1} = 0$$

ce qui assure le caractère transversal de l'onde.

On se place dans le cas encore plus simple d'une onde polarisée rectilignement. Posons

$$\overrightarrow{E_1} = E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x}$$

L'équation 5 devient successivement :

$$-j\,k\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{E_1} = -j\,\omega\,\overrightarrow{B_1}$$

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{k}{\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y}$$

L'équation 7 devient successivement :

$$-j\,k\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{B_1} = \mu_0\,\overrightarrow{j_1}$$

$$\overrightarrow{j_1} = \frac{j\,k^2}{\mu_0\,\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x}$$

18. Pour un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$, on a formellement $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}$ et de même pour un champ scalaire f on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \nabla\,f$

Pour l'équation 3, puisque $\overrightarrow{v_1}$ est transversal, notons $\overrightarrow{v_1} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y}$; on a alors :

$$E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x} = -(v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y}) \wedge (B_0\overrightarrow{e_z}) = B_0\,v_x\,\overrightarrow{e_y} - B_0\,v_y\,\overrightarrow{e_x}$$

On égale les projections : v_x est nul, on tire v_y et l'on en déduit

$$\overrightarrow{v_1} = -\frac{1}{B_0}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y}$$

Enfin l'équation 1 donne

$$j\,\omega\,\rho_0\,\overrightarrow{v_1} = j\,k\,p_1\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

$$-\frac{j\,\omega\,\rho_0}{B_0}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y} = j\,k\,p_1\,\overrightarrow{e_z} + \frac{j\,k^2}{\mu_0\,\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x} \wedge (B_0\overrightarrow{e_z})$$

La projection sur $\overrightarrow{e_z}$ nous apprend que p_1 est nul : une onde M.H.D. ne génère pas d'onde de pression. La projection sur $\overrightarrow{e_y}$ donne

$$-\frac{j\,\omega\,\rho_0}{B_0}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z) = -\frac{j\,k^2\,B_0}{\mu_0\,\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)$$

et après simplifications, on obtient l'équation de dispersion :

$$\frac{\omega\,\rho_0}{B_0} = \frac{k^2\,B_0}{\mu_0\,\omega} \qquad \text{soit} \qquad k^2 = \frac{\mu_0\,\rho_0}{B_0^2}\,\omega^2$$

On en déduit une vitesse de phase ;

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\,\rho_0}}$$

On remarquera surtout dans ce résultat qu'il n'a rien à voir ni avec la vitesse de la lumière, ni avec la vitesse du son. Il s'agit d'un type d'onde tout à fait original.

Application numérique : pour le mercure ($\rho_0 = 7,6\,10^3$ kg.m^{-3}) avec $B_0 = 1$ T et bien sûr $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ S.I., le calcul donne

$$V_\varphi = 10,2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

On remarque que la vitesse de ce type d'onde est très faible par rapport à celle du son et a fortiori celle de la lumière.