

Chapitre D-VI

L'optique géométrique, solution approchée des lois de l'électromagnétisme.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

L'approximation de l'optique géométrique consiste à chercher aux équations de Maxwell des solutions sinusoïdales dont l'amplitude varie dans l'espace beaucoup plus lentement que la phase. On retrouve rapidement la structure locale trirectangle d'une onde plane, les notions de surfaces d'onde et de rayons lumineux et le théorème de Malus.

On démontre l'équation eikonale qui lie le rayon de courbure d'un rayon lumineux en un point aux propriétés de milieu en ce point. On en déduit la propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène.

On démontre, à partir du théorème de Malus, les équations de Snell-Descartes et l'on en déduit le principe de Fermat (qui devient ainsi un théorème) pour une succession de milieux homogènes.

On s'initie aux méthodes variationnelles pour démontrer le principe de Fermat dans le cas général.

Table des matières

D-VI L'optique géométrique, solution approchée des lois de l'électromagnétisme.	1
1 Approximation de l'optique géométrique.	4
1.a Le cadre de l'approximation.	4
1.b Nature de l'approximation et critère de non-validité.	5
1.c Premières conséquences.	6
1.d Retour du vocabulaire de l'optique géométrique.	8
1.e Equation eikonale.	9
1.f Propagation rectiligne dans un milieu homogène.	11
1.g Lemme : différentielle d'un chemin optique.	12
1.h Lois de Snell-Descartes.	13
1.i En guise de conclusion.	15
2 Introduction aux méthodes variationnelles.	15
2.a Principe de Fermat	15
2.b Rayon lumineux dans un milieu inhomogène.	16
2.c Perspectives.	19

1 Approximation de l'optique géométrique.

1.a Le cadre de l'approximation.

On se limitera dans ce chapitre à des milieux

- non conducteurs (sans charges libres donc), en effet dans un milieu conducteur les ondes électromagnétiques sont rapidement amorties et il est dès lors sans intérêt d'y faire de l'optique géométrique,
- non magnétiques (le vecteur aimantation est partout négligeable et \vec{H} se confond avec $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$), en effet c'est toujours le cas sauf dans des milieux ferromagnétiques où l'hystérèse produit elle aussi un amortissement rapide et rend là aussi l'optique géométrique sans intérêt (en remarque, nous verrons plus loin que c'est une chance),
- linéaires, ce qui est une bonne approximation sauf à basse températures et/ou pour des ondes de grande amplitude (dans un milieu non linéaire, un faisceau laser peut générer un second faisceau de fréquence double, résultant de la linéarisation d'un terme quadratique),
- isotropes, c'est le cas le plus courant, toutefois l'effet d'une éventuelle anisotropie sera étudiée au chapitre D-X,
- non absorbants (encore une fois, si l'onde est rapidement amortie par absorption, l'optique géométrique perd son intérêt) donc l'indice de réfraction n tel qu'ici (milieu non magnétique) $n^2 = \epsilon_r$ est réel,
- de caractéristiques stationnaires, car faire de l'optique dans un milieu en cours d'explosion ou d'implosion, c'est de la cruauté mentale,
- a priori non homogènes.

Les équations de MAXWELL adaptés à la propagation dans la matière, soit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{lib} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

dans un milieu non conducteur ($\rho_{lib} = 0$ et $\vec{j}_{lib} = \vec{0}$), non magnétique ($\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$), linéaire isotrope ($\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$) et avec $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ donnent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Remarques : l'hypothèse d'un milieu de caractéristiques stationnaires a servi dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE pour y « sortir » le facteur n^2 de la dérivée temporelle

et sans l'hypothèse du milieu non magnétique le facteur μ_r n'aurait pas pu être « sorti » du rotationnel.

1.b Nature de l'approximation et critère de non-validité.

• Ondes sinusoïdales.

Nous allons d'abord restreindre l'étude à un phénomène sinusoïdal dans le temps de pulsation ω . Plusieurs raisons militent en ce sens :

- mathématiquement, toute fonction du temps est somme (continue) de fonctions sinusoïdales (c'est l'interprétation de la transformation de FOURIER),
- physiquement, les lampes spectrales et les lasers simples ont un rayonnement sinusoïdal¹ ou somme (finie ou discrète) de rayonnements sinusoïdaux,
- physiologiquement, les récepteurs en couleur de l'œil (les cônes) ne sont sensibles qu'à des bandes spectrales très étroites, que l'on peut modéliser par un récepteur monochromatique²
- technologiquement les écrans de télévision modernes utilisent une technologie additive formée par pixel de trois types d'émetteurs quasi-sinusoïdaux.

En tout point M une fonction sinusoïdale, par exemple le champ électrique, est définie par son amplitude complexe, sous la forme $\vec{E}(M, t) = \Re(\vec{E}^*(M, t))$ avec :

$$\vec{E}^*(M, t) = \vec{E}_0^*(M) \exp(i \omega t)$$

• Approximation de l'optique géométrique.

Nous supposons que l'amplitude complexe $\vec{E}_0^*(M)$ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_0^*(M) = \vec{A}^*(M) \exp[-i \varphi(M)]$$

où $\varphi(M)$ varie avec M beaucoup plus rapidement que $\vec{A}^*(M)$. C'est la seule approximation que nous ferons.

Remarque : le signe moins n'est là que pour retrouver plus loin les habitudes d'écriture pour les ondes.

Nous définirons (on comprendra plus loin pourquoi) une fonction scalaire L par :

$$L(M) = \frac{c}{\omega} \varphi(M)$$

1. En fait l'émission par train d'onde complique un peu la chose.

2. Dans le domaine visible, une onde sinusoïdale est perçue d'une certaine couleur, c'est pourquoi on la qualifie aussi de monochromatique ; ce qualificatif est donc parfaitement synonyme de sinusoïdal.

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. On écrira donc :

$$\vec{E}_0^*(M) = \vec{A}^*(M) \exp \left[-i\omega \frac{L(M)}{c} \right]$$

• **Critère de non-validité.**

L'avantage de cette présentation est qu'elle explique aussi, avant même qu'elle soit développée, quelques situations classiques où elle ne sera pas valable.

Si nous diaphragmons un faisceau parallèle de lumière par un iris circulaire, on obtient un faisceau cylindrique à l'extérieur duquel règne l'ombre. Quand on traverse donc la surface de ce cylindre l'amplitude de l'onde passe d'une valeur approximativement constante à une valeur nulle sur une distance arbitrairement faible; l'approximation ne sera plus valable et il y aura des écarts à l'optique géométrique. Les phénomènes de diffraction ne s'expliquent pas autrement et ils sont localisés aux bords des faisceaux.

Imaginons qu'une lentille fasse converger un faisceau en un point O ; autour du point O on a quelque chose qui tient de l'onde sphérique avec donc (c'est classique) des amplitudes en $\frac{1}{r}$ où r est la distance au point O . Plus on est près de O , plus l'amplitude varie vite, donc au passage en O , il y aura des écarts à l'optique géométrique. L'effet est connu et souvent mentionné : entre deux points d'un même rayon de part et d'autre du point O , au déphasage propagatif, il faut ajouter π , ce qui revient à un changement de signe.

1.c Premières conséquences.

Exploitions l'équation de MAXWELL-FARADAY soit $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; En régime sinusoïdal et en notation complexe, on a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$. Avec la formule classique d'analyse vectorielle $\vec{\text{rot}}(a \vec{V}) = a \vec{\text{rot}} \vec{V} + \vec{\text{grad}} a \wedge \vec{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \left(\vec{\text{rot}} \vec{A}^* \right) \exp \left[-i\omega \frac{L(M)}{c} \right] + \vec{\text{grad}} \left[\exp \left(-i\omega \frac{L(M)}{c} \right) \right] \wedge \vec{A}^* = \dots \\ &\dots = \left(\vec{\text{rot}} \vec{A}^* \right) \exp \left[-i\omega \frac{L(M)}{c} \right] - \frac{i\omega}{c} \vec{\text{grad}} L \wedge \vec{A}^* \exp \left[-i\omega \frac{L(M)}{c} \right] \end{aligned}$$

Si la dernière transformation trouble le lecteur, qu'il remplace le gradient par la dérivée partielle par rapport à x (ou y ou z) et il comprendra.

L'approximation d'une variation beaucoup plus lente pour \vec{A}^* que pour L consiste à négliger le terme en $\vec{\text{rot}} \vec{A}^*$ devant celui en $\vec{\text{grad}} L$, on a donc :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} \approx -\frac{i\omega}{c} \vec{\text{grad}} L \wedge \vec{A}^* \exp \left[-i\omega \frac{L(M)}{c} \right] = -\frac{i\omega}{c} \vec{\text{grad}} L \wedge \vec{E}$$

L'équation de MAXWELL-FARADAY conduit donc, de façon brute puis simplifiée à :

$$-\frac{i\omega}{c} \overrightarrow{\text{grad}} L \wedge \overrightarrow{E} = -i\omega \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} L \wedge \overrightarrow{E} = c \overrightarrow{B}$$

Par un calcul en tous points analogue, l'équation de MAXWELL-AMPÈRE sous la forme $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ (cf supra) conduit à :

$$\overrightarrow{\text{grad}} L \wedge \overrightarrow{B} = -\frac{n^2}{c} \overrightarrow{E}$$

De $\overrightarrow{\text{grad}} L \wedge \overrightarrow{E} = c \overrightarrow{B}$, on déduit que \overrightarrow{B} est orthogonal à \overrightarrow{E} et $\overrightarrow{\text{grad}} L$ et de la même façon, $\overrightarrow{\text{grad}} L \wedge \overrightarrow{B} = -\frac{n^2}{c} \overrightarrow{E}$ apprend en outre que \overrightarrow{E} est lui aussi orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}} L$. L'une ou l'autre permet d'affirmer que le trièdre formé dans cet ordre par $\overrightarrow{\text{grad}} L$, \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} est direct.

En passant aux modules (aux normes) compte tenu de l'orthogonalité, on a en même temps :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\text{grad}} L\| \|\overrightarrow{E}\| = c \|\overrightarrow{B}\| \\ \|\overrightarrow{\text{grad}} L\| \|\overrightarrow{B}\| = \frac{n^2}{c} \|\overrightarrow{E}\| \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément (par exemple multiplication membre à membre) que :

$$\boxed{\|\overrightarrow{\text{grad}} L\| = n}$$

que l'on pourrait considérer comme loi fondamentale de l'optique géométrique, qu'il nous reste à exploiter.

En reportant ce résultat dans l'une ou l'autre des relations entre modules on tire en plus que $\|\overrightarrow{B}\| = \frac{n}{c} \|\overrightarrow{E}\|$ qui, ajouté à la structure trirectangle, redonne un résultat bien connu pour les ondes planes ou localement planes, où $\overrightarrow{\text{grad}} L$ se substitue à la direction de propagation (on y reviendra).

Remarque 1 : on n'a pas eu besoin de la première équation de MAXWELL ni de l'équation de MAXWELL-GAUSS. Les exploiter ici n'apporterait rien d'intéressant. Sachons seulement qu'elles permettent de justifier, par exemple, qu'une onde sphérique est en $\frac{1}{r}$ et plus généralement de lier les fonctions notées plus haut $L(M)$ et $\overrightarrow{A}^*(M)$ ou de façon plus physique la géométrie de surfaces d'onde (cf infra) et la variation de l'amplitude.

Remarque 2 : le résultat fondamental ne permet absolument pas de trouver des solutions mais d'en connaître les propriétés. Ce qui détermine la solution d'un problème d'optique dans un milieu donné, c'est la position et la nature de la ou des sources lumineuses. Il en est de même, du reste, de l'optique géométrique dans sa présentation historique.

1.d Retour du vocabulaire de l'optique géométrique.

Soit une onde monochromatique déterminée par $\vec{E}_0^*(M) = \vec{A}^*(M) \exp\left[-i\omega \frac{L(M)}{c}\right]$ et où le champ magnétique se déduit de $\vec{\text{grad}} L \wedge \vec{E} = c \vec{B}$.

On appelle *surface d'onde* une surface équiphasse³, c'est à dire une surface d'équation $L(M) = Cte$ et l'on appelle *rayon lumineux* une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur $\vec{\text{grad}} L$, soit encore une ligne de champ du champ $\vec{\text{grad}} L$.

Remarque : la structure trirectangle entraîne que $\vec{\text{grad}} L$ donc les rayons et $\vec{E} \wedge \vec{B}$ donc le vecteur de POYNTING sont partout parallèles et les rayons sont donc les trajectoires de l'énergie, celle que l'on visualise en faisant passer la lumière par de petits trous ; on réalise ainsi l'identification de la définition théorique des rayons et leur définition intuitive tirée de l'expérience.

La propriété fondamentale du gradient est $dL = \vec{\text{grad}} L \cdot d\vec{\ell}$, soit, pour deux points infiniment proches M et M' , $L(M') - L(M) = \vec{\text{grad}} L \cdot \vec{MM}'$.

Si M et M' appartiennent à une même surface d'onde, alors $L(M) = L(M')$ d'où $\vec{\text{grad}} L \cdot \vec{MM}' = 0$ et \vec{MM}' est orthogonal à $\vec{\text{grad}} L$. Ceci étant vrai pour tous les M' infiniment proches de M et appartenant à la surface d'onde passant par M , on en déduit que $\vec{\text{grad}} L$ en M donc aussi le rayon passant par M et la surface d'onde passant par M sont orthogonaux, résultat connu sous le nom de *théorème de MALUS*.

Si M et M' appartiennent à un même rayon, alors \vec{MM}' et $\vec{\text{grad}} L$ de module (de norme) n sont parallèles et en notant $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire de $\vec{\text{grad}} L$ dans son sens, on peut noter $\vec{\text{grad}} L = n \vec{\tau}$ et $\vec{MM}' = ds \vec{\tau}$ (avec ds algébrique) ; la relation $L(M') - L(M) = \vec{\text{grad}} L \cdot \vec{MM}'$ devient $L(M') - L(M) = n ds$ et par intégration entre deux points A et B d'un même rayon $L(B) - L(A) = \int_A^B n ds$, appelé *chemin optique* entre A et B , noté aussi $[AB]$ ou L_{AB} . Les géomètres reconnaîtront dans s , primitive de ds , l'*abscisse* curviligne d'un point du rayon lumineux.

En réintroduisant⁴ la phase φ définie plus haut ; le champ en B est en déphasage retard (à cause du signe négatif devant φ) sur celui en A de :

$$\Delta\varphi = \varphi(A) - \varphi(B) = \frac{\omega}{c} [AB]$$

et, en introduisant la fréquence T par $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et ce qu'il est convenu d'appeler la *longueur d'onde dans le vide* $\lambda = cT$:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{[AB]}{\lambda}$$

3. Dans tout ce qui suit, localement, A^* varie suffisamment lentement pour qu'il soit considéré comme constant.

4. C'est pour retrouver la notion historique de chemin optique que l'on a posé plus haut $\varphi = \frac{\omega L}{c}$

relation qui sera fondamentale pour gérer les interférences lumineuses et la diffraction (chapitres D-XI et D-XII).

Pour les points infiniment M' proches d'un point M , en prenant M comme origine, la direction et le sens de $\overrightarrow{\text{grad}} L$, de module n , comme axe Ox et l'origine des temps telle que $L(M) = 0$, la relation $L(M') - L(M) = \overrightarrow{\text{grad}} L \cdot \overrightarrow{MM'}$ devient $L(M') = n x$ ce qui conduit à :

$$\vec{E}(M') = \vec{A}^*(M) \exp \left[i \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

où l'on a tenu compte que l'amplitude varie de façon négligeable. L'onde a donc localement l'allure d'une onde plane progressive sinusoïdale dans la direction de $\overrightarrow{\text{grad}} L$.

1.e Equation eikonale.

Soit une onde monochromatique déterminée par $\vec{E}_0^*(M) = \vec{A}^*(M) \exp \left[-i \omega \frac{L(M)}{c} \right]$ et où le champ magnétique se déduit de $\overrightarrow{\text{grad}} L \wedge \vec{E} = c \vec{B}$. Pour la suite de ce paragraphe, on gardera en tête que $L(M)$ n'est pas une fonction liée au milieu mais une fonction liée à l'onde particulière que l'on étudie.

Le problème fondamental d'un problème d'optique est la détermination du rayon qui passe par un point donné M et dont la direction y est donnée par le vecteur unitaire tangent $\vec{\tau}$ défini plus haut. Sous sa forme brute, le résultat fondamental $\|\overrightarrow{\text{grad}} L\| = n$, même réécrit $\overrightarrow{\text{grad}} L = n \vec{\tau}$ ne nous est d'aucun secours.

Soient deux points M et M' infiniment proches sur le même rayon et notons le déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'} = ds \vec{\tau}$. Avec ces notations, nous nous proposons de calculer sur un rayon donné correspondant à l'onde étudiée la dérivée $\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s}$, la dérivée partielle sous-entendant qu'il y a deux autres paramètres qui précisent le rayon choisi et qui sont considérés comme constants. Notre espoir est d'en déduire la variation du vecteur $\vec{\tau}$ donc dans un premier temps la courbure du rayon et dans un second son équation.

Pour écrire plus aisément les choses rebaptisons x_1, x_2 et x_3 les trois coordonnées dans l'espace (plutôt que x, y et z) et \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 les trois vecteurs unitaires de la base vectorielle associée. Développons la projection de $\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s}$ sur l'un quelconque des trois axes :

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} \cdot \vec{e}_i = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L \cdot \vec{e}_i)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)$$

car \vec{e}_i est constant et en reprenant la définition du gradient.

Pour la suite, il faut bien visualiser les statuts des variables, sinon on se lance dans des calculs formels qui, faute de sens, n'ont aucune rigueur et aucune valeur. $L(M)$ définit une onde donc est par nature une fonction du point M de coordonnées x_1, x_2 et x_3 qu'on peut écrire $L(x_1, x_2, x_3)$; sur un rayon donné, chaque point M est défini par une *abscisse*

curviligne s dont ses coordonnées dépendent ; sur ce rayon L devient une fonction composée $L[x_1(s), x_2(s), x_3(s)]$ que l'on peut dériver par rapport à s et il en est de même pour sa dérivée $\frac{\partial L}{\partial x_i}$. A plusieurs variables, le théorème de dérivation des fonctions composées, soit :

$$\frac{d}{ds} f[x_1(s), x_2(s), x_3(s)] = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds}$$

donne en l'adaptant au contexte :

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} \cdot \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_j}{\partial s}$$

Or la même règle appliquée à $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{ds} = \vec{\tau}$ donne :

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s} = \sum_{j=1}^{j=3} \vec{e}_j \frac{\partial x_j}{\partial s} = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial x_j}{\partial s} \vec{e}_j$$

donc $\frac{\partial x_j}{\partial s}$ s'identifie avec la i ème composante de $\vec{\tau}$, notée τ_j ; et puisque $\overrightarrow{\text{grad}} L = n \vec{\tau}$ et par projection $\frac{\partial L}{\partial x_j} = n \tau_j$ on a donc :

$$\frac{\partial x_j}{\partial s} = \tau_j = \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial x_j}$$

que l'on reporte plus haut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} \cdot \vec{e}_i &= \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_j}{\partial s} = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} \dots = \\ &\dots = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{j=3} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de SCHWARTZ et en reconnaissant ensuite la dérivée d'un carré. Il ne reste à reconnaître dans les $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ les composantes du gradient de L et donc dans $\sum_{j=1}^{j=3} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)^2$ le carré de son module puis à exploiter $\|\overrightarrow{\text{grad}} L\| = n$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} \cdot \vec{e}_i &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{j=3} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)^2 \right] = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\|\overrightarrow{\text{grad}} L\|^2 \right] \dots = \\ &\dots = \frac{1}{2n} \frac{\partial(n^2)}{\partial x_i} = \frac{1}{2n} 2n \frac{\partial n}{\partial x_i} = \frac{\partial n}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour les trois valeurs de l'indice i , soit pour les trois composantes du gradient de L et l'on peut donc regrouper de façon vectorielle en reconnaissant dans le second membre les composantes du gradient de n , d'où :

$$\boxed{\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} = \overrightarrow{\text{grad}} n}$$

relation connue sous le doux nom d'*équation eikonale*⁵.

Un corollaire intéressant s'en déduit à partir de $\overrightarrow{\text{grad}} L = n \overrightarrow{\tau}$ (cf supra) car :

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} = \frac{\partial(n \overrightarrow{\tau})}{\partial s} = n \frac{\partial \overrightarrow{\tau}}{\partial s} + \frac{\partial n}{\partial s} \overrightarrow{\tau} = n \frac{\overrightarrow{\nu}}{R} + \frac{\partial n}{\partial s} \overrightarrow{\tau}$$

où, par définition, $\overrightarrow{\nu}$ et R sont le vecteur unitaire normal principal et le rayon de courbure; d'où :

$$n \frac{\overrightarrow{\nu}}{R} + \frac{\partial n}{\partial s} \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\text{grad}} n$$

En projetant sur $\overrightarrow{\nu}$, on en tire successivement :

$$\frac{n}{R} = \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \overrightarrow{\nu}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \overrightarrow{\nu}$$

$$\frac{1}{R} = \overrightarrow{\text{grad}} (\ln n) \cdot \overrightarrow{\nu}$$

Cette relation donne la courbure d'un rayon en fonction des propriétés du milieu au point considéré. Est-ce suffisant pour en déduire le forme d'un rayon ? Dans l'espace non car il faudrait aussi connaître le *rayon de torsion* et poursuivre encore plus loin notre propos. c'est sans espoir car si c'était fructueux, on en trouverait trace dans la littérature. Dans le plan, si la symétrie du problème laisse espérer les rayons plans, c'est théoriquement possible mais la pratique des rayons de courbure dans le plan conduit à des équations différentielles complexes, même si la fonction $n(M)$ est simple; par contre une résolution algorithmique est envisageable. Les développements débordent largement mes objectifs.

1.f Propagation rectiligne dans un milieu homogène.

Dans un milieu où l'indice n est uniforme, l'équation eikonale donne sous sa forme première :

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} = \overrightarrow{\text{grad}} n = \overrightarrow{0}$$

5. du grec $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$ =l'image qui a donné l'icône; on trouve aussi iconale.

d'où $\overrightarrow{\text{grad}} L = n \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{Cte}$ et puisque n est uniforme $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{Cte}$ et le rayon lumineux de vecteur directeur constante est une droite.

On peut préférer la forme élaborée :

$$\frac{1}{R} = \overrightarrow{\text{grad}}(\ln n) \cdot \overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{\nu} = 0$$

et la courbure $\frac{1}{R}$ étant partout nulle, le rayon lumineux est une droite.

On trouve parfois dans la littérature, pour remplacer cette démonstration en trois pages, une élégante démonstration en trois lignes basée sur le théorème de SCHWARTZ et la permutation des opérateurs $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}$ appliqués successivement à L ; le petit reproche qu'on peut lui faire est qu'elle est totalement fautive. L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ suppose que L est fonction de x, y, z et l'opérateur $\frac{\partial}{\partial s}$ suppose que L est fonction de s et deux autres paramètres déterminant le rayon lumineux choisi, or le théorème de SCHWARTZ ne marche qu'au sein d'un même système de coordonnées et pas avec un mélange hybride.

Le passage par l'équation eikonale est incontournable⁶ ; il est dommage que dans la littérature sa démonstration reste une suite de calculs formels sans que le statut mathématique des fonctions et variables utilisées ne soit explicité pour les justifier, ce qui les rend ésotériques donc sujets à caution. Une attitude trop fréquente dans les cours de physique est de s'auto-censurer au niveau des explications mathématiques de peur de passer pour un mauvais physicien ; mais, que diable, un physicien n'est pas un sous-mathématicien mais un sur-mathématicien, en effet, on peut être un excellent mathématicien sans rien comprendre à la physique et l'inverse n'est pas vrai. Remplaçons donc la honte par la fierté.

1.g Lemme : différentielle d'un chemin optique.

Le calcul a été effectué dans le chapitre D-V qui traite de l'approche historique de l'optique géométrique ; on le recopie ici pour éviter au lecteur la fatigue de jongler entre les deux chapitres.

On se place ici dans un milieu homogène d'indice n . Sur un rayon lumineux, on choisit deux points A et B ; le chemin optique qui les sépare est (cf supra) est $L_{AB} = n \|\overrightarrow{AB}\|$. Sur un rayon infiniment voisin du premier, on choisit un point A' proche de A et un point B' proche de B ; le chemin optique qui les sépare est (cf supra) est $L_{A'B'} = n \|\overrightarrow{A'B'}\|$. La différence $L_{A'B'} - L_{AB}$ peut être assimilée à une différentielle dAB que nous nous proposons de calculer.

6. un qualificatif auto-référent de nos jours.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
L_{A'B'}^2 &= n^2 \|\vec{A'B'}\|^2 = n^2 \vec{A'B'}^2 = n^2 (\vec{AB} + \vec{BB'} - \vec{AA'})^2 = \dots \\
&\dots = n^2 \left[\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'}) + (\vec{BB'} - \vec{AA'})^2 \right] = \dots \\
&\dots = n^2 \left[\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'}) + (\vec{BB'} - \vec{AA'})^2 \right] = \dots \\
&\dots = n^2 \|\vec{AB}\|^2 \left[1 + 2 \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|^2} + \frac{(\vec{BB'} - \vec{AA'})^2}{\|\vec{AB}\|^2} \right]
\end{aligned}$$

d'où, en en prenant la racine et en effectuant un développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
L_{A'B'} &= n \|\vec{AB}\| \left[1 + 2 \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|^2} + \dots \right]^{\frac{1}{2}} = \dots \\
&\dots = n \|\vec{AB}\| \left[1 + \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|^2} + \dots \right] = n \|\vec{AB}\| + n \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|} + \dots
\end{aligned}$$

Pour obtenir la différentielle, on soustrait $L_{AB} = n \|\vec{AB}\|$ et l'on tronque à l'ordre 1 :

$$dL_{AB} = L_{A'B'} - L_{AB} = n \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})$$

Nous conviendrons d'appeler \vec{u} le vecteur unitaire du rayon AB soit $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ et conviendrons de noter \vec{dA} et \vec{dB} les déplacements vectoriels élémentaires des points A et B , c'est-à-dire $\vec{dA} = \vec{AA'}$ et $\vec{dB} = \vec{BB'}$; on peut donc affirmer :

$$\boxed{dL_{AB} = n \vec{u} \cdot (\vec{dB} - \vec{dA})}$$

1.h Lois de Snell-Descartes.

La démonstration qui suit ne nécessite pas la connaissance de l'équation eikonale, mais simplement du théorème de MALUS.

Soit un dioptre séparant un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 . Soit un rayon qui traverse le dioptre en un point I , en amont, il est rectiligne de vecteur unitaire \vec{u}_1 et en aval rectiligne de vecteur unitaire \vec{u}_2 ; on y choisit arbitrairement un point A en amont et un point B en aval. Soit un rayon infiniment proche du premier traversant le dioptre en I' ; on y choisit deux points A' et B' de sorte que, d'une part, A et A' appartiennent à la même surface d'onde et donc que $L(A') = L(A)$ et que, d'autre part, B et B' appartiennent à la même surface d'onde et donc que $L(B') = L(B)$. Ainsi on a :

$$dL_{AB} = L_{A'B'} - L_{AB} = [L(B') - L(A')] - [L(B) - L(A)] = [L(B') - L(B)] - [L(A') - L(A)] = 0$$

Le tout est résumé par la figure 1 p. 14. I' est infiniment proche de I et l'on peut confondre le dioptre avec son plan tangent, seul représenté sur cette figure.

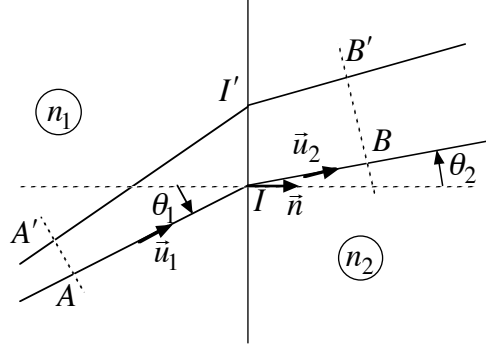


FIGURE 1 – Lois de Snell-Descartes.

La définition par une intégrale de L_{AB} entraîne aussi que $L_{AB} = L_{AI} + L_{IB}$, d'où, en utilisant le lemme précédent et le théorème de MALUS qui assure que AA' est orthogonal à \vec{u}_1 et BB' à \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}
 0 &= dL_{AB} = dL_{AI} + dL_{IB} = \dots \\
 &\dots = \left[n_1 \vec{u}_1 \cdot (\vec{II}' - \vec{AA}') \right] + \left[n_2 \vec{u}_2 \cdot (\vec{BB}' - \vec{II}') \right] = \dots \\
 &\dots = n_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{BB}' - n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{AA}' + [n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2] \cdot \vec{II}' = \dots \\
 &\dots = 0 - 0 + [n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2] \cdot \vec{II}' = [n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2] \cdot \vec{II}'
 \end{aligned}$$

Ceci est vrai quel que soit le second rayon choisi donc quelque soit le point I' infiniment proche de I sur le dioptre, ce qui implique que $n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2$ soit normal au dioptre donc parallèle à son vecteur normal \vec{n} ; les vecteurs \vec{u}_1 , \vec{u}_2 et \vec{n} sont donc coplanaires (le plan d'incidence et la plan de réfraction sont confondus).

En calculant les produits scalaires à partir des modules (des normes) et des angles et en se souvenant que \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont unitaires, on en déduit successivement :

$$\begin{aligned}
 n_1 \|\vec{u}_1\| \|\vec{II}'\| \sin \theta_1 &= n_2 \|\vec{u}_2\| \|\vec{II}'\| \sin \theta_2 \\
 n_1 \|\vec{II}'\| \sin \theta_1 &= n_2 \|\vec{II}'\| \sin \theta_2 \\
 n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2
 \end{aligned}$$

qui est la loi de SNELL-DESCARTES pour la réfraction.

La loi de SNELL-DESCARTES pour la réflexion se démontrerait de même.

1.i En guise de conclusion.

Nous venons de retrouver les résultats essentiels de l'optique géométrique avec les avantages théoriques suivants :

- la lumière est abordée par sa nature électromagnétique et avec son aspect vectoriel,
- un critère de validité de l'optique géométrique a été établi,
- nous n'avons pas eu besoin de principe de FERMAT qui n'est pas dans l'esprit du principe de causalité.

2 Introduction aux méthodes variationnelles.

2.a Principe de Fermat

Nous allons ici, à partir des résultats précédents, établir le principe de FERMAT qui perdra le statut de principe (d'axiome, diraient les mathématiciens) au profit de celui de propriété anecdotique. Par rapport au chapitre précédent traitant de l'approche historique de l'optique, on aborde les choses à rebrousse-poil.

• Milieu homogène.

Soit, dans un milieu homogène d'indice uniforme n , un rayon lumineux passant par les points A et B ; on a vu qu'il est rectiligne et le chemin optique entre A et B le long de ce rayon est le produit de n par la longueur du segment AB . Imaginons un arc de courbe issu de A et arrivant en B infiniment proche du segment AB ; si l'on calcule formellement le chemin optique entre A et B le long de cette courbe, considérée comme un rayon lumineux fictif, on obtiendra le produit de n par la longueur de l'arc, supérieure à celle du segment. Le véritable chemin optique entre A et B calculé sur le vrai rayon est donc inférieur à tous les chemins optiques imaginaires le long de tous les rayons imaginaires infiniment proches du vrai; c'est donc un extremum.

• Lois de la réfraction.

Soit un rayon lumineux issu du point A qui se réfracte, c'est à dire traverse en un point I dioptré Σ séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 , et part vers un point B . Ici encore, imaginons un autre rayon fictif issu du même point A se réfractant en I' sur la surface, infiniment proche de I , de la surface confondue avec son plan tangent II et arrivant au même point B . Tout ceci est résumé par la figure 2 p. 16.

On reprend le calcul de la différentielle du chemin optique L_{AIB} . On a ici $\vec{dA} = \vec{0}$ et $\vec{dB} = \vec{0}$ d'où, en notant \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les vecteurs unitaires de AI et IB :

$$0 = dL_{AIB} = dL_{AI} + dL_{IB} = n_1 \vec{u}_1 \cdot (\vec{dI} - \vec{dA}) + n_2 \vec{u}_2 \cdot (\vec{dB} - \vec{dI}) = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{dI}$$

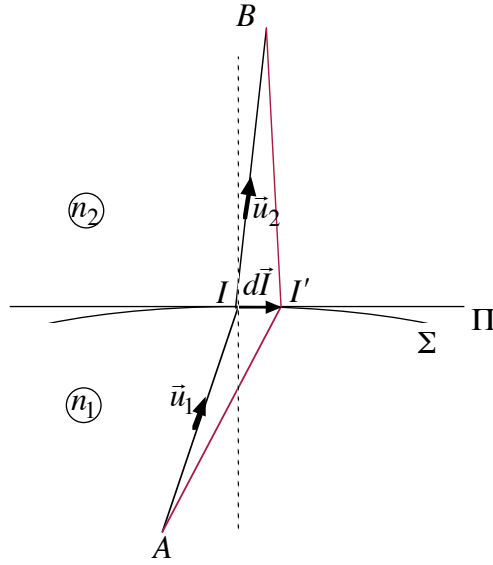


FIGURE 2 – Réfraction.

Or la loi de SNELL-DESCARTES sous la forme brute sous laquelle nous l'avons établie plus haut s'énonce $(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{I} = 0$, d'où $dL = 0$.

La différentielle entre les chemins optiques du vrai rayon lumineux entre A et B et de tout rayon imaginaire entre les mêmes points A et B et infiniment proche du vrai est nulle. Attention I' peut varier dans deux dimensions et dans ces conditions $dL = 0$ ne prouve pas que L soit maximum ou minimum ; on dit qu'il est *stationnaire*.

Cela dit dans cette présentation où la propagation rectiligne en milieu homogène et les lois de SNELL-DESCARTES ont déjà été établies, ce principe de FERMAT ne sert pas à grand⁷-chose.

Remarque : la démonstration ci-dessus s'adapte aisément à la réflexion et même à une succession finie de réflexions et/ou de réfractions.

2.b Rayon lumineux dans un milieu inhomogène.

Soit, dans un milieu inhomogène d'indice $n(M)$ dépendant du point M où l'on est, un rayon lumineux qui est géométriquement un arc de courbe Γ d'origine A et d'extrémité B .

7. Profitons que le chapitre soit court pour faire un peu d'étymologie : les termes grand-mère, grand-rue, grand-place, grand-voile, grand-messe, etc. datent du temps où les adjectifs et participes en -ent et -ant avaient, comme en latin, une forme commune au masculin et au féminin (ce qui explique aussi que le participe présent soit invariable ; l'absence d'accord au pluriel y a été ajoutée à la Renaissance).

Le chemin optique le long de ce rayon peut être noté de plusieurs façons :

$$L = \int_{\Gamma} n(M) \|\vec{d\ell}\| = \int_{\Gamma} n(M) \|\overrightarrow{MM'}\| = \int_A^B n(M) \|\vec{d\ell}\| = \int_A^B n(M) \|\overrightarrow{MM'}\|$$

Il est plus raisonnable de formaliser les choses en paramétrant l'arc Γ par un réel t (rien à voir avec le temps) appartenant à un intervalle $[a, b]$, c'est à dire qu'il existe une fonction à valeurs vectorielle, notée $\vec{F}(t)$ qui associe à chaque t le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(t)$; la fonction est telle que $\vec{F}(a) = \overrightarrow{OA}$, $\vec{F}(b) = \overrightarrow{OB}$ et telle que, si t varie de façon monotone de a à b , le point décrit l'arc de façon monotone, continue et dérivable de A à B .

L'élément $\overrightarrow{MM'}$ est donc lu comme :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{F}(t + dt) - \vec{F}(t) = \vec{F}'(t) dt$$

d'où, en adaptant la notation pour l'indice de réfraction :

$$L = \int_a^b n[\vec{F}(t)] \|\vec{F}'(t)\| dt$$

Imaginons maintenant un autre arc Γ' arbitraire de même origine A et de même extrémité B , calculons formellement le chemin optique L' le long de cet arc, considéré comme un rayon lumineux fictif et pour cela trouvons-lui un paramétrage pertinent, l'astuce est d'associer, de façon provisoirement arbitraire, à tout point M du vrai rayon lumineux, un point P du rayon fictif de façon à créer une fonction à valeurs vectorielle, notée $\vec{G}(t)$ qui associe à chaque t le point P de Γ' tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{G}(t)$; la fonction est telle que $\vec{G}(a) = \overrightarrow{OA}$, $\vec{G}(b) = \overrightarrow{OB}$ et telle que, si t varie de façon monotone de a à b , le point décrit l'arc de façon monotone et continue et dérivable de A à B . dès lors, par analogie :

$$L' = \int_a^b n[\vec{G}(t)] \|\vec{G}'(t)\| dt$$

Restreignons ce qui précède à un arc Γ' infiniment proche de Γ ; on choisira alors plus finement le paramétrage du rayon fictif de sorte que pour tout t , on ait $\vec{F}(t) \approx \vec{G}(t)$. En notant ⁸ $\vec{f}(t) = \vec{G}(t) - \vec{F}(t)$, $\vec{f}(t)$ est supposé suffisamment petit pour raisonner en termes de développements limités à l'ordre un. La différentielle du chemin optique L , égale à l'ordre un à sa variation peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} dL = L' - L &= \int_a^b n[\vec{G}(t)] \|\vec{G}'(t)\| dt - \int_a^b n[\vec{F}(t)] \|\vec{F}'(t)\| dt = \dots \\ \dots &= \int_a^b n[\vec{F}(t) + \vec{f}(t)] \|\vec{F}'(t) + \vec{f}'(t)\| dt - \int_a^b n[\vec{F}(t)] \|\vec{F}'(t)\| dt = \dots \\ &\dots = \int_a^b \left[n[\vec{F}(t) + \vec{f}(t)] \|\vec{F}'(t) + \vec{f}'(t)\| - n[\vec{F}(t)] \|\vec{F}'(t)\| \right] dt \end{aligned}$$

8. La notation $\delta\vec{F}(t)$, traditionnelle, est déroutante et piégeante; je ne l'adopte donc pas à ce stade.

Pour développer à l'ordre un la fonction à intégrer, puisque $f(t)$ est infiniment petit, on peut le considérer comme une variation de $F(t)$, qu'on peut noter⁹ traditionnellement $\delta F(t)$. En supprimant l'argument pour plus de lisibilité, on a :

$$\begin{aligned} n[\vec{F} + \vec{\delta} F] \|\vec{F}' + \vec{\delta} F'\| - n[\vec{F}] \|\vec{F}'\| &= d \left[n[\vec{F}] \|\vec{F}'\| \right] = \dots \\ &\dots = n[\vec{F}] d \left[\|\vec{F}'\| \right] + d \left[n[\vec{F}] \right] \|\vec{F}'\| \end{aligned}$$

Pour éviter le calcul austère de $d \left[n[\vec{F}] \right]$, il suffit de penser très fort à la formule classique $dn = \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \overrightarrow{d\ell}$ et de considérer que le déplacement $\overrightarrow{d\ell}$ est le remplacement de \vec{F} par \vec{G} soit $\vec{\delta F}$; donc $d \left[n[\vec{F}] \right] = \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \vec{\delta F} = \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \vec{f}$

En s'inspirant de la démonstration (cf paragraphe 1.g p. 12) de la différentielle d'un chemin optique et en ne perdant pas de vue que $\vec{\delta F} = \vec{f}$ donc $\vec{\delta F}' = \vec{f}'$, on monte aisément que :

$$d \left[\|\vec{F}'\| \right] = \frac{\vec{F}'}{\|\vec{F}'\|} \cdot \vec{\delta F}' = \frac{\vec{F}'}{\|\vec{F}'\|} \cdot \vec{f}'$$

où l'on reconnaît dans :

$$\frac{\vec{F}'}{\|\vec{F}'\|} = \frac{\vec{F}' dt}{\|\vec{F}' dt\|} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\|\overrightarrow{MM'}\|} = \vec{\tau}$$

le vecteur unitaire tangent au vrai rayon lumineux, d'où :

$$d \left[\|\vec{F}'\| \right] = \vec{\tau} \cdot \vec{f}'$$

Finalement, en reportant ces résultats partiels, on arrive à :

$$dL = \int_a^b n \vec{\tau} \cdot \vec{f}' dt + \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \vec{f} \|\vec{F}'(t)\| dt$$

Dans le second terme, on a déjà noté que $\|\vec{F}'(t)\| dt = \|\overrightarrow{MM'}\|$, qui, par définition, est la différentielle ds de l'abscisse curviligne du point M (rappelons que l'abscisse curviligne $s(M)$ du point M est la longueur de l'arc entre A , en choisissant l'origine pertinemment, et M).

Dans le premier terme $\vec{f}' dt = \frac{d\vec{f}}{dt} dt = d\vec{f}$ qui est donc indépendant du choix de paramétrage choisi sur le rayon lumineux AB ; il apparaît alors judicieux de choisir l'abscisse curviligne comme paramètre de sorte que $d\vec{f} = \frac{d\vec{f}}{ds} ds$.

9. Voir la note précédente.

On peut donc réécrire :

$$dL = \int_a^b n \vec{\tau} \frac{d\vec{f}}{ds} ds + \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \vec{f} ds$$

Intégrons maintenant le premier terme par parties, en tenant compte que par construction $f(a) = f(b) = 0$:

$$\int_a^b n \vec{\tau} \frac{d\vec{f}}{ds} ds = \left[n \vec{\tau} \cdot \vec{f} \right]_a^b - \int_a^b \vec{f} \cdot \frac{d(n \vec{\tau})}{ds} ds = - \int_a^b \vec{f} \cdot \frac{d(n \vec{\tau})}{ds} ds$$

d'où en reportant :

$$dL = - \int_a^b \vec{f} \cdot \frac{d(n \vec{\tau})}{ds} ds + \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \vec{f} ds = \int_a^b \left[\overrightarrow{\text{grad}} n - \frac{d(n \vec{\tau})}{ds} \right] \cdot \vec{f} ds$$

Or l'équation eikonale (cf paragraphe 1.e p. 9) nous apprend que $\overrightarrow{\text{grad}} n = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} L)}{\partial s} = \frac{\partial(n \vec{\tau})}{\partial s}$, donc que $dL = 0$ pour toute fonction f infiniment petit, ce qui généralise le principe de FERMAT dans le contexte le plus général.

2.c Perspectives.

Le formalisme précédent qui calcule, pour montrer qu'elle est nulle, la différentielle d'une intégrale d'une fonction sur un arc correspondant à une réalité physique vis-à-vis des arcs imaginaires infiniment proches de même origine et de même extrémité s'appelle la méthode variationnelle.

Il a été adapté en mécanique à l'étude de mouvement de systèmes plus ou moins complexes, dans le cadre de la mécanique rationnelle très en vogue au XIX^e siècle (voir chapitre B-XVI).

Les physiciens qui, à l'aube du XX^e siècle, se sont penchés sur le berceau de la mécanique quantique étaient imprégnés de la mécanique rationnelle, du principe de FERMAT et de leur analogie ; c'est cette culture qui leur a permis d'envisager la dualité onde-particule de façon opérationnelle et d'en faire naître l'équation de SCHRÖDINGER.