

Chapitre D-IV

Dissipation et absorption. Modulation et dispersion.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

L'équation de d'Alembert reflète une situation idéale, car elle néglige tous les phénomènes dissipatifs. Sur deux exemples formels, nous verrons comment peut se modifier l'équation et quelles en sont les conséquences.

L'une est prévisible : l'onde se propage en s'amortissant, car les phénomènes dissipatifs absorbent de l'énergie aux dépens de l'onde. L'autre est que la vitesse d'une onde sinusoïdale, dite vitesse de phase, dépend de sa fréquence et nous en verrons les conséquences pratiques. Ces deux effets seront gérés par l'équation de dispersion.

Nous introduirons la notion de modulation d'une porteuse par un signal et montrerons que la première se propage à la vitesse de phase et le second à une vitesse spécifique, dite vitesse de groupe. Nous montrerons aussi qu'un signal bref, modulant ou non une porteuse, se propage aussi à la vitesse de groupe mais en subissant des déformations (élargissement et affaiblissement).

Nous évoquerons quelques méthodes employées pour réduire la dispersion lorsqu'on utilise pas la modulation : pupinisation d'une ligne bifilaire, soliton, compression de train d'onde.

Nous terminerons en indiquant en quoi la dispersion limite le débit des transmissions numériques.

En annexe quelques indications pratiques sur la modulation (d'amplitude, de fréquence ou de phase) et sur la démodulation.

Table des matières

D-IV Dissipation et absorption. Modulation et dispersion.	1
1 Equation de propagation avec termes supplémentaires.	5
1.a Exemples	5
1.b Relation de dispersion	5
2 Dissipation et absorption	6
2.a Propagation amortie.	6
2.b Dissipation de l'énergie.	6
3 Modulation et dispersion.	7
3.a Intérêt de la modulation	7
3.b Propagation de la porteuse non modulée.	8
3.c Propagation d'une porteuse modulée	9
4 Propagation d'un paquet d'ondes.	10
4.a Le paquet d'onde vu comme une modulation.	10
4.b Déformation d'un paquet d'ondes.	12
5 Vaincre la dispersion sans moduler.	16
5.a L'équation des télégraphistes.	16
5.b Un modèle simple de soliton.	18
6 Inverser les effets de la dispersion : compression d'un train d'onde. . . .	25
6.a Approche théorique.	25
6.b Approche intuitive.	26
7 Limite imposée par la dispersion à un débit de transmission numérique. .	26
8 Annexe : aspects pratiques de la modulation et de la démodulation. . .	27

8.a Réalisation pratique d'une modulation d'amplitude. Modulateur en anneau.	27
8.b Démodulation par détection de crête.	30
8.c Détection synchrone.	33
8.d Défaut principal de la modulation d'amplitude.	34
8.e Principe de la modulation de fréquence ou de phase.	35
8.f Spectre en fréquence d'une onde modulée en fréquence	36
8.g Réalisation pratique d'une modulation de fréquence. Oscillateur commandé par une tension.	36
8.h Réalisation pratique d'une démodulation de fréquence. Boucle à verrouillage de phase.	37

1 Equation de propagation avec termes supplémentaires.

1.a Exemples

Nous avons vu dans le chapitre D-II les différentes propriétés de fonctions $f(x, t)$ solutions de l'équation de propagation (ou équation de D'ALEMBERT) $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Dans la pratique, les choses sont rarement si simples.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ représente une accélération par unité de masse, au second membre on trouvera donc des forces par unité de masse; outre celles qui, au travers d'un bilan, génèrent le terme en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, on pourra en trouver d'autres, par exemple des forces de frottement fluide proportionnelles à $\frac{\partial f}{\partial t}$ avec un coefficient négatif ou des forces de rappel proportionnelles à f avec un coefficient négatif. Dans ces deux cas, en recherchant une forme canonique, on aboutirait respectivement aux équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_0^2 f = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

1.b Relation de dispersion

Le chapitre D-II montre que tout phénomène peut être considéré comme somme de sinusoïdes. On cherche donc une solution propagative en notation complexe¹ de la forme $f(x, t) = \underline{a} \exp[j(\omega t - kx)]$ et il importera de comprendre le sous-entendu : la véritable fonction en est la partie réelle.

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ se transcrivent alors par une simple multiplication par, respectivement, $j\omega$, $(j\omega)^2 = -\omega^2$, $-jk$ et $(-jk)^2 = -k^2$.

Les équations des exemples précédents deviennent donc respectivement, après simplification par $\underline{a} \exp[j(\omega t - kx)]$ (on vous fait grâce du détail des calculs tout à fait élémentaires) et changement de signe :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - j\omega/\tau$$
$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_0^2$$

L'équation de d'ALEMBERT « pure » conduisait à $k/\omega = c = Cte$; ici, $k/\omega \neq Cte$; la vitesse de propagation n'est donc plus constante. En optique, le fait que, dans le verre par exemple, la vitesse de la lumière dépende de la couleur, conduit à la dispersion de la lumière par le prisme, on généralise donc la terminologie en disant que, dans la situation étudiée ici, le milieu est *dispersif* et la relation qui lie k à ω s'appelle *relation de dispersion*. Nous en verrons les conséquences parfois désastreuses sur la propagation des signaux.

1. Pour une présentation rigoureuse des notations complexes, voir le chapitre D-I.

Par ailleurs, dans le premier cas l'on remarque que ω et k ne peuvent être tous les deux réels. Nous nous intéresserons dans ce cours à des phénomènes du genre « régime permanent établi », c'est à dire qui ne s'étouffent ni ne deviennent explosifs dans le temps ; dans ce cas ω est réel et donc k complexe. Nous allons voir tout de suite que le milieu absorbe alors de l'énergie et que l'onde en perd ; on parle d'*absorption* ou de *dissipation*. Du reste dans l'exemple choisi de frottement fluide, c'est un comportement connu et établi.

Première conclusion : l'équation de d'ALEMBERT permet des solutions $f(t - x/c)$, où la fonction f est quelconque, qui se propagent sans déformation ; si on lui ajoute des termes, les ennuis commencent !

2 Dissipation et absorption

2.a Propagation amortie.

Dans les exemples qui précèdent mais aussi dans maintes autres situations, l'équation de dispersion donne k^2 en fonction de ω (parfois au travers d'une équation bicarré) qui donne deux solutions opposées (ou deux paires, ou plus, de solutions opposées) correspondant aux deux sens possibles de propagation. Contentons-nous ici du sens direct qui correspond à k positif s'il est réel et de partie réelle positive s'il est complexe (cela s'éclaircira ci-après) auquel cas, la partie imaginaire est négative sauf cas exceptionnel².

Nous noterons donc $k = k_1(\omega) - j k_2(\omega)$ où $k_1 = \Re(k)$ et $k_2 = -\Im(k)$.

Reportons dans $f(x, t) = \Re(\underline{a} \exp[j(\omega t - k x)])$ où $\underline{a} = a \exp(j \varphi)$; on arrive à :

$$f(x, t) = \Re(a \exp(-k_2 x) \exp[j(\omega t - k_1 x + \varphi)]) = a \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x + \varphi)$$

On retrouve une onde progressive sinusoïdale, à ceci près que sa propagation s'accompagne d'un amortissement en $\exp(-k_2 x)$ qu'on peut aussi noter $\exp(-x/\delta)$; $\delta = 1/k_2$ est une distance caractéristique d'amortissement. L'amplitude de l'onde est divisée par 100 (ou 1000) sur une distance de $\delta \ln(100) = 4,6 \delta$ (ou $\delta \ln(1000) = 6,9 \delta$, disons 7δ).

2.b Dissipation de l'énergie.

Nous avons signalé dans le précédent chapitre que le transport d'énergie par une onde peut se formaliser de façon très diverse ; nous nous contenterons ici de donner les pistes à explorer quand il s'agira, dans un autre chapitre, d'étudier les ondes particulières qui en relèvent.

De façon courante, la moyenne temporelle de la puissance (ou de la puissance surfacique) transportée est plus intéressante que sa valeur instantanée, laquelle par ailleurs est

2. Dans un milieu excité par « pompage optique », une onde lumineuse pourra se propager en s'amplifiant ; c'est le principe du laser.

couramment proportionnelle au carré³ de la fonction $f(x, t)$. On peut donc ici noter ainsi la puissance transportée instantanée :

$$\mathcal{P}(x, t) = K f^2(x, t) = K a^2 \exp(-2 k_2 x) \cos^2(\omega t - k_1 x + \varphi)$$

dont la moyenne temporelle que l'on notera $\Pi(x)$ est :

$$\Pi(x) = \langle \mathcal{P}(x, t) \rangle = \frac{1}{2} K a^2 \exp(-2 k_2 x)$$

Il est alors intéressant d'effectuer un bilan sur une tranche du milieu entre les abscisses x et $x + dx$; puisqu'il est sous-entendu que le sens positif du transport d'énergie est celui de l'axe, cette tranche reçoit en x la puissance moyenne $\Pi(x)$ et perd en $x + dx$ la puissance moyenne $\Pi(x + dx)$ et reçoit donc par unité de longueur :

$$\frac{\delta \Pi}{dx} = \frac{\Pi(x) - \Pi(x + dx)}{dx} = -\frac{d\Pi}{dx} = K k_2 a^2 \exp(-2 k_2 x)$$

qui est aussi la puissance linéique perdue par l'onde et dissipée par le phénomène étudié et qui est à l'origine des termes supplémentaires dans l'équation de propagation.

Chaque fois que cela sera possible, une étude énergétique, visant à retrouver ce résultat directement à partir des lois qui régissent ce phénomène, sera plutôt intéressante.

Remarque : l'absorption pourra être négligée quand $|k_2| \ll |k_1|$.

3 Modulation et dispersion.

3.a Intérêt de la modulation

Supposons que deux émetteurs radio veulent émettre l'un la première symphonie de Gustav MALHER, dite symphonie Titan, et notée ici $f_1(t)$ et l'autre l'intégrale des sermons de l'abbé LÉLAINE⁴, notée ici $f_2(t)$. Si les ondes émises par les deux émetteurs sont proportionnelles respectivement à f_1 et f_2 , il est clair qu'un récepteur à portée des deux émetteurs captera la *superposition*, c'est à dire la somme des signaux et que les sermons empêcheront l'écoute de la symphonie et réciproquement. Il faut donc trouver une astuce et cette astuce est la modulation, dans sa version la plus simple la modulation d'amplitude. Le premier émetteur multiplie $f_1(t)$ par une sinusoïde haute fréquence $\cos(\Omega_1 t)$ appelée porteuse (typiquement Ω_1 de l'ordre de 1 MHz, disons 1 MHz tout rond) ; pour simplifier l'exposé, réduisons f_1 à $f_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t)$ où ω_1 est une fréquence audible, disons de 0,1 kHz à 30 kHz. Il émet donc :

$$a_1 \cos(\Omega_1 t) \cos(\omega_1 t) = (1/2) \cos[(\Omega_1 + \omega_1) t] + (1/2) \cos[(\Omega_1 - \omega_1) t]$$

3. ce qui impose un retour aux notations réelles.

4. un héros de Raymond QUENEAU

c'est à dire une somme de deux sinusoides de pulsations $\Omega_1 \pm \omega_1$, donc, compte tenu de la valeur maximale de la fréquence de f_1 , dans une plage de fréquence [0, 97 MHz, 1, 03 MHz]

Vous avez déjà compris que l'autre émetteur fait la même chose avec une porteuse différente, disons 1,2 MHz et qu'il émet donc deux fréquences dans la bande [1, 17 MHz, 1, 23 MHz] et qu'il suffira au récepteur, grâce à un filtre passe-bande réglable, d'isoler l'une ou l'autre des plages pour isoler l'un ou l'autre des signaux. Il restera certes à démoduler mais ce n'est pas l'objet de ce chapitre... mais j'anticipe le désarroi de mes lecteurs en donnant quelques pistes en annexe (partie 8 p. 27).

Remarque 1 : comment tracer le graphe de la porteuse modulée ? Notons formellement $F(t) = a \cos(BF) \cos(HF)$ (HF et BF pour haute et basse fréquence). Comme on a $-1 \leq \cos(HF) \leq 1$, on a $-a \cos(BF) \leq F \leq a \cos(BF)$ et l'on trace sur un même graphe $\pm a \cos(BF)$ puis F qui va de l'une à l'autre de ces courbes à la haute fréquence ; on obtient alors la figure 1 p. 8.

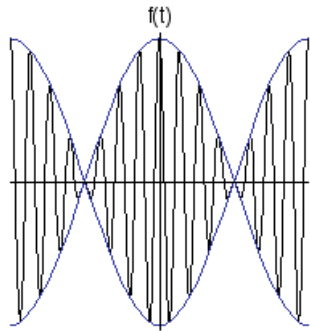


FIGURE 1 – Modulation d'amplitude.

Remarque 2 : il s'agit ici de la modulation d'amplitude, la plus ancienne et la plus rustique ; elle a ses défauts et une autre technique est la modulation de fréquence vise à s'en affranchir. Nous en parlerons en annexe⁵ (partie 8 p. 27). En ce qui concerne la dispersion, les deux types de modulation se comportent en gros de la même façon.

3.b Propagation de la porteuse non modulée.

On se place désormais dans le cas d'une absorption négligeable, sinon l'étude de la propagation n'aurait guère de sens. On néglige donc k_2 mais on n'oublie pas que k_1 est fonction de la pulsation ω et l'on note donc $k_1(\omega)$.

Soit une porteuse en $A \cos(\Omega t - k_1(\Omega) x + \varphi)$. Par identification à la formulation classique en $\cos[\Omega(t - x/c) + \varphi]$, on en déduit que la vitesse de propagation, qu'on appellera

5. On montera aussi comment « démoduler », c'est-à-dire extraire le signal de la porteuse modulée.

désormais *vitesse de phase* et qu'on notera V_φ , s'exprime par $V_\varphi = \Omega/k_1(\Omega)$ ou plutôt $1/V_\varphi = k_1(\Omega)/\Omega = \Re(k(\Omega))/\Omega$.

Cela dit, une onde purement sinusoïdale a un côté particulièrement monotone : rien n'y change et elle ne véhicule donc aucune information.

3.c Propagation d'une porteuse modulée

Considérons un signal, dans un premier temps sinusoïdal, soit $a \cos(\omega t)$ modulant une porteuse $A \cos(\Omega t)$. L'émetteur, en $x = 0$, émet donc, à une constante multiplicative près :

$$A a \cos(\Omega t) \cos(\omega t) = \frac{A a}{2} \left(\cos[(\Omega + \omega) t] + \cos[(\Omega - \omega) t] \right)$$

Les deux termes génèrent deux ondes en $\cos(\omega t - k(\omega) x)$; un récepteur en x reçoit donc :

$$\frac{A a}{2} \left(\cos[(\Omega + \omega) t - k(\Omega + \omega) x] + \cos[(\Omega - \omega) t - k(\Omega - \omega) x] \right)$$

qu'un peu de trigonométrie ramène à :

$$a_1 \cos(\Omega t - k_+ x) \cos(\omega t - k_- x)$$

avec $k_+ = \frac{1}{2} [k(\Omega + \omega) + k(\Omega - \omega)]$ et $k_- = \frac{1}{2} [k(\Omega + \omega) - k(\Omega - \omega)]$.

Un développement de TAYLOR de $k(\Omega \pm \omega)$ à l'ordre 1 autour de Ω donne $k_+ = k(\Omega)$ et

$$k_- = \omega \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\Omega}$$

Le premier facteur, la porteuse donc, se propage à la vitesse $\Omega/k_+ = \Omega/k(\Omega)$, c'est à dire à la même vitesse que si elle n'était pas modulée. Par contre le second facteur, c'est à dire la modulation, se propage à une vitesse différente ω/k_- , appelée *vitesse de groupe* et notée V_g ; on a donc :

$$1/V_g = \left. \frac{dk_1}{d\omega} \right|_{\Omega}$$

Remarque 1 : dans tout le calcul k a été mis pour k_1 pour alléger d'où le résultat final.

Remarque 2 : pour V_g , vitesse de la *modulation*, la dérivée de k_1 est prise au point correspondant à la pulsation de la *porteuse*, c'est source d'erreur : bien y faire attention !

Remarque 3 : la remarque 2 montre que la vitesse de groupe est indépendante de la pulsation (ou de la fréquence) de la modulation. Il en résulte que si le signal est de la forme $\sum_i a_i \cos(\omega_i t)$, il se déplace en bloc à la vitesse de phase alors que s'il se propageait seul sans porteuse les différentes composantes se propageraient avec leurs vitesses de phase, toutes différentes, se décaleraient donc les unes par rapport aux autres et le signal se déformerait donc. La modulation, outre son avantage initial, a la propriété de véhiculer sans déformation tout signal composite, pourvu toutefois que le développement limité utilisé ci-dessus soit validé par le fait que tous les ω_i soient négligeables devant la pulsation Ω de la porteuse.

4 Propagation d'un paquet d'ondes.

4.a Le paquet d'onde vu comme une modulation.

Une onde sinusoïdale ou qui soit somme de sinusoïdes est totalement irréaliste, car censée exister de toute éternité et jusqu'à la fin des temps. On observe en réalité des *trains d'ondes* ou *paquets d'ondes* qu'on peut représenter par $f(t) = g(t) \exp(j \Omega t)$ où $g(t)$ varie lentement sur des temps de l'ordre de la pseudo-période $\frac{2\pi}{\Omega}$ et où aussi $g(t)$ est nul en dehors d'un intervalle $[t_1, t_2]$ avec $(t_2 - t_1)$ grand devant la pseudo-période $\frac{2\pi}{\Omega}$.

En changeant de point de vue, $f(t)$ n'est pas seulement une sinusoïde tronquée dans le temps, mais peut être aussi mathématiquement interprété comme un signal modulant une porteuse. Toutefois d'un point de vue pratique, c'est souvent la fonction $f(t)$ qui est la grandeur intéressante et prend alors le statut de signal au détriment de la modulation $g(t)$; donnons comme exemples une impulsion laser, un coup de sifflet ou un rond dans l'eau.

La notion de transformée de FOURIER permet de considérer que $f(t)$ est somme de vraies sinusoïdes et l'on se ramène, en plus compliqué, au cas précédent où la porteuse $\exp(j \Omega t)$ se propage à la vitesse V_φ et la modulation $g(t)$ à la vitesse V_g .

Les calculs sont plus ou moins compliqués selon l'expression de $g(t)$. Plaçons nous dans le cas le plus simple où $g(t) = 1$ dans l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et $g(t) = 0$ en dehors. On rappelle que :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(j \omega t) d\omega$$
$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j \omega t) dt$$

Ici, les calculs sont aisés et l'on en tire :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \exp[j(\Omega - \omega)t] dt = \dots$$
$$\dots = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin[(\Omega - \omega)T/2]}{[(\Omega - \omega)T/2]} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \text{snc}[(\Omega - \omega)T/2]$$

où l'on note $\text{snc}(u)$ la fonction $\sin(u)/u$ que l'on appelle « sinus cardinal ». Le graphe de la figure 2 p. 11 (où Ω et ω sont rebaptisés respectivement Ω_0 et Ω) montre que l'étendue *spectrale* (c'est à dire en fréquence/pulsation) de \tilde{f} est de quelques fois $1/T$ autour de Ω donc d'autant plus serrée que T est plus long, ce qui est normal, car alors on se rapproche de la sinusoïde éternelle. N'oublions pas de remarquer que $T \gg 1/\Omega$ entraîne $1/T \ll \Omega$.

A vrai dire, la seule chose réellement importante dans le résultat précédent, parce qu'il se généralise à toutes les fonctions $g(t)$ négligeables en dehors d'un intervalle de durée T , c'est que le spectre $\tilde{f}(\omega)$ est lui aussi négligeable en dehors d'un intervalle de pulsations centré sur Ω et de largeur spectrale proportionnelle à $\frac{1}{T}$.

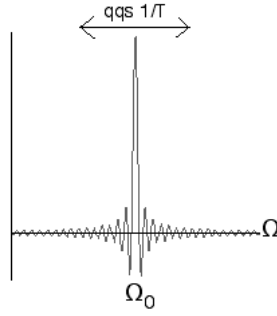


FIGURE 2 – Spectre d'un train d'onde rectangulaire.

Revenons à un $g(t)$ quelconque. Chaque terme $\tilde{f}(\omega) \exp(j \omega t)$ génère une onde en $\tilde{f}(\omega) \exp[j(\omega t - k(\omega) x)]$ et au total, on aura un phénomène en :

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp[j(\omega t - k(\omega) x)]$$

Si l'on se limite à un développement de TAYLOR de $k(\omega)$ autour de Ω , rendu valable par la faible largeur de l'intervalle spectral où \tilde{f} est non négligeable, soit, avec la définition de V_g , $k(\omega) = k(\Omega) + (1/V_g)(\omega - \Omega)$ et si l'on remarque que $\omega = \Omega + (\omega - \Omega)$, on arrive aisément, avec $V_\varphi = \Omega/k(\Omega)$, à :

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[j \Omega \left(t - \frac{x}{V_\varphi} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp \left[j (\omega - \Omega) \left(t - \frac{x}{V_g} \right) \right]$$

et l'on retrouve à nouveau le produit d'une porteuse se déplaçant à la vitesse V_φ et d'une modulation se déplaçant à la vitesse V_g . Pour cette dernière, le fait que son expression soit intégrale ne masque pas le résultat, car il s'agit d'une somme (qu'est l'intégrale) de termes se déplaçant tous à la même vitesse.

Remarque : si le signal $g(t)$ ne module aucune porteuse, c'est à dire que $f(t) = g(t)$, on peut formellement noter $f(t) = g(t) \exp(j \Omega t)$ en choisissant $\Omega = 0$; on en déduit qu'il se déplace à la vitesse de groupe ainsi calculée :

$$1/V_g = \left. \frac{dk_1}{d\omega} \right|_{\omega=0}$$

Du reste, on peut aisément adapter la démonstration précédente pour arriver à ce résultat. C'est simple mais l'on trouve rarement cette conclusion dans la littérature.

4.b Déformation d'un paquet d'ondes.

• Spectre d'un paquet d'onde gaussien.

Pour x assez grand, l'erreur commise par l'utilisation d'un développement limité sur $k(\Omega \pm \omega)x$, en gros confondue avec le terme d'ordre 1 devient importante, non pas devant l'ordre 1 ce qui serait absurde mais devant π donc son rôle dans la valeur de l'exponentielle complexe cesse d'être négligeable, on est alors obligé de pousser plus loin le développement de TAYLOR de $k(\Omega)$.

En général, les calculs ne peuvent être menés de façon littérale jusqu'à leur terme et nous choisirons donc l'un des rares cas où l'on puisse le faire, celui où $g(t)$ est une fonction gaussienne, et heureusement les mesures effectuées dans d'autres cas aboutissent qualitativement aux mêmes conclusions expérimentales.

On considère donc un train d'onde défini par :

$$f(t) = g_m \exp\left(-\frac{b^2 t^2}{2}\right) \exp(j \Omega t)$$

La fonction $g(t) = g_m \exp\left(-\frac{b^2 t^2}{2}\right)$ peut être considérée comme négligeable dès que l'exponentielle devient inférieure disons à 10^{-3} soit $|t| > \tau = \frac{\sqrt{6 \ln 10}}{b} \approx \frac{4}{b}$ dont il faut retenir qu'il s'agit d'un train d'onde de durée estimée à $\frac{8}{b}$ et de valeur maximale g_m .

La transformée de FOURIER ou spectre de $f(t)$ est :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j \omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_m \exp\left(-\frac{b^2 t^2}{2}\right) \exp[j(\Omega - \omega) t] dt$$

Nous admettrons le résultat mathématique suivant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{b^2 x^2}{2} + j a x\right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} \exp\left(-\frac{a^2}{2b^2}\right)$$

qui conduit donc à :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{g_m}{b} \exp\left[-\frac{(\Omega - \omega)^2}{2b^2}\right]$$

• Propagation d'un train d'onde gaussien.

Si un générateur émet en $x = 0$ un train d'onde propagatif :

$$F(0, t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(j \omega t) d\omega$$

où $f(t)$ est la fonction définie plus haut et si le milieu de propagation est dispersif, on peut affirmer que :

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp[j(\omega t - k(\omega)x)] d\omega$$

Comme annoncé plus haut, on peut remplacer $k(\omega)$ par un développement limité à l'ordre 2 autour de Ω qu'on note :

$$k(\omega) = k(\Omega) + (\omega - \Omega)k'(\Omega) + \frac{1}{2}(\omega - \Omega)^2 k''(\Omega) = \frac{\Omega}{V_0} + \frac{\omega - \Omega}{V_1} + \frac{\alpha(\omega - \Omega)^2}{2}$$

notation qui définit V_0 , V_1 et α à partir des valeurs en Ω de $k(\omega)$ et de ses dérivées ; bien sûr, on reconnaît dans V_0 et V_1 respectivement la vitesse de phase V_φ et la vitesse de groupe V_g .

On reprend, cette fois à l'ordre 2, le calcul effectué plus haut, en reportant le développement limité de $k(\omega)$ et l'expression de $\tilde{f}(\omega)$ et avec à nouveau l'astuce $\omega = \Omega + (\omega - \Omega)$ pour arriver à :

$$F(x, t) = \dots \frac{g_m}{b\sqrt{2\pi}} \exp \left[j\Omega \left(t - \frac{x}{V_\varphi} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-(\Omega - \omega)^2 \left(\frac{1}{2b^2} + j\frac{\alpha x}{2} \right) \right] \exp \left[j(\omega - \Omega) \left(t - \frac{x}{V_g} \right) \right]$$

qui se présente encore une fois comme le produit d'une porteuse en $\exp \left[j\Omega \left(t - \frac{x}{V_\varphi} \right) \right]$ se propageant à la vitesse de phase et d'une modulation $G(x, t) = \frac{g_m}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$ décrite par l'intégrale. Dans celle-ci posons $X = \omega - \Omega$ et notons $\beta(x)$ la grandeur définie par $\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{b^2} + j\alpha x$, la modulation s'écrit alors :

$$G(x, t) = \frac{g_m}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{X^2}{2\beta^2} \right) \exp \left[jX \left(t - \frac{x}{V_g} \right) \right]$$

La formule $\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{b^2 x^2}{2} + j a x \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} \exp \left(-\frac{a^2}{2b^2} \right)$ où l'on remplace x par X , b par $\frac{1}{\beta}$ et a par $\left(t - \frac{x}{V_g} \right)$ est encore valable avec β complexe⁶ et conduit donc à :

$$G(x, t) = g_m \frac{\beta}{b} \exp \left[-\frac{\beta^2 \left(t - \frac{x}{V_g} \right)^2}{2} \right]$$

On y retrouve dans $\left(t - \frac{x}{V_g} \right)$ la propagation à la vitesse de phase, mise en évidence plus haut dans le cas général et l'on y retrouve aussi la structure gaussienne de départ mais où l'amplitude g_m a été multipliée par $\frac{\beta}{b}$ et le paramètre b remplacé par β . Détaillons ces deux modifications en tenant compte que β est complexe.

6. Pour le démontrer, il faut se plonger dans la théorie délicate des fonctions d'une variable complexe et son célèbre théorème des résidus. Le résultat n'est valable que si $\frac{1}{\beta^2}$ a une partie réelle positive, ce qui est le cas ici.

• **Evolution de l'amplitude du train d'onde.**

En notant $\beta = |\beta| \exp j \psi_1(x)$, l'amplitude réelle est multipliée par $\frac{|\beta|}{b}$, soit, en notant $G_m(x)$ l'amplitude de la gaussienne après déplacement de x , $G_m(x) = g_m \frac{|\beta|}{b}$. Or on a $\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{b^2} + j \alpha x$ d'où successivement :

$$\frac{1}{|\beta|^2} = \left| \frac{1}{b^2} + j \alpha x \right| = \sqrt{\frac{1}{b^4} + \alpha^2 x^2}$$

$$|\beta| = \left(\frac{1}{b^4} + \alpha^2 x^2 \right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$G_m(x) = G_m(0) (1 + b^4 \alpha^2 x^2)^{-\frac{1}{4}}$$

résultat qui devient pour x assez grand $G_m(x) \approx \frac{G_m(0)}{b \sqrt{\alpha x}}$ dont il faut surtout retenir la dépendance en $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Remarque : l'influence de $\exp j \psi_1(x)$ sera étudiée ci-après en combinaison avec un autre facteur perturbateur. D'ores et déjà il est aisé de vérifier que ψ_1 varie de 0 pour $x = 0$ à $-\frac{\pi}{4}$ pour x assez grand ; somme toute il varie plutôt lentement.

• **Evolution de la largeur du train d'onde.**

Dans l'exponentielle d'allure gaussienne, nous sommes obligés de décomposer $\beta(x)^2$ en partie réelle notée par exemple $\beta'(x)^2$ et partie imaginaire notée par exemple $j \beta''(x)^2$; dès lors en notant τ pour $t - \frac{x}{V_g}$, cette exponentielle s'écrit :

$$G(x, t) = g_m \frac{\beta}{b} \exp \left(-\frac{\beta'^2 \tau^2}{2} \right) \exp \left(-j \frac{\beta''^2 \tau^2}{2} \right)$$

où $\psi_2(x) = \frac{\beta''^2 \tau^2}{2}$ est un déphasage que nous évoquerons plus loin et β' et le paramètre de la « vraie » gaussienne qui remplace le b qui y figurait en $x = 0$; par analogie avec le point de départ, la durée du train d'onde passe d'environ $T(0) = \frac{8}{b}$ en $x = 0$ à $T(x) = \frac{8}{\beta'(x)}$ en une autre abscisse. Intéressons-nous donc à cette durée $T(x)$; on a successivement :

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{b^2} + j \alpha x = \frac{1 + j b^2 \alpha x}{b^2}$$

$$\beta^2 = \frac{b^2}{1 + j b^2 \alpha x} = \frac{b^2 (1 - j b^2 \alpha x)}{1 + b^4 \alpha^2 x^2}$$

$$\beta'^2 = \frac{b^2}{1 + b^4 \alpha^2 x^2}$$

$$T(x) = \frac{8}{\beta'(x)} = \frac{8}{b} \sqrt{1 + b^4 \alpha^2 x^2} = T(0) \sqrt{1 + b^4 \alpha^2 x^2}$$

résultat qui devient pour x assez grand $T(x) \approx T(0) b^2 \alpha x$ dont il faut surtout retenir qu'il est proportionnel à x .

Retenons donc que lorsqu'un train d'onde s'est suffisamment éloigné de sa source, il s'étire dans le temps proportionnellement à la distance parcourue et que son amplitude diminue de façon inversement proportionnelle à la racine carrée de la distance.

Remarque 1 : la puissance transportée est toujours proportionnelle à un carré d'amplitude donc pour un signal fini dans le temps, l'énergie transportée est proportionnelle au produit de ce carré par la durée du signal. La conservation de l'énergie entraîne donc bien que si la durée varie en x^1 , l'amplitude doit varier en $x^{-\frac{1}{2}}$

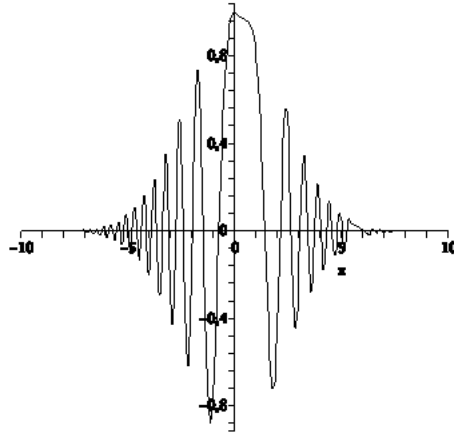


FIGURE 3 – Déformation de la porteuse d'un train d'onde.

Remarque 2 : en reprenant le calcul mené plus haut, l'on tire

$$\beta''^2 = -\frac{b^4 \alpha x}{1 + b^4 \alpha^2 x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\beta''^2 \tau^2}{2} = -\frac{b^4 \alpha x \tau^2}{2(1 + b^4 \alpha^2 x^2)}$$

Pour une même valeur de τ c'est à dire dans un référentiel lié au déplacement du train d'onde à la vitesse de phase, ψ_2 prend en $x = 0$ la valeur 0 puis décroît jusque $-\frac{b^2 \tau^2}{4}$ (c'est aisé à monter) et croît à nouveau et tend vers 0 pour x assez grand. Autour du minimum, il apparaît une modification de la phase de la porteuse proportionnelle à τ^2 donc non linéaire qui va lui donner un aspect d'onde modulée en fréquence (voir figure 3 p. 15 tracée avec un logiciel de calcul et des valeurs numériques arbitraires). Cela dit, ce ne sera guère pertinent car l'essentiel c'est la propagation du train d'onde en tant que modulation ; la porteuse n'est que la mule qui le porte et qu'importe qu'elle ait l'air bizarre. Pour mémoire il faut y ajouter le $\psi_1(x)$ introduit plus haut, ce qui ne change en rien l'analyse.

5 Vaincre la dispersion sans moduler.

5.a L'équation des télégraphistes.

On modélise une portion de longueur dx de ligne électrique à haute fréquence par la figure 4 p. 16 où r , ℓ , c (le c du schéma sera remplacé par γ dans le texte pour éviter la confusion avec la célérité des ondes) et g désignent respectivement une résistance, une inductance, une capacité et une conductance linéïques.

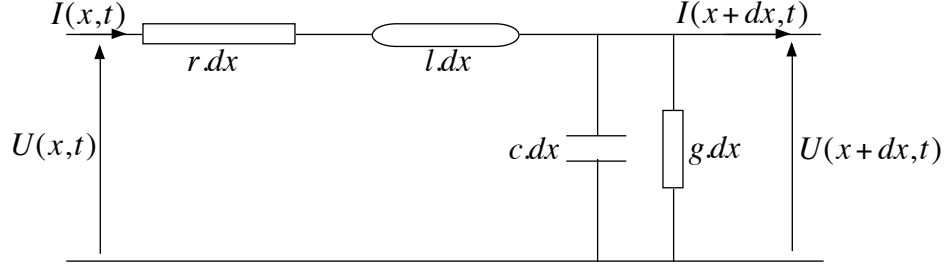


FIGURE 4 – Ligne bifilaire

La branche qui contient la résistance et l'inductance en série, vérifie :

$$U(x, t) - U(x + dx, t) = r dx I(x, t) + \ell dx \frac{\partial I}{\partial t}(x, t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{U(x + dx, t) - U(x, t)}{dx} = -r I(x, t) - \ell \frac{\partial I}{\partial t}(x, t)$$

La loi des noeuds permet d'affirmer :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = g dx U(x + dx, t) + \gamma dx \frac{\partial U}{\partial t}(x + dx, t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{I(x + dx, t) - I(x, t)}{dx} = -g U(x, t) - \gamma \frac{\partial U}{\partial t}(x, t)$$

On aboutit donc à un système couplé comme dans le chapitre D-II mais avec des termes supplémentaires, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -r I - \ell \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -g U - \gamma \frac{\partial U}{\partial t} \end{cases}$$

Dérivons la première par rapport à x et reportons-y la seconde après l'usage du théorème de SCHWARTZ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -r \frac{\partial I}{\partial x} - \ell \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -r \frac{\partial I}{\partial x} - \ell \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} = \dots$$

$$\dots = r \left(g U + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \ell \frac{\partial}{\partial t} \left(g U + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} \right) = r g U + (r \gamma + g \ell) \frac{\partial U}{\partial t} + \ell \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

et un calcul analogue conduirait à :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = r g I + (r \gamma + g \ell) \frac{\partial I}{\partial t} + \ell \gamma \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

équation connue sous le nom d'*équation des télégraphistes* ce qui prouve que l'on s'est intéressé au problème à l'époque où le téléphone n'avait pas encore supplanté le télégraphe.

Si l'on recherche des solutions propagatives en $U(x, t) = U_0 \exp j(\omega t - kx)$ ou en $I(x, t) = I_0 \exp i(\omega t - kx)$, on reporte dans l'équation, on simplifie par l'exponentielle et l'on arrive après un changement de signe général à l'équation de dispersion suivante :

$$k^2 = \ell \gamma \omega^2 - j(r \gamma + g \ell) \omega - r g$$

Pour une ligne de qualité, il va de soi que les pertes par effet JOULE sont réduites donc que r et g sont petits, plus précisément nous supposons $r \ll \ell \omega$ et $g \ll \gamma \omega$. On note $\ell \gamma = \frac{1}{c^2}$ que l'on factorise ainsi que ω^2 pour arriver à :

$$k = \frac{\omega}{c} \left[1 - j \left(\frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) - \left(\frac{r}{\ell \omega} \right) \left(\frac{g}{\gamma \omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Remplaçons cette expression par un développement limité en $\frac{r}{\ell \omega}$ et $\frac{g}{\gamma \omega}$ considérés comme infiniment petits du même ordre; on le poussera à l'ordre 2 pour que $\Re(k)$ et $\Im(k)$ soient tous deux connus au premier ordre non nul près au delà de l'ordre 0. On part de $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$; on y reporte $x = -j \left(\frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) - \left(\frac{r}{\ell \omega} \right) \left(\frac{g}{\gamma \omega} \right)$ et l'on se limite aux ordres 1 et 2 des infiniments petits. On obtient successivement, en se servant de l'identité $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$:

$$k = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{j}{2} \left(\frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\ell \omega} \right) \left(\frac{g}{\gamma \omega} \right) - \frac{1}{8} \left(-j \left(\frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) + \dots \right)^2 \right]$$

$$k = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{j}{2} \left(\frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\ell \omega} - \frac{g}{\gamma \omega} \right)^2 \right]$$

On obtiendra (cf supra) une onde de la forme $U(x, t) = U_0 \exp(-k_2 x) \exp j(\omega t - k_1 x)$ ou encore $U(x, t) = U_0 \exp(-k_2 x) \exp j \omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi} \right)$ avec :

$$k_2 = -\Im(k) = \frac{1}{2c} \left(\frac{r}{\ell} + \frac{g}{\gamma} \right)$$

$$\frac{1}{v_\varphi} = \frac{k_1}{\omega} = \frac{\Re(k)}{\omega} = \frac{1}{c} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{\ell} - \frac{g}{\gamma} \right)^2 \right]$$

A l'époque du télégraphe roi aux USA, la dispersion qui étale les signaux était un défaut majeur, plus tard à l'époque du téléphone naissant (la voix était transmise en direct et non

comme modulation d'une porteuse) il en fut de même car aigus et graves ne se propageaient pas à la même vitesse. La conclusion de notre étude montre qu'il y a une réponse simple au problème : la condition suivante (dite condition de HEAVISIDE) $\frac{r}{\ell} = \frac{g}{\gamma}$ rend la vitesse de phase constante à l'ordre 2 (et même à l'ordre 3 car celui-ci est imaginaire pur et n'influe que sur k_2).

Dans la pratique, l'on avait systématiquement $\frac{r}{\ell} > \frac{g}{\gamma}$; la solution la plus simple, imaginée en 1900 par l'ingénieur M. PUPIN⁷, consiste à augmenter ℓ (ainsi, on diminue aussi k_1 donc l'amortissement) en introduisant à intervalle régulier une bobine sur la ligne.

De nos jours grâce à la modulation permise par l'accès aux hautes fréquences, le problème a disparu de la téléphonie et sa solution aussi, mais la problématique se retrouve dans de nouvelles situations (cf infra).

Remarque : on n'a pas jugé utile, vu la problématique du chapitre, de s'intéresser à l'impédance de la ligne, rapport, ici complexe et fonction de ω , entre $U(x, t)$ et $I(x, t)$.

5.b Un modèle simple de soliton.

Lors qu'un milieu est régi par des équations non-linéaires qui, dans l'approximation des petits phénomènes, se linéarisent pour donner un milieu dispersif, il arrive que les effets de la non-linéarité et de la dispersion se compensent pour permettre la propagation sans déformations d'un train d'onde (les précisions suivent) de structure adaptée ; on parle alors de *soliton*. Les exemples « naturels »⁸ sont tous extrêmement complexes à cause de la non-linéarité. Nous allons ici nous contenter d'un exemple simple, tout à fait réalisable en laboratoire, afin d'en dégager le principe.

• Présentation et mise en équation de l'exemple.

Soit une chaîne infinie de pendules simples identiques, coaxiaux⁹ et équidistants. Chaque pendule est constitué d'une masse ponctuelle m au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ . Deux pendules successifs sont reliés par un fil de torsion qui exerce sur les deux pendules une interaction de rappel dont le moment projeté sur l'axe commun est proportionnel à la différence des angles que font les pendules concernés avec la verticale ; on note α la constante de proportionnalité. On note $\theta_n(t)$ cet angle pour le pendule de rang n . Le tout est rappelé dans la figure 5 p. 19.

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation Oy du pendule de rang n , la verticale descendante étant Oz et le plan de rotation Ozx . La masse m

7. En son hommage, la méthode s'appelle le pupinisation de la ligne.

8. Le tsunami en est vraisemblablement un.

9. Comprenez que les mouvements des pendules se font dans des plans parallèles (l'un est dessiné sur la figure) et que les points d'accrochage sont alignés sur un axe perpendiculaire à ces plans.

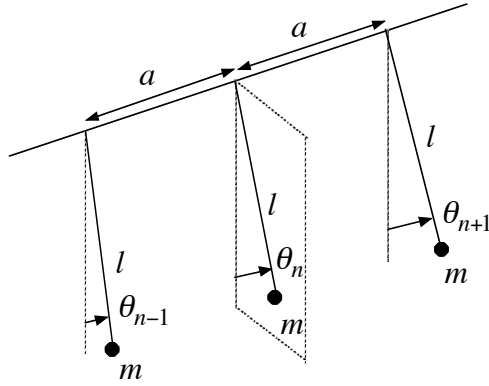


FIGURE 5 – Chaîne de pendules couplés.

étant au point M , on note $\overrightarrow{OM} = \ell \vec{e}_r$ dans la base cylindrique locale.

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = (\ell \vec{e}_r) \wedge (m \ell \dot{\theta}_n \vec{e}_\theta) = m \ell^2 \dot{\theta}_n \vec{e}_y$$

Le moment du poids est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{g} = (\ell \vec{e}_r) \wedge (m g \vec{e}_z) = m g \ell \vec{e}_r \wedge (\cos \theta_n \vec{e}_r - \sin \theta_n \vec{e}_\theta) = -m g \ell \sin \theta_n \vec{e}_y$$

L'articulation de l'axe Oy est supposée parfaite et le moment de l'interaction des forces de contact est nulle.

Le fil entre les pendules de rang n et $n+1$ est tordu de l'angle $\theta_{n+1} - \theta_n$ et exerce donc un moment $\alpha (\theta_{n+1} - \theta_n)$ sur le pendule de rang n et le moment opposé sur le pendule de rang $n+1$; en se décalant d'un rang, le fil entre les pendules de rang $n-1$ et n est tordu de l'angle $\theta_n - \theta_{n-1}$ et exerce donc un moment $\alpha (\theta_n - \theta_{n-1})$ sur le pendule de rang $n-1$ et le moment opposé sur le pendule de rang n .

La dérivée temporelle de $\vec{\sigma}_O$ est égale à la somme des moments en O ; on projette sur Oy et il vient :

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_n = -m g \ell \sin \theta_n + \alpha (\theta_{n+1} - \theta_n) - \alpha (\theta_n - \theta_{n-1})$$

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_n = -m g \ell \sin \theta_n + \alpha (\theta_{n-1} + \theta_{n+1} - 2\theta_n)$$

Dans l'hypothèse d'un phénomène variant significativement sur des distances grandes devant la distance a entre deux pendules successifs, un passage au continu (voir chapitre D-II) s'impose. Avec un choix convenable de l'origine, le pendule de rang n se trouve à une ordonnée $y_n = n a$; on cherche donc une fonction $\tilde{\theta}(y, t)$ telle que, pour n entier on ait $\tilde{\theta}(n a, t) = \theta_n(t)$ et qu'entre les points d'ordonnées $n a$, la fonction se comporte de façon raisonnable (continuité, dérivabilité, variations lentes) de façon qu'un développement limité

à l'ordre deux soit une bonne approximation. Alors

$$\theta_{n+1}(t) = \tilde{\theta}[(n+1)a, t] = \tilde{\theta}(na+a, t) = \tilde{\theta}(na, t) + a \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \tilde{\theta}(na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} (na, t) + \dots$$

de même

$$\theta_{n-1}(t) = \tilde{\theta}[(n-1)a, t] = \tilde{\theta}(na-a, t) = \tilde{\theta}(na, t) - a \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \tilde{\theta}(na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} (na, t) + \dots$$

On en déduit aisément que

$$\theta_{n-1} + \theta_{n+1} - 2\theta_n = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} (na, t)$$

On reporte dans l'équation du mouvement du pendule de rang n et l'on confond dans l'écriture $\tilde{\theta}$ et θ

$$m \ell^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -m g \ell \sin \theta + \alpha a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Divisons par $m \ell^2$ et l'on arrive à :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{\alpha a^2}{m \ell^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

soit en rebaptisant les constantes :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \sin(\theta) + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

C'est sur ce modèle que nous raisonnerons.

• Approximation des petites amplitudes.

Pour de faibles amplitudes, on peut confondre le sinus et l'angle et l'équation se linéarise en

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \theta + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

La recherche de solutions en $\theta(y, t) = \theta_m \exp[j(\omega t - k y)]$ conduit (toujours de la même façon) à l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

Si $\omega < \omega_0$, alors k est imaginaire pur, d'où en notant $k = -i \kappa$

$$\theta(y, t) = \theta_m \exp(i(\omega t - k y)) = \theta_m \exp(-\kappa y) \exp(i \omega t)$$

qui correspond à un phénomène non progressif amorti selon Oy

Si $\omega > \omega_0$, alors la propagation est possible mais le milieu est dispersif car k n'est pas proportionnel à ω ; les formules établies plus haut donnent :

$$\begin{cases} \frac{1}{V_\varphi} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega} \\ \frac{1}{V_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} V_\varphi = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \\ V_g = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega} \end{cases}$$

où l'on rappelle que ω est la pulsation de la porteuse.

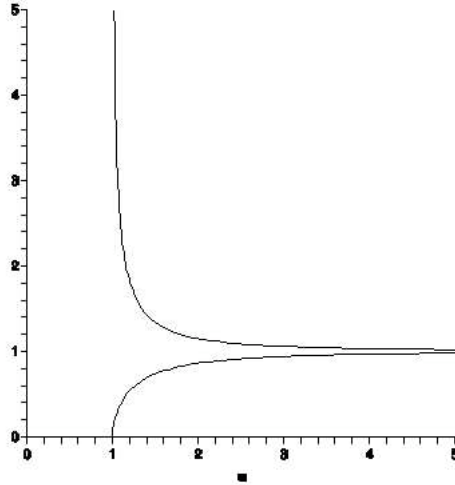


FIGURE 6 – Vitesses de phase et de groupe.

La figure 6 p. 21 donne les graphes de V_φ/c (en haut) et V_g/c (en bas) en fonction de ω/ω_0 .

Remarque : il est inutile donc dangereux¹⁰ de remarquer comme on le voit souvent écrit que $V_\varphi V_g = c^2$; c'est dangereux car on a volontiers l'impression qu'une formule si belle et si simple ne peut être qu'universelle, ce qui n'est bien sûr pas le cas. Circulons donc, il n'y a rien à voir.

Rappelons que dans un milieu dispersif, un signal bref, c'est-à-dire nul en dehors d'un court intervalle de temps se propage en s'étalant dans le temps et en diminuant d'amplitude. Pour en être encore plus convaincu mais surtout parce que ça donne la piste à explorer

10. un aphorisme personnel

plus loin, vérifions ce dernier point en cherchant à l'équation linéarisée une solution correspondant à la propagation sans déformation d'un signal limité dans le temps ; c'est à dire qu'on cherche une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et une constante v telles que $\theta(y, t) = f(t - y/v)$ avec $f(\tau) \rightarrow 0$ (modulo 2π) et $f'(\tau) \rightarrow 0$ quand $|\tau| \rightarrow \infty$. Si $\theta(y, t) = f(t - y/v)$, alors en dérivant comme une fonction composée

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = f'(t - y/v) \frac{\partial}{\partial y}(t - y/v) = \left(-\frac{1}{v}\right) f'(t - y/v)$$

et en dérivant une seconde fois

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \left(-\frac{1}{v}\right)^2 f''(t - y/v)$$

de même

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = (1)^2 f''(t - y/v)$$

En reportant dans l'équation linéarisée

$$f'' = -\omega_0^2 f + \frac{c^2}{v^2} f''$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) f'' = -\omega_0^2 f$$

Si $1 - c^2/v^2$ est positif, f est sinusoidal et ne tend pas vers 0 à l'infini ; si cette quantité est négative, f est une combinaison d'exponentielles et diverge soit vers ∞ soit vers $-\infty$; soit enfin elle est nulle et f est nulle. Dans aucun cas, il ne s'agit d'un signal limité.

• Recherche d'un soliton.

Les mêmes calculs dans le cas général, non linéarisé, conduisent à :

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) f'' = -\omega_0^2 \sin f$$

En pensant à la démonstration du théorème de l'énergie mécanique, on peut partir de $m \ddot{x} = F(x)$, multiplier par f' puis intégrer :

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) f'' f' = -\omega_0^2 \sin f f'$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \frac{f'^2}{2} = \omega_0^2 \cos f + Cte$$

A l'infini f et f' tendent vers 0 et $\cos f$ vers 1, ce qui permet de trouver la constante et finalement

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \frac{f'^2}{2} + \omega_0^2 (1 - \cos f) = 0$$

Notons $\tau = t - y/v$ l'argument de f : l'idée est d'isoler f'^2 , d'en prendre la racine et de séparer les variables

$$f'^2 = \frac{2\omega_0^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1} (1 - \cos f) = \frac{4\omega_0^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \sin^2\left(\frac{f}{2}\right)$$

Remarquons au passage qu'un tel soliton n'est possible que pour $v < c$. On en prend la racine, au signe près qui correspond au sens de rotation :

$$f' = \frac{df}{d\tau} = \frac{2\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}} \sin\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$\frac{df}{\sin\left(\frac{f}{2}\right)} = \frac{2\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}} d\tau$$

La suite relève de la routine mathématique ; bien que seule l'interprétation du résultat soit pertinente, il n'est pas totalement inutile qu'un physicien ait une aisance minimale dans les calculs ¹¹

On passe classiquement par la tangente de l'angle moitié, c'est-à-dire qu'on pose

$$u = \tan\left(\frac{f}{4}\right)$$

$$\text{d'où} \quad \sin\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\text{et} \quad f = 4 \arctan(u)$$

$$\text{d'où} \quad df = \frac{4 du}{1+u^2}$$

Ce changement de variable conduit donc à

$$\frac{du}{u} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}} d\tau$$

qui s'intègre aisément en

$$\ln u = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}} \tau + Cte$$

11. En affirmant ceci, je me classe irrémédiablement dans la catégorie des espèces menacées d'extinction et vous implore de signer la pétition réclamant mon classement parmi les espèces protégées.

La valeur de la constante est liée au choix des origines du temps et de l'espace ; on peut toujours les choisir de sorte que la constante soit nulle. Alors

$$\theta(y, t) = f(t - y/v) = 4 \arctan(u) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}} (t - y/v) \right) \right]$$

A y donné et pour $t \rightarrow -\infty$, l'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$, l'exponentielle vers 0 et l'arc-tangente vers 0 ainsi que θ et pour $t \rightarrow +\infty$, l'argument de l'exponentielle tend vers $+\infty$, l'exponentielle vers $+\infty$ et l'arc-tangente vers $\pi/2$ et θ vers 2π , c'est à dire revient à l'équilibre mais après un tour complet (notons que c'est ici parce que 0 et 2π correspondent à la même position que cette solution est conforme à la définition d'un signal bref). Par ailleurs pour $t = \frac{y}{v}$, l'argument de l'exponentielle tend vers 0, l'exponentielle vers 1 et l'arc-tangente vers $\pi/4$ et θ vers π , c'est à dire le point le plus haut.

Le passage du soliton se traduit par la rotation d'un tour complet du pendule selon la loi particulière qui vient d'être établie et dont la figure 7 p. 24 donne le graphe pour $y = 0$.

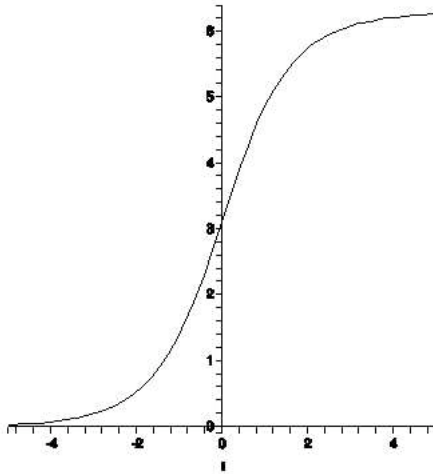


FIGURE 7 – Graphe du soliton.

On peut donner un indicateur de la durée pratique de ce signal, au moins en ordre de grandeur par l'intervalle entre les instants (opposés par symétrie) où $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ce qui correspond à :

$$t \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \frac{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}{\omega_0} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} \right) \right]$$

qui montre que la largeur du soliton est liée à sa vitesse de propagation (rappelons que l'on a $v < c$), les plus lents étant les plus étalés.

6 Inverser les effets de la dispersion : compression d'un train d'onde.

6.a Approche théorique.

Revenons à l'exemple du train d'onde gaussien défini en $x = 0$ et abstraction faite de la porteuse par :

$$G(0, t) = g_m \exp\left(-\frac{b^2 t^2}{2}\right)$$

Après propagation il devient :

$$G(x, t) = g_m \frac{\beta}{b} \exp\left[-\frac{\beta^2 \left(t - \frac{x}{V_g}\right)^2}{2}\right]$$

où $\beta(x)$ est défini par la relation suivante où intervient une constante α caractéristique du milieu :

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{b^2} + j \alpha x$$

Nous avons vu au paragraphe 4.b p. 12 que le passage de b réel à β complexe se traduit par un élargissement et un affaiblissement du train d'onde.

Supposons désormais qu'en $x = 0$, b soit complexe et que l'on puisse écrire :

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{b_0^2} - j \alpha x_0$$

où b_0 et x_0 sont des constantes réelles définies cette notation. Alors après propagation, b est remplacé par $\beta(x)$ tel que :

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{b^2} + j \alpha x = \frac{1}{b_0^2} + j \alpha (x - x_0)$$

et en particulier $\beta(x_0) = b_0$ réel; c'est-à-dire que formellement on réalise l'opération inverse que celle de l'étude précédente, une sorte de remontée dans le temps qui se traduit donc par un rétrécissement (une compression dit-on) et un renforcement du train d'onde.

Pour réaliser $G(0, t)$, il faudra générer une fonction dont le graphe est celui de la figure 3 p. 15 lue à l'envers, par suite de la formelle inversion du temps.

C'est une des techniques utilisée pour réaliser un laser femtoseconde qui émet des impulsions de durée de une à cent femtosecondes (1fs= 10^{-15} s).

6.b Approche intuitive.

On peut du reste avoir l'intuition de cette technique sans utiliser du tout de calculs complexes. Une impulsion lumineuse émise en $x = 0$ avec une modulation d'amplitude peut être modélisée par une fonction égale à :

$$E(0, t) = E_m \exp(-a t^2) \cos(\omega_0 t + b t^2)$$

On définit la pulsation instantanée par $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ où φ est la phase¹², soit ici $\omega(t) = \omega_0 + 2bt$.

On découpe l'impulsion en successions de trains d'onde entre t et $t + dt$ de pulsation $\omega(t)$ et se propageant à la vitesse de groupe $V_g(\omega)$. Ces trains d'onde élémentaires émis à l'instant t en $x = 0$ arrivent à la distance L de l'émetteur à l'instant :

$$T(t) = t + \frac{L}{V_g(\omega(t))} = t + \frac{L}{V_g(\omega_0 + 2bt)}$$

.

Si $T(t)$ est une constante, tous les trains d'onde élémentaires, de durée infiniment petite, arrivent en même temps et le train d'onde global, somme de ceux-ci, a bien été compressé jusque cette valeur infiniment petite. Il suffit pour cela que :

$$0 = \frac{dT}{dt} = 1 + \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{V_g(\omega(t))} \right) \frac{d\omega}{dt} = 1 + 2bL \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{V_g} \right)$$

On note ainsi (cf supra) le développement limité de $k(\omega)$ autour de ω_0 :

$$k(\omega) = \frac{\omega_0}{V_0} + \frac{\omega - \omega_0}{V_1} + \frac{\alpha (\omega - \omega_0)^2}{2}$$

alors $\frac{1}{V_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{V_1} + \alpha (\omega - \omega_0)$ et $\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{V_g} \right) = \alpha$.

La condition de compression du signal devient alors $1 + 2b\alpha L = 0$ (qui impose b et α de signes opposés), condition qui fixe en fait le lieu (via L) où la compression a lieu.

7 Limite imposée par la dispersion à un débit de transmission numérique.

La dispersion a un rôle limitatif très net dans les transmissions numériques à haut débit. Il s'agit de l'émission à intervalles de temps réguliers, notés τ , de signaux très brefs de deux types représentant des 0 et des 1. Au cours de la propagation dans un milieu dispersif, on

12. La définition $\omega(t) = \frac{\varphi}{t}$ qui vient à l'esprit ne convient pas dans le cas où $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ alors que l'autre convient.

vient de voir que ces signaux vont s'élargir et l'on notera Δt leur durée qui devient vite proportionnelle (cf supra) à la distance parcourue. Si la largeur Δt des signaux devient supérieure à la durée τ qui les sépare, il vont s'interpénétrer¹³, ce qui en empêchera une lecture sûre¹⁴; le message deviendra illisible.

La limitation se traduit donc par $\tau > \Delta t$ soit en introduisant $D = \frac{1}{\tau}$ le *débit binaire*, nombre de signaux élémentaires émis par unité de temps, $D < \frac{1}{\Delta t}$. On a ainsi mis en évidence un débit maximum inversement proportionnel à Δt donc à la distance parcourue. L'accès à internet par l'ADSL en est un exemple clair : jusqu'au central téléphonique on a des supports très performants (la fibre optique en est le dernier cri) et au delà un support médiocre (une ligne bifilaire en cuivre) et c'est donc la distance de l'utilisateur à son central téléphonique qui limite le débit maximum qu'il peut attendre.

Voilà pourquoi, toutes les techniques qui luttent contre la dispersion, modulation en tête, sont d'un intérêt très actuel.

Remarque : en informatique l'unité d'information est le plus couramment un octet formé de 8 chiffres binaires et les débits sont donnés en octets par seconde et en leurs multiples, avec la convention informatique qu'un kilo-octet c'est $1024 = 2^{10}$ octets et non 1000, un méga-octet 1024^2 octets, etc.

8 Annexe : aspects pratiques de la modulation et de la démodulation.

8.a Réalisation pratique d'une modulation d'amplitude. Modulateur en anneau.

La modulation d'amplitude, on l'a vu plus haut, nécessite de pouvoir multiplier deux signaux, ce qui est une opération linéaire et requiert donc des dipôles ou plus généralement des composants non linéaires. En voici le montage le plus classique.

• Le modulateur en anneau. Version de base.

Le modulateur en anneau est fréquemment utilisé. Je n'ai malheureusement pas réussi à trouver quand ni par qui il a été conçu. Il repose sur un détournement du classique pont de diodes qui réalise un redressement double alternance. La figure 8 p. 28 (schéma de gauche) en montre la structure ; les quatre diodes sont notées D_1 , D_2 , D_3 et D_4 ; entre les points A et B est branché un générateur de THEVENIN de résistance R_1 et de tension électromotrice U_1 supposée être une fonction carrée d'amplitude a et de haute fréquence ; entre les points C et D est branché un générateur de THEVENIN de résistance R_2 et de tension électromotrice

13. ou plus vulgairement, baver les uns sur les autres.

14. ou brouillera l'écoute, comme on dit dans l'Album de la Comtesse.

U_2 supposée être une fonction positive de valeur maximale b , inférieure à a d'au moins la tension de seuil des diodes et de basse fréquence.

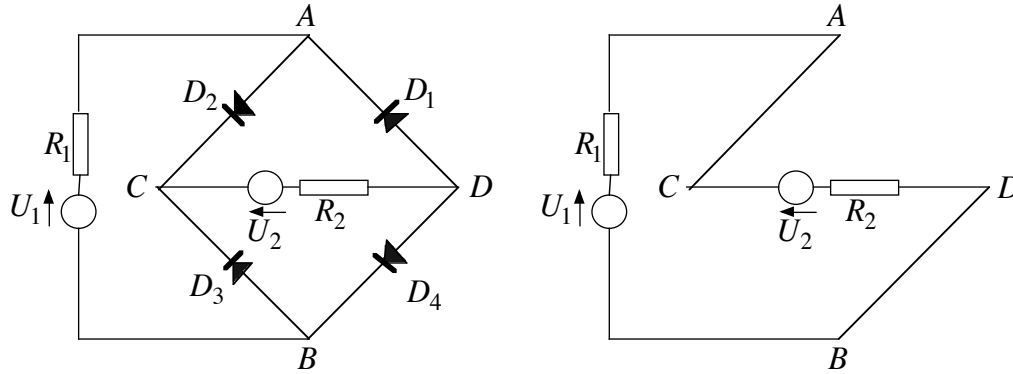


FIGURE 8 – Modulateur en anneau 1.

Dans les alternances où $U_1 = +a$, puisque ce générateur a la plus grande tension électromagnétique et impose sa loi, le courant va globalement passer de A vers B , ce qui bloque les diodes D_1 et D_3 , empêchant ainsi le passage de tout courant et rend passantes les diodes D_2 et D_4 qui se comportent alors quasiment comme des courts-circuits. Le circuit est alors formellement identique au schéma de droite de la figure. On y voit que $V_A - V_B = V_C - V_D$, soit, pourvu que R_2 soit assez petit devant R_1 , $V_A - V_B \approx U_2$.

De la même façon, quand $U_1 = -a$, on aura les diodes D_1 et D_3 passantes et les diodes D_2 et D_4 bloquées et $V_A - V_B = V_D - V_C \approx -U_2$ et en faisant la synthèse, on peut écrire formellement :

$$V_A - V_B = Cte U_1 U_2 \quad \text{où} \quad Cte = \frac{1}{a}$$

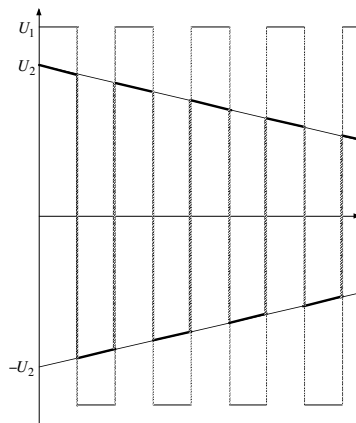


FIGURE 9 – Signal carré modulé.

Ce n'est pas vraiment une multiplication de deux signaux, mais l'important est que le résultat est bien un signal carré dont l'amplitude est modulé par la fonction U_2 . La figure 9 p. 29 illustre la situation ; Les fonctions U_1 et U_2 (ici une fonction linéaire sur l'intervalle de temps du graphe) sont dessinés en traits minces et le résultat de la modulation en traits gras ; les discontinuités sont matérialisées par des traits en pointillé.

Ce montage a été rapidement compliqué pour de meilleures performances. Il n'est guère possible de reconstituer l'enchaînement des améliorations qui ont conduit à la structure suivante, assez couramment utilisée pour les fortes puissances.

• **Le modulateur en anneau. Version élaborée.**

La figure 10 p. 29 à gauche décrit le dispositif formé de quatre dipôles non linéaires dissymétriques identiques, représentés par des flèches (ce peut être des diodes, mais aussi autre chose) et quatre dipôles linéaires identiques représentés par des rectangles (ce peut être des résistances, mais aussi autre chose). La tension U_1 est appliquée entre les points A_1 et B_1 et la tension U_2 entre les points A_2 et B_2 et l'on recueille la tension U entre les points a et b et l'on cherche à expliciter U comme fonction de U_1 et U_2 .

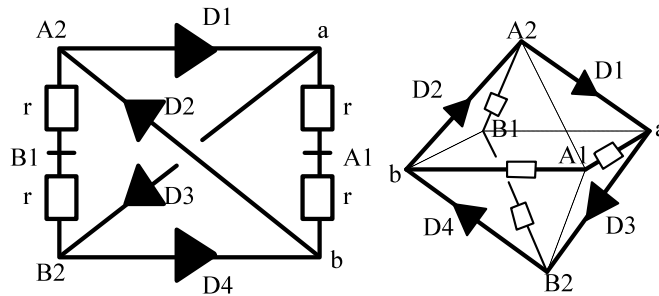


FIGURE 10 – Modulateur en anneau 2.

Je reprends ici, avec son aimable autorisation, l'élégante présentation de mon ami Louis CAPÉLAN. On redessine (même figure à droite) le circuit dans l'espace, ses huit éléments portés par huit des douze arêtes d'un octaèdre, de façon à mieux visualiser les symétries.

La figure est invariante dans une rotation d'un demi-tour autour de l'axe A_1B_1 ; cette rotation laisse en place A_1 et B_1 , donc conserve U_1 et permute d'une part les points A_2 et B_2 et d'autre part les points a et b , donc change les signes de U_2 et U . On peut donc affirmer que U est fonction impaire de U_2 puisque :

$$U(U_1, -U_2) = -U(U_1, U_2)$$

Etudions maintenant la transformation suivante en deux étapes. La première étape consiste à inverser les courants et les différences de potentiel des huit branches ; elle change les signes de U_1 , U_2 et U et le sens des flèches du schéma. La seconde étape est la symétrie

par rapport au plan contenant A_1 , B_1 , A_2 et B_2 qui remet les flèches dans le sens initial, conserve le signe, préalablement inversé de U_1 et U_2 et change une seconde fois celui de U qui reprend sa valeur initiale. On peut donc affirmer que :

$$U(-U_1, -U_2) = U(U_1, U_2)$$

En combinant les deux conclusions, on a aussi :

$$U(U_1, U_2) = U(-U_1, -U_2) = -U(-U_1, U_2)$$

qui montre que U est aussi fonction impaire de U_1 .

Exprimons maintenant $U(U_1, U_2)$ sous forme d'un développement limité d'une fonction de deux variables :

$$U(U_1, U_2) = a + b_1 U_1 + b_2 U_2 + c_1 U_1^2 + c_2 U_1 U_2 + c_3 U_2^2 + d_1 U_1^3 + d_2 U_1^2 U_2 + d_3 U_1 U_2^2 + d_4 U_2^3 + \dots$$

soit aussi :

$$U(U_1, U_2) = a U_1^0 U_2^0 + b_1 U_1^1 U_2^0 + b_2 U_1^0 U_2^1 + c_1 U_1^2 U_2^0 + c_2 U_1^1 U_2^1 + c_3 U_1^0 U_2^2 + d_1 U_1^3 U_2^0 + d_2 U_1^2 U_2^1 + d_3 U_1^1 U_2^2 + d_4 U_1^0 U_2^3 + \dots$$

Comme U est fonction impaire de U_1 et impaire de U_2 , seuls sont possibles les termes où U_1 et U_2 ont tous deux un exposant impair ; il n'y en a pas de degré 0 ou 1, un seul de degré 2 (celui en $U_1 U_2$), aucun de degré 3, les suivants (non explicités plus haut) sont de degré 4 (en $U_1^3 U_2$ et $U_1 U_2^3$) et qui, pour des fonctions d'amplitude pas trop élevées, sont négligeables devant celui de degré 2. En bonne approximation, on a donc $U = Cte U_1 U_2$ et l'on a ainsi construit un véritable multiplicateur. Il est remarquable de noter que ce résultat ne préjuge pas du choix des composants. Bien évidemment, sur le terrain, on choisira ceux pour lesquels le domaine de validité de l'approximation est le plus grand possible.

De nos jours on sait fabriquer des composants électroniques intégrés de bonne qualité qui réalisent cette fonction de multiplication ; ils sont fondés sur des architectures voisines de celle de cette étude.

8.b Démodulation par détection de crête.

On ne revient pas sur l'intérêt de la modulation d'amplitude qui a été exposé plus haut.

Imaginons que nous recevions dans la même pièce un grand nombre de signaux véhiculés par autant de porteuses modulées de fréquences suffisamment espacées. Comment isoler et écouter le signal qui nous intéresse, si possible à peu de frais ? Reprenons les méthodes de l'époque de mon arrière-grand-mère Victorine qui vivait dans la région lilloise, savait parfaitement à quel moment il fallait écouter les radios françaises, belges ou anglaises et,

autour de 1960 et à plus de quatre-vingt-quinze ans, « zappait » aussi vite qu’un jeune de notre époque.

A l’époque, l’antenne était un très long ressort mou tendu au plafond, en fait une bobine qui captait le champ magnétique de l’onde, raccordée au récepteur où elle était intégrée à un circuit résonnant comportant un condensateur variable qui permettait de régler une résonance aiguë sur la porteuse modulée sélectionnée.

La première étape consiste à redresser la porteuse modulée, c’est-à dire fabriquer un signal $V(t)$ égal à $U(t)$ si $U(t)$ est positif et nul si $U(t)$ est négatif; avec cette technologie, on verra plus loin que le signal doit être strictement positif quitte à lui ajouter une constante ultérieurement supprimée après démodulation par un filtre passe-haut de très basse fréquence de coupure (l’oreille humaine suffit pour cela!). La figure 11 p. 31 montre à gauche le dispositif utilisé et droite le résultat. Le dispositif est un pont diviseur constitué d’une diode et d’une résistance « moyenne »; dans le sens passant ($U(t) > 0$) la diode est équivalente à une résistance R_p très faible devant R et $V(t) = \frac{R}{R+R_p} U(t) \approx U(t)$ et dans le sens bloqué, elle est équivalente à une résistance R_b très grande devant R et $V(t) = \frac{R}{R+R_b} U(t) \approx 0$. A droite la porteuse modulée est dessinée en traits noirs minces (partiellement cachés par les traits noirs gras) et la porteuse¹⁵ redressée par des traits noirs gras; le signal modulant est dessiné en rouge (le rapport des fréquences entre signal et porteuse n’a pas été respecté pour la lisibilité).

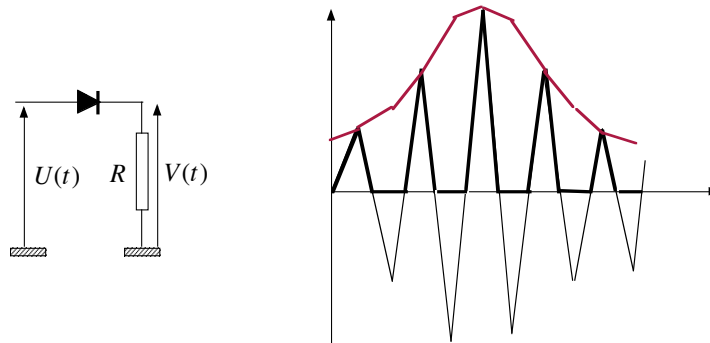


FIGURE 11 – Redressement d’une onde modulée.

La seconde étape est une espèce de lissage qui reconstitue le signal modulant en sautant d’un maximum relatif au suivant. Il suffit d’ajouter au montage précédent un condensateur comme illustré par la figure 12 p. 32, à gauche où l’on a représenté le générateur qui fournit $U(t)$ de faible résistance r ($r \ll R$). Quand $U(t)$ croît, le condensateur se charge et la diode est traversée par un courant dans le sens passant, sa résistance r_p est quasi nulle et le condensateur « voit » en parallèle R et r donc quasiment r ; la constante de temps est très faible et l’on choisit la capacité C de sorte qu’elle soit faible devant la période T_p de la porteuse de sorte que la charge soit instantanée et que la différence de potentiel aux

15. On a pris une porteuse en fonction triangle car c’est plus facile à dessiner; en pratique, elle est sinusoïdale, bien sûr.

bornes du condensateur suivent $U(t)$ (on a remplacé le noir par le rouge entre les graphes de droites des deux figures). Quand $U(t)$ décroît, le condensateur se décharge et la diode est traversée par un courant dans le sens bloqué, sa résistance R_b est énorme ($R_b \gg R$) et le condensateur « voit » en parallèle R et $r + R_b$ donc quasiment R_b ; la constante de temps est énorme et la différence de potentiel aux bornes de du condensateur décroît de façon faible (tracés en rouge à partir des maximum de U) et cette décroissance s'arrête quand $U(t)$ rattrape $V(t)$ (voir le graphe).

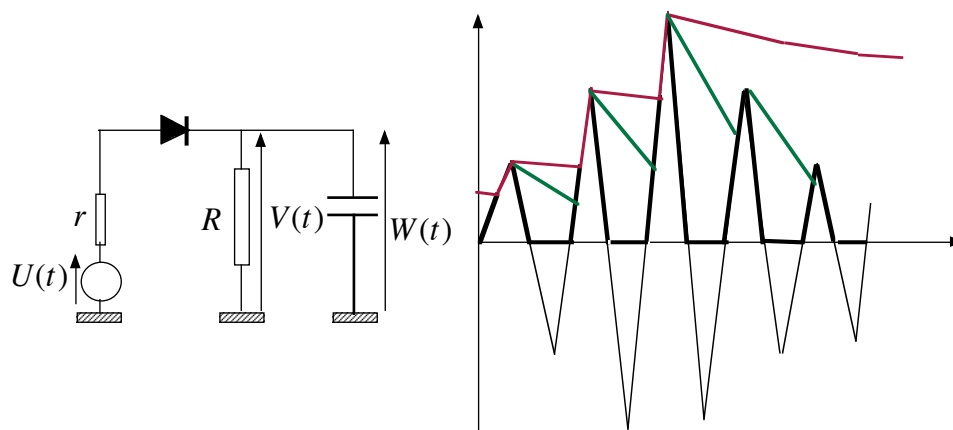


FIGURE 12 – Détection de crête.

Tant que les maximums de $U(t)$ sont de plus en plus grands, tout va bien mais le graphe montre que quand ils sont de plus en plus petits, $U(t)$ n'arrive plus à rattraper $V(t)$ qui décroît trop lentement. On accélère la décroissance de $V(t)$ en diminuant la constante de temps CR ; l'idéal est qu'elle soit un peu inférieure à la période T_s du signal modulant; c'est la situation du graphe où le tracé vert remplace le rouge. Certes les zigzags de la figure 12, rouges dans les montées et verts dans les descentes ne semblent pas reconstituer pas le signal modulant de la figure 11 mais c'est dû au fait que, pour la lisibilité de la figure, les périodes de la porteuse et du signal modulant y sont pas représentés à peine différents alors qu'en pratique, elles diffèrent d'un facteur au moins égal à 10^3 . Il restera bien sûr un petit défaut dans le lissage avec une pseudo-période égale à la période de la porteuse, qu'on élimine par un filtre passe bas (l'oreille humaine en pratique!).

Résumons : pour un bon fonctionnement, il faut choisir R et C de sorte que d'une part $r_p \ll R \ll R_b$ et d'autre part $T_s \sim CR \ll T_p$.

Le système est rustique : il faut un ressort-inductance, un condensateur variable et une résistance aux bornes de laquelle on isole une seule porteuse modulé $U(t)$ (sélection de la station émettrice grâce à un circuit résonnant), une diode, une résistance et un condensateur donc un coût infime et une durée de vie exceptionnelle, même pour mon arrière-grand-mère qui utilisait des diodes à vide ¹⁶.

16. La diode à semi-conducteur a été découverte en 1940 par Russell Ohl; les premiers postes à transistors

Remarquons aussi que si le signal $S(t)$ n'est pas constamment positif et avec une porteuse $P(t)$, le redressement de la porteuse modulée $U(t) = P(t) S(t)$ donnera après redressement et détection de crête, non par $S(t)$ mais, en gros, sa valeur absolue (on laisse au lecteur le soin de s'en convaincre).

Une dernière remarque pour finir : supposons $S(t)$ positif, somme d'une constante et d'une sinusoïde basse fréquence f_{BF} et $P(t)$ sinusoïdal de haute fréquence f_{HF} d'où $U(t) = P(t) S(t)$. Après le redressement par diode, on a $V(t) = |P(t)| S(t)$ puisque $S(t)$ est positif. Le facteur $|P(t)|$ se décompose en série de FOURIER avec un terme constant a_0 non nul (c'est la moyenne d'une fonction positive) et de termes de fréquences $n f_{HF}$ multiples entiers de celle de la porteuse ; ces termes multipliés par le signal donnent après linéarisation des termes supplémentaires de fréquences $n f_{HF} \pm f_{BF}$ (voisines de $n f_{HF}$). Le condensateur qu'on ajoute forme avec la résistance un filtre passe-bas de période de coupure CR qui, s'il est choisi comme plus haut, coupe toutes les fréquences de la forme $n f_{HF}$ ou $n f_{HF} \pm f_{BF}$ et ne laisse passer que $a_0 S(t)$, ce que nous venons de voir de façon plus terre-à-terre. On voit mieux ainsi le rôle essentiel du redressement, sans lui, le terme a_0 serait nul car une sinusoïde a une moyenne nulle !

Puisque vous insistez, un post-scriptum énergétique. Prenons une porteuse $A \cos(2\pi F t)$ et un signal (artificiellement augmenté d'une constante pour qu'il reste toujours positif) $a + b \cos(2\pi f t)$ avec $a - b > 0$ et remarquons que pour a donné, le signal maximal transmissible est tel que $b = a$ et dans ce cas, l'on a, après linéarisation :

$$U(t) = A a \cos(2\pi F t) [1 + \cos(2\pi f t)] = \dots \\ \dots = A a \left[\cos(2\pi F t) + \frac{1}{2} \cos[2\pi (F + f) t] + \frac{1}{2} \cos[2\pi (F - f) t] \right]$$

Les puissances respectives des trois termes, proportionnelles aux carrés de leurs amplitudes sont dans le rapport de 1 pour le premier qui est la porteuse et $\frac{1}{4}$ pour les deux derniers ($\frac{1}{2}$ en tout) qui véhiculent le signal proprement dit. Seul un tiers de l'énergie est donc utile et c'est pire encore pour un petit signal (b assez petit devant a), mais que font les écologistes ?

8.c Détection synchrone.

De nos jours, on utilise une méthode plus efficace pour démoduler une onde. Supposons qu'un signal $s(t)$, somme de fonctions de basse fréquence, auquel on ajoute ou non une constante, module une porteuse sinusoïdale de haute fréquence de pulsation ω_p , notée $a \cos(\omega_p t)$ pour obtenir une *radiodiffusion* en $f(t) = a \cos(\omega_p t) s(t)$.

L'antenne qui capte cette porteuse modulée génère une différence de potentiel proportionnelle à $f(t)$ (on note $k f(t)$ pour fixer les idées). Le récepteur contient un *oscillateur local* qui délivre une différence de potentiel sinusoïdale d'amplitude b et de pulsation ω

arrivent en 1955 et leur diffusion en masse commence vers 1960.

ajustable qui est multipliée par un modulateur au signal d'antenne pour obtenir en sortie le potentiel $g(t)$ égal à :

$$g(t) = k f(t) b \cos(\omega t) = k a b \cos(\omega_p t) \cos(\omega t) s(t)$$

Lorsque l'on ajuste l'oscillateur local de sorte que $\omega = \omega_p$, on arrive à :

$$g(t) = k a b \cos^2(\omega_p t) s(t) = \frac{1}{2} k a b [1 + \cos(2\omega_p t)] s(t)$$

Si l'on fait suivre le multiplicateur d'un filtre passe-bas qui laisse passer les basses fréquences de $s(t)$ et coupe la pulsation $2\omega_p$ (que la multiplication par $s(t)$ décale, dans un sens et dans l'autre des fréquences de $s(t)$), il ne reste plus que $\frac{1}{2} k a b s(t)$ soit $s(t)$ à une constante multiplicative près et sans aucune approximation.

Remarque 1 : Avec cette technique, pourvu que tous les récepteurs (plus chers que les anciens) l'utilisent, il n'est plus nécessaire que $s(t)$ soit rendu positif par addition d'une constante.

Remarque 2 : Si l'antenne capte une seconde porteuse modulée, que l'on notera ici $f'(t) = a' \cos(\omega'_p t) s'(t)$ de pulsation proche ($\omega'_p \sim \omega_p$), après multiplication par la tension d'un oscillateur local réglé sur ω_p , on ajoute en sortie du multiplicateur le terme :

$$\begin{aligned} g'(t) &= k f'(t) b \cos(\omega_p t) = k a' b \cos(\omega'_p t) \cos(\omega_p t) s'(t) = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} k a' b [\cos[(\omega'_p - \omega_p) t] + \cos[(\omega'_p + \omega_p) t]] s'(t) \end{aligned}$$

qui contient les pulsations $\omega'_p \pm \omega_p$ (que la multiplication par $s'(t)$ décale, dans un sens et dans l'autre des fréquences de $s'(t)$). Le filtre passe-bas étouffe par construction le terme de pulsation $\omega'_p + \omega_p \sim 2\omega_p$ et l'on s'arrange pour qu'il étouffe aussi $\omega'_p - \omega_p$. Pour cela il suffit de s'arranger que $\omega'_p - \omega_p$ ne descende jamais en dessous de la pulsation de coupure du filtre passe bas, donc qu'elle soit assez confortablement supérieure à la pulsation maximale audible par l'oreille humaine. On s'arrange donc pour que les émetteurs que l'on peut recevoir en un même lieu aient des fréquences suffisamment espacées. Une remarque dans la remarque : le récepteur n'a plus besoin de circuit résonnant, l'accord se fait par réglage de la fréquence de l'oscillateur local.

Remarque 3 : dans la méthode par détection de crête, on remplaçait $\cos(\omega_p t)$ de moyenne nulle par $|\cos(\omega_p t)|$ de moyenne non nulle de sorte que le filtre passe-bas puisse laisser sortir quelque chose ; ici c'est remplacé par $\cos^2(\omega_p t)$ également de moyenne non nulle. En analyse de FOURIER, les deux procédés relèvent de la même idée de base.

8.d Défaut principal de la modulation d'amplitude.

Le principal défaut de la modulation d'amplitude est que... c'est l'amplitude qui est modulée, or celle-ci est sensible à toutes les perturbations : modifications météorologiques

de la transmission aérienne, perturbations par l'activité humaine (par exemple passage de véhicules faisant obstacles aux ondes), etc.

Puisque ce type de perturbations ne modifie pas la fréquence de l'onde propagée, on a très vite cherché à véhiculer le signal au travers de la fréquence. C'est ce que nous allons voir ci-après, uniquement dans les grandes lignes.

8.e Principe de la modulation de fréquence ou de phase.

Soit une porteuse, à savoir une fonction sinusoïdale d'amplitude arbitraire et de pulsation ω_p dans le domaine des hautes fréquences ; on la note $A \cos(\omega_p t)$ qu'on présente pour la suite sous la forme $A \cos[\Phi(t)]$ avec $\Phi(t) = \omega_p t$. Soit un signal $s(t)$, décomposable en sommes de fonctions de basse fréquences que l'on suppose toujours compris entre un minimum s_{min} et un maximum s_{max} .

On désire moduler la porteuse de sorte que, la porteuse modulée s'écrive toujours $A \cos[\Phi(t)]$ mais où $\Phi(t)$ dépende d'une façon ou d'une autre de $s(t)$ en restant toutefois proche de $\omega_p t$.

Une méthode possible est la modulation de phase ; on fait en sorte que :

$$\Phi(t) = \omega_p t + k s(t)$$

où l'on s'arrangera pour que $k(s_{max} - s_{min})$ soit assez grand pour être décelable mais pas trop pour ne pas engendrer l'ambiguïté des fonctions sinusoïdales de période 2π ; disons autour de $\frac{\pi}{2}$.

Une autre méthode est la modulation de fréquence ; on fait en sorte que la pulsation instantanée définie par $\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt}$ soit de la forme :

$$\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_p + \kappa s(t)$$

où l'on s'arrangera pour que $\kappa(s_{max} - s_{min})$ soit assez grand pour être décelable mais pas trop pour que $\omega(t)$ reste dans la bande passante du nécessaire filtre du récepteur (séparation des différents émetteurs).

Par exemple avec $s(t) = a \cos(\omega_s t)$, la modulation de phase donne

$$\Phi(t) = \omega_p t + k a \cos(\omega_s t)$$

d'où une pulsation instantanée :

$$\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_p - k a \omega_s \sin(\omega_s t)$$

et la modulation de fréquence :

$$\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_p + \kappa a \cos(\omega_s t)$$

d'où par intégration et à une constante près (sans grand intérêt) :

$$\Phi(t) = \omega_p t + \kappa \frac{a}{\omega} \sin(\omega_s t)$$

Somme toute, la différence est mince : les effets de la modulation sont en quadrature l'un par rapport à l'autre et la réponse spectrale vis-à-vis du signal diffère. Lorsque le signal est possiblement parasité, puisque les parasites sont souvent de haute fréquence, la modulation de fréquence sera préférable car elle les atténuera ; toutefois pour des signaux musicaux, l'inconvénient sera d'atténuer les harmoniques donc de déformer les timbres et l'on compense en amplifiant les aigus « musicaux » à l'enregistrement. Pour des signaux binaires (informatique), analogues aux signaux carrés où le brusque changement de valeur génère de nombreux harmoniques qu'il faudra conserver pour restituer un changement de valeur bien net, la modulation de phase sera préférable.

Tout ce qui suit parlera de modulation de fréquence pour fixer les idées mais sera valable pour la modulation de phase.

8.f Spectre en fréquence d'une onde modulée en fréquence

Soit une porteuse $A \cos(\omega_p t)$ modulée en fréquence par le signal sinusoïdal d'expression $s(t) = a \cos(\omega_s t)$ qui est donc devenue $f(t) = A \cos[\Phi(t)]$ avec :

$$\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_p + \kappa a \cos(\omega_s t)$$

On montre (ce n'est pas simple) et l'on vérifie expérimentalement que son spectre en fréquence contient uniquement les fréquences en $\omega_p + n\omega_s$ avec n entier positif, nul ou négatif mais la complication réside dans le fait que l'amplitude de chaque terme dépend non seulement de n , mais aussi de l'amplitude a et de la pulsation ω_s du signal. Pour $|n|$, cette amplitude décroît quand $|n|$ croît mais ce n'est pas toujours vrai quand $|n|$ est petit. Dans ce domaine, la pratique expérimentale est primordiale.

8.g Réalisation pratique d'une modulation de fréquence. Oscillateur commandé par une tension.

Le cahier des charges est simple ; il s'agit de réaliser un oscillateur délivrant un signal sinusoïdal, d'amplitude constante (mais ce point n'est pas essentiel) et dont la fréquence peut être modifiée par une tension qui fait office de signal modulant (variant sur des échelles de temps longues devant l'ordre de grandeur de la période de l'oscillateur). On parle donc d'*oscillateur commandé par une tension* ou OCT pour les amateurs d'acronymes ou en anglais de *voltage controlled oscillator* ou VCO. Il y a beaucoup de méthodes possibles pour réaliser ce dispositif. Un bon nombre d'entre eux s'appuient sur la charge d'un condensateur sous une tension fixe (en valeur absolue) $\pm U$ et l'on règle la fréquence par les basculements de U à $-U$ et vice-versa que l'on obtient, par exemple, à l'aide d'un montage compareur

entre la tension de commande (ou quelque chose qui lui est lié) et la différence de potentiel aux bornes du condensateur (ou quelque chose qui lui est lié). Détailler un seul de ces montages serait de peu d'intérêt théorique. Disons que c'est aisé à concevoir.

8.h Réalisation pratique d'une démodulation de fréquence. Boucle à verrouillage de phase.

Il s'agit de réaliser l'opération inverse de la modulation. Si la notion de rétroaction (voir le chapitre C-VI) est ancré en soi, la réponse est évidente puisqu'un montage en rétroaction réalise la fonction inverse de la chaîne de retour.

Le schéma de principe d'un montage en rétroaction est celui de la figure 13 p. 37.

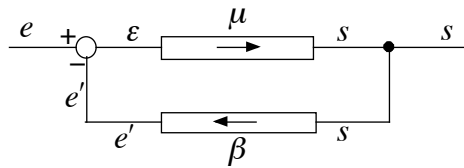


FIGURE 13 – Rétroaction.

Reste à identifier les différents éléments. L'entrée e semble devoir être l'onde modulée en fréquence mais la suite montre qu'on changera de point de vue. On veut que s soit le signal $s(t)$ ou tout au moins quelque chose qui lui soit lié comme $\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_p + \kappa s(t)$ ou encore toute tension qui soit une fonction affine de $\omega(t)$ donc de $s(t)$. On veut donc que le montage global extraie de l'entrée e du montage sa pulsation instantanée au travers d'une tension qui en soit fonction affine.

Notre idée est que la chaîne de retour, notée β sur la figure, soit un oscillateur commandé par une tension (OCT), en l'occurrence s et qui délivre un signal de pulsation instantanée fonction affine de s . Dès lors le schéma-type de la rétroaction devient plus pertinent si l'on considère que e est la pulsation instantanée de l'onde modulée et e' celle qui sort de l'OCT.

Le traditionnel soustracteur qui génère la différence $\varepsilon = e - e'$ doit ici être lu comme un dispositif qui à partir de fonctions de pulsations instantanées $\omega(t)$ et $\omega'(t)$ délivre un signal de pulsation $\omega(t) - \omega'(t)$ et cela on vient d'apprendre à le faire : on multiplie les signaux et l'on filtre le résultat avec un passe-bas. Si l'onde modulée est $A \cos[\Phi(t)]$ avec $\frac{d\Phi}{dt} = \omega(t)$ et l'onde sortant de l'OCT $B \cos[\Phi'(t)]$ avec $\frac{d\Phi'}{dt} = \omega'(t)$, le produit linéarisé est

$$A B \cos[\Phi(t)] \cos[\Phi'(t)] = \frac{A B}{2} \cos[\Phi(t) - \Phi'(t)] + \frac{A B}{2} \cos[\Phi(t) + \Phi'(t)]$$

et les fréquences instantanées des deux termes sont respectivement :

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t) - \Phi'(t)] = \omega(t) - \omega'(t) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}[\Phi(t) + \Phi'(t)] = \omega(t) + \omega'(t)$$

Le filtre passe-bas ne laissera passer, s'il est bien conçu, que le premier.

Reste enfin à concevoir la chaîne directe, notée μ sur la figure; elle reçoit un signal de pulsation instantanée $\omega(t) - \omega'(t)$ et doit délivrer une tension qui lui soit une fonction affine. Ce peut être quelque chose de très rustique. Imaginons que l'onde sortant de l'OCT soit notée $B \sin[\Phi'(t)]$ avec $\frac{d\Phi}{dt} = \omega'(t)$, ce qui ne change¹⁷ que la définition de Φ d'un terme constant $\frac{\pi}{2}$ mais pas $\omega'(t)$, alors la linéarisation détaillée ci-dessus donne

$$AB \cos[\Phi(t)] \sin[\Phi'(t)] = \frac{AB}{2} \sin[\Phi(t) - \Phi'(t)] - \frac{AB}{2} \sin[\Phi(t) + \Phi'(t)]$$

que le filtre passe-bas réduit à $\frac{AB}{2} \sin[\Phi(t) - \Phi'(t)] \approx \frac{AB}{2} [\Phi(t) - \Phi'(t)]$ si l'OCT est réglé pour que sa sortie ait une fréquence instantanée proche de ω_p de sorte que la différence de phase reste faible. L'intégration de ce signal donne accès à $\omega(t) - \omega'(t)$, ce qui est aisé à réaliser.

Le principe est simple et l'optimisation passe par l'expérimentation. Ce montage est connu sous le nom de *boucle à verrouillage de phase* car la rétroaction aboutit à ce que $\varepsilon = \omega(t) - \omega'(t)$ soit négligeable, donc par intégration que la phase de l'OCT suive, à une constante près, celle de l'onde modulée.

17. J'aurais certes pu réécrire ce qui précède directement avec un sinus au lieu d'un cosinus mais la pédagogie passe par la rectification en direct des maladresses. La palinodie est consubstantielle à la pédagogie! Que pensez-vous de cette formule? Elle a de l'allure, non?