Chapitre D-VIII

Photométrie.

RÉSUMÉ :

Les grandeurs photométriques sont des grandeurs énergétiques pondérées par la courbe de réponse de l'oeil humain. On définit ainsi le flux lumineux (une puissance), l'éclairement (une puissance surfacique pour une surface réceptrice) et l'émittance (une puissance surfacique pour une surface émettrice), l'intensité lumineuse (une puissance par unité d'angle solide) et enfin la luminance (une puissance par unité de surface émettrice et par unité d'angle solide, compte tenu de la loi de Lambert).

On approfondit les choses en étudiant l'éclairement d'une surface élémentaire réceptrice par une surface élémentaire émettrice, ce qui dégage une loi de réciprocité que l'on utilise pour montrer l'influence de la réflexion des murs sur l'éclairement d'une pièce. On rappelle de façon brève la théorie de l'émission d'un corps noir pour justifier l'anisotropie de l'émission d'une surface élémentaire (loi de Lambert).

En annexe, on donne quelques indications élémentaires sur le calcul des angles solides.

Table des matières

1 Les définitions.

1.a De l'énergétique à la photométrie. Flux lumineux.

Une onde électromagnétique décrite par une fonction $f(t)$ (son champ électrique pour une onde polarisée rectiligement ; le champ magnétique s'en déduit aisément) peut être considérée comme somme d'une infinité de sinusoïdes soit, en notation complexe :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\ \exp(j\omega t)\ d\omega$$

où $\tilde{f}(\omega)$ fait office d'amplitude complexe de la sinusoïde $\exp(j\omega t)$. C'est l'interprétation que font les physiciens de la transformation de Fourier.

La plupart des grandeurs énergétiques (densité volumique d'énergie, vecteur de Poynting) sont calculables par l'intégrale du carré de son module (sa norme) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt$$

Le théorème de Parseval affirme que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2\ d\omega$$

où $|\tilde{f}(\omega)|^2$ fait office, à une constante multiplicative près, de densité spectrale d'énergie que l'on notera $P_s(\omega)$ désormais. Par ailleurs, on travaillera plutôt en notations réelles (donc plus de pulsations négatives) et avec les fréquences plutôt que les pulsations, mais ce dernier choix est totalement arbitraire et dénué de tout enjeu.

Soit donc une onde électromagnétique véhiculant une puissance $\mathcal{P}$ dite aussi *flux énergétique* ; si l'on répartit cette puissance par bandes de fréquences élémentaires, on écrit quelque chose comme :

$$\mathcal{P} = \int_{0}^{\infty} P_s(f)\ df$$

où $P_s(f)$ est la densité spectrale d'énergie.

L'œil humain n'est en fait sensible qu'à une faible plage de fréquences $[f_1, f_2]$ entre l'infrarouge et l'ultaviolet et encore dans cette plage, à puissance égale, la réponse physiologique (influx nerveux dans le nerf optique) varie avec la fréquence. Une étude expérimentale physico-physiologique a permis d'établir une courbe de réponse $V(f)$ nulle en dehors de l'intervalle $[f_1, f_2]$ et passant par un maximum dans le jaune.

Il est donc naturel de définir une puissance pondérée, ou *flux lumineux*, notée Φ, par :

$$\Phi = \int_{0}^{\infty} V(f)\ P_s(f)\ df$$

Pour éviter les confusions, on a créé de nouvelles unités et par conséquent la fonction de réponse $V(f)$ est dimensionnée. L'unité S.I. de flux lumineux est le lumen (lm) et $V(f)$ s'exprime en lumen par watt.

On peut définir une efficacité lumineuse par le rapport $\frac{\Phi}{\mathcal{P}}$; elle dépend, bien sûr, de la densité spectrale $P_s(f)$ et serait maximale si le spectre était concentré sur le maximum de $V(f)$; ce maximum serait alors[1] de 680 $\mathrm{lm.W^{-1}}$. Pour fixer les idées une lampe à filament de tungstène a une efficacité de 10 $\mathrm{lm.W^{-1}}$ et la même avec enveloppe à quartz et atmosphère halogénée (lampe dite à iode) de 25 $\mathrm{lm.W^{-1}}$; on arrive à 50 $\mathrm{lm.W^{-1}}$ pour les ampoules fluorescentes et les LED.

1.b Eclairement. Emittance.

Lorsqu'une surface S reçoit un flux lumineux Φ uniformément réparti, on définit son *éclairement* par : $E = \frac{\Phi}{S}$. L'unité S.I. est le lux (lx) ; donc un lux est un lumen par mètre carré. Pour un travail au bureau dans des conditions confortables, il faut au minimum 300 lux.

Pour une source lumineuse (soleil, pleine lune, ampoule électrique), le flux lumineux émis est proportionnel à l'aire de la surface émissive. Le rapport du flux à l'aire s'appelle l'*émittance* et se mesure aussi en lux.

1.c Intensité lumineuse.

On trouvera, si nécessaire, en partie 3 p. 10 des rappels sur les angles solides.

Soit une source lumineuse émettant un flux lumineux Φ dans toutes les directions ; dans tout cône[2] élémentaire d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ dans une direction quelconque, elle émet un flux élémentaire qu'on note $\mathrm{d}\Phi$. On appelle *intensité lumineuse* dans cette direction le rapport $I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\Omega}$. L'unité S.I. est le candela (cd) ; donc un candela est un lumen par stéradian. Notons que, si l'émission est isotrope dans tout l'espace d'angle solide total $4\,\pi$, on a $I = \frac{\Phi}{4\,\pi}$.

1.d Luminance.

Considérons la figure 1 p. 6 où la surface élémentaire d'une source d'aire $\mathrm{d}S$, d'axe Oz émet le flux élémentaire total $d\Phi = E\,\mathrm{d}S$ où E est son émittance. La surface d'aire $\mathrm{d}S$ émet une fraction $\mathrm{d}_2\Phi$ de son flux dans un angle solide élémentaire $\mathrm{d}\Omega$ dans une direction faisant l'angle θ avec Oz.

Pour synthétiser les définitions de l'émittance et de l'intensité, on est tenté de faire apparaître par division la quantité $l = \frac{\mathrm{d}_2\Phi}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\Omega}$. Ce choix est en fait maladroit, car la théorie

1. Simple conséquence de la définition du lumen.
2. C'est la propagation rectiligne qui impose l'utilisation de cônes.

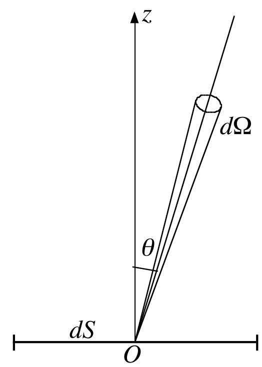

Figure 1 – Luminance.

du corps noir que l'on détaillera plus loin, montre que cette quantité l n'est pas isotrope, elle dépend de la direction θ : l est proportionnel à $\cos\theta$ (loi de Lambert). Cette loi est aussi vérifiée par la plupart des phénomènes lumineux, comme le confirme l'expérience. On définit donc la *luminance* (autrefois appelée *brillance*) de façon qu'elle soit uniforme par :

$$L = \frac{\mathrm{d}_2\Phi}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\Omega\,\cos\theta}$$

L'unité S.I. est le candéla par mètre carré (cd m^{-2}) parfois appelé nit ; c'est aussi un lumen par stéradian et par mètre carré.

On remarquera que l'intensité élémentaire émise par $\mathrm{d}S$ dans la direction θ, définie (cf supra, en adaptant) par $\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}_2\Phi}{\mathrm{d}\Omega}$ vaut $dI = L\,\mathrm{d}S\cos\theta$. Par intégration sur un demi-espace (le côté de $\mathrm{d}S$ où la lumière est émise), on trouve le lien entre émittance et luminance. On part de $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ (voir rappel sur les angles solides en partie 3 p. 10) :

$$E\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}\Phi = \iint d_2\Phi = \iint L\,\cos\theta\,\mathrm{d}S\,d\Omega = \iint L\,\cos\theta\,\mathrm{d}S\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

soit après simplification par dS :

$$E = L\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\,\pi\,L\,\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi\,L$$

qui est homogène car il s'agit de π stéradians et que de toute façon le stéradian est, comme le radian, une pseudo-unité adimensionnée.

Remarque : on se convaincra qu'une source dont la surface serait sphérique (le soleil ou une ampoule opalisée) émet un flux réparti, par symétrie, de façon isotrope sans que cela fasse paradoxe avec le fait que chacune de ses surfaces élémentaires émette de façon anisotrope selon la loi de Lambert.

1.e Autres unités.

Pour les nostalgiques du C.G.S. (les universitaires de tous pays, hélas), les unités sont aussi le lumen et le candela pour le flux et l'intensité, mais sont le phot pour l'éclairement et l'émittance et le stilb pour la luminance ; un phot est un lumen par centimètre carré et vaut donc 10^4 lux ; de même un stilb est un candela par centimètre carré et vaut donc 10^4 nits ou candelas par mètre carré.

Les physiciens peuvent avoir besoin des valeurs énergétiques intrinsèques, non pondérées par la fonction $V(f)$; les unités sont alors transparentes, respectivement le watt, le watt par mètre carré, le watt par stéradian et le watt par mètre carré et par stéradian. Paradoxalement, c'est lumineux, non ?

2 Quelques approfondissements.

2.a Eclairement d'une surface par une source élémentaire.

Considérons, sur la figure 2 p. 7, la surface élémentaire d'une source d'aire $\mathrm{d}S_1$, centrée sur un point O_1 et de normale O_1z_1 éclairant une surface élémentaire d'aire $\mathrm{d}S_2$, centrée sur un point O_2 et de normale O_2z_2 ; on appelle respectivement θ_1 et θ_2 les angles que fait O_1O_2 avec O_1z_1 et O_2z_2 et on appelle $d\Omega$ l'angle solide sous lequel O_1 voit dS_2 et r la distance O_1O_2.

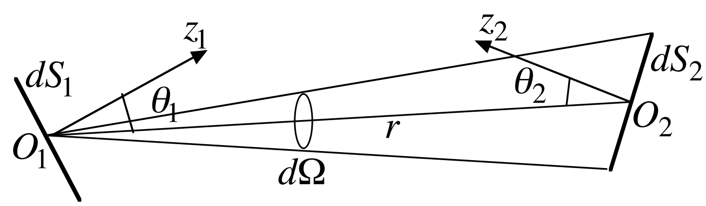

FIGURE 2 – Eclairement doublement élémentaire.

On sait (voir partie 3 p. 10 si nécessaire) que :

$$d\Omega = \frac{\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_2}{r^2}$$

Si l'on note $\mathrm{d}I$ l'intensité élémentaire que $\mathrm{d}S_1$ envoie dans $\mathrm{d}\Omega$, alors $\mathrm{d}S_2$ reçoit de la part de $\mathrm{d}S_1$ le flux élémentaire :

$$\mathrm{d}_2\Phi_{1\rightarrow 2} = \mathrm{d}I\; d\Omega = \frac{\mathrm{d}I\,\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_2}{r^2}$$

et son éclairement est $\dfrac{\mathrm{d}_2\Phi_{1\rightarrow 2}}{\mathrm{d}S_2} = \dfrac{\mathrm{d}I\,\cos\theta_2}{r^2}$.

On voit déjà l'influence de l'inclinaison des rayons sur l'éclairement reçu ; du reste, on le sait bien : en hiver, le soleil, plus bas sur l'horizon chauffe peu ; il ne s'agit certes pas de lumière visible mais d'infra-rouge, mais ça relève de la même explication.

Si $\mathrm{d}S_1$ émet selon la loi de LAMBERT avec une luminance L_1, alors $\mathrm{d}I = L_1\,\mathrm{d}S_1\,\cos\theta_1$ et :

$$\mathrm{d}_2\Phi_{1\to 2} = L_1\,\frac{\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_1\,\cos\theta_2}{r^2}$$

On remarque la symétrie entre les couples $(\mathrm{d}S_1, \theta_1)$ et $(\mathrm{d}S_2, \theta_2)$; on appelle *étendue optique* l'expression $\frac{\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_1\,\cos\theta_2}{r^2}$.

On en déduira que si $\mathrm{d}S_2$ est une source élémentaire envoyant un flux vers $\mathrm{d}S_1$, à luminance égale, il y a égalité entre les flux que chaque source élémentaire envoie vers l'autre. Si les luminances ne sont pas égales on en déduira que $\frac{\mathrm{d}_2\Phi_{1\to 2}}{L_1} = \frac{\mathrm{d}_2\Phi_{2\to 1}}{L_2}$ qui est une loi de réciprocité [3].

2.b Réflexion, transmission, absorption.

Si une surface reçoit un flux incident Φ_i, elle peut en réfléchir une partie (flux réfléchi Φ_r), en transmettre une partie si elle est transparente (flux transmis Φ_t) et enfin en absorber une partie (flux absorbé Φ_a). On appelle respectivement coefficients de réflexion, de transmission et d'absorption les rapports $R = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}$, $T = \frac{\Phi_t}{\Phi_i}$ et $A = \frac{\Phi_a}{\Phi_i}$. Bien sûr, la conservation de l'énergie entraîne que l'on a $R + T + A = 1$.

2.c De l'utilité des murs blancs.

Soit une pièce éclairée par une ampoule électrique ; toute surface dans la pièce est éclairée non seulement par l'ampoule mais aussi par la lumière réfléchie par les murs. Le problème n'est pas simple. Le seul cas où le calcul n'est pas trop complexe est celui d'une pièce sphérique de rayon a (d'accord, elle serait difficile à meubler) avec l'ampoule au centre éclairant avec un flux Φ_0 de façon isotrope et quand la surface éclairée à étudier est une petite partie du mur d'aire $\mathrm{d}S$. Cette surface reçoit de la part de l'ampoule un flux direct Φ_d calculé par une simple considération de proportionnalité : $\Phi_d = \Phi_0\,\frac{\mathrm{d}S}{4\,\pi\,a^2}$, flux qui serait le seul avec des murs totalement absorbants.

Toute autre portion du mur, d'aire $\mathrm{d}\Sigma$ envoie un flux supplémentaire sur $\mathrm{d}S$. Comme, par symétrie, $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}\Sigma$ ont la même luminance, ce flux est le même que celui que $\mathrm{d}S$ envoie sur $\mathrm{d}\Sigma$ (cf paragraphe 2.a p. 7) ; par sommation, le flux total réfléchi par $\mathrm{d}S$ vers les murs (plutôt le mur dans le cas d'une sphère) est égal au flux qu'il reçoit des murs, notons-le Φ_r. Au total, $\mathrm{d}S$ reçoit un flux total $\Phi_t = \Phi_d + \Phi_r$ et réémet Φ_r ; par définition du coefficient de réflexion on a $\Phi_r = R\,\Phi_t = R\,(\Phi_d + \Phi_r)$ d'où l'on tire $\Phi_r = \frac{R}{1-R}\,\Phi_d$ et l'on déduit de tout cela $\Phi_t = \frac{\Phi_r}{R} = \frac{\Phi_d}{1-R}$.

3. qui, à ma connaissance, n'a pas reçu de nom particulier.

Par rapport à des murs absorbants, le flux reçu, et donc l'éclairement, a été multiplié par $\frac{1}{1-R}$; par exemple si $R = 90\%$, il a été multiplié par 10 !

Remarque : la divergence pour $R = 1$ ne doit pas surprendre : l'ampoule injecte une puissance constante et si les murs réfléchissent intégralement, l'énergie est piégée dans la pièce et croît proportionnellement au temps et l'on sent bien que tout cela finira mal.

2.d Anisotropie du rayonnement du corps noir.

Un corps noir est un corps totalement absorbant. Le plus simple est une enceinte fermée percée d'un trou minuscule : un photon qui y entre ne peut plus retrouver la sortie.

Une petite annexe d'au moins cent pages montrerait aisément, grâce à la thermodynamique statistique quantique, que l'enceinte contient une densité volumique N_v de photons, d'une énergie moyenne $\overline{e}$, dont la vitesse c est celle de la lumière et de direction aléatoire avec une répartition isotrope. Le produit $N_v\,\overline{e}$ ne dépend que de la température T selon la loi de Stefan : il est proportionnel à T^4. Nous admettrons ici ces résultats démontrés dans le chapitre E-IX qui traite de la thermodynamiques des particules indiscernables.

Considérons, sur la figure 3 p. 9, le petit trou de surface $\mathrm{d}S$ de normale Oz et calculons l'énergie $\mathrm{d}_3\mathcal{E}$ qui sort de $\mathrm{d}S$ pendant le temps $\mathrm{d}t$ et dans un angle solide $\mathrm{d}\Omega$ autour d'une direction moyenne Oz' faisant l'angle θ avec Oz ou de tout autre point de la surface avec une direction identique (d'où les quelques petits cônes dessinés sur la figure).

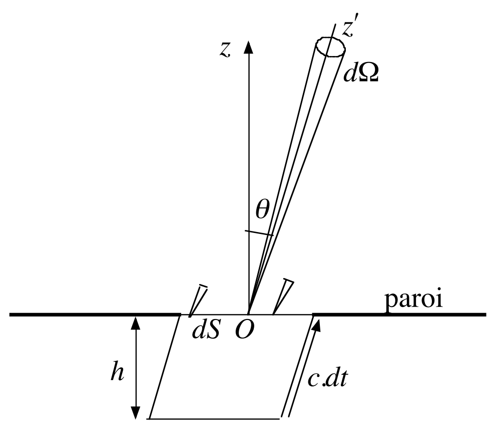

Figure 3 – Rayonnement du corps noir.

Pour qu'un photon puisse sortir il faut qu'il ait la bonne direction. La proportion de photons concernés, du fait de l'isotropie, est $\mathrm{d}\varpi = \frac{d\Omega}{4\pi}$ (4π est l'angle solide de tout l'espace).

Cherchons à repérer où sont, à l'instant initial t, les photons qui traverseront $\mathrm{d}S$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ avec cette direction. Comme ils vont à la vitesse c dans la direction de Oz', à $\mathrm{d}\Omega$ près, ils parcourront dans cette direction une longueur $c\,\mathrm{d}t$ et se trouvent donc initialement contenus dans un cylindre penché de base $\mathrm{d}S$ et de hauteur, comptée perpendiculairement à $\mathrm{d}S$, $h = c\,\mathrm{d}t\,\cos\theta$; ce cylindre de volume $\mathrm{d}_2V = \mathrm{d}S\,c\,\mathrm{d}t\,\cos\theta$ contient $\mathrm{d}_2n = N_v\,\mathrm{d}_2V$ photons d'énergie moyenne $\overline{e}$, mais seule la proportion $\mathrm{d}\varpi$ convient. L'énergie qui sort pendant $\mathrm{d}t$ dans $\mathrm{d}\Omega$ est donc :

$$\mathrm{d}_3\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\,\pi}\,N_v\,\overline{e}\,c\,\cos\theta\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

Le flux émis est alors :

$$\mathrm{d}_2\Phi = \frac{\mathrm{d}_3\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\,\pi}\,N_v\,\overline{e}\,c\,\cos\theta\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\Omega$$

La loi de Lambert est ainsi démontrée (c'est là que je voulais en venir) et (accessoirement) la luminance est alors :

$$L = \frac{\mathrm{d}_2\Phi}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\Omega\,\cos\theta} = \frac{N_v\,\overline{e}\,c}{4\,\pi} = Cte\,T^4$$

qui est une autre version de la loi de Stefan.

3 Annexe sur les angles solides.

3.a Définition.

Soit un cône de sommet O s'appuyant sur une courbe fermée quelconque. La surface interceptée sur une sphère de centre O a une taille proportionnelle par homothétie au rayon R de la sphère et donc une aire S proportionnelle au carré de R ; on appelle donc angle solide du cône le rapport $\Omega = \frac{S}{R^2}$, indépendant de R.

L'espace tout entier a donc, puisque l'aire d'une sphère est $4\,\pi\,R^2$, un angle solide de $4\,\pi$.

3.b Angle solide élémentaire.

Pour un cône découpant sur la sphère un rectangle entre les longitudes φ et $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ et les colatitudes θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$ de longueur $AB = R\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$ et de largeur $BC = R\,\mathrm{d}\theta$, l'angle solide élémentaire est donc (voir la figure 4 p. 11 qui rappelle les figures que j'ai jadis tracées au tableau noir) :

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

3.c Angle solide sous lequel est vue une surface élémentaire.

Calculons maintenant sous quel angle solide est vue d'un point O une surface élémentaire $\mathrm{d}S$, autour d'un point M, de normale Mz. Il n'y a pas de problème majeur si Mz

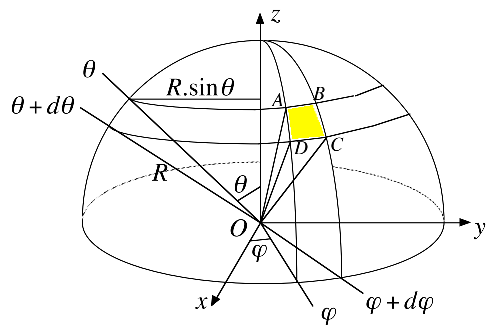

FIGURE 4 – Angle solide élémentaire.

est parallèle à OM, sinon il faut projeter orthogonalement la surface $\mathrm{d}S$ en une surface $\mathrm{d}\Sigma$ sur la sphère de rayon OM, comme sur la figure 5 p. 11 à gauche (où, pour améliorer la lisibilité, M a été placé sur le bord de $\mathrm{d}S$), et l'on aura alors $\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\Sigma}{r^2}$ où r désigne la distance OM.

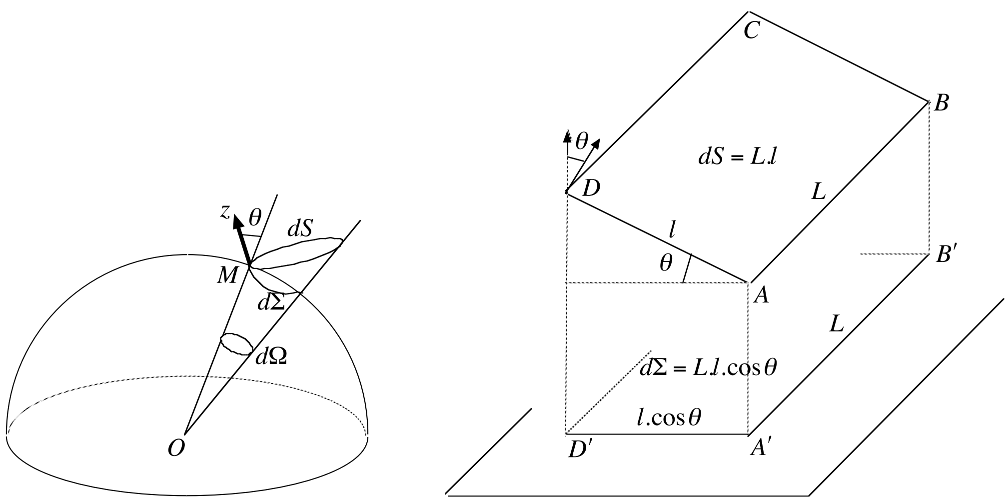

FIGURE 5 – Angle solide sous lequel est vue une surface élémentaire.

Or, comme l'indique la partie droite de la même figure, si l'on projette sur un plan un rectangle avec un côté (la longueur) parallèle au plan et l'autre (la largeur) faisant avec lui un angle θ, les longueurs du rectangle et de sa projection sont égales mais la largeur de la projection, donc l'aire, a été multipliée par $\cos\theta$; il en est de même pour une surface quelconque, car elle peut être découpée en tas de petits rectangles. Nous avons donc $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}S\,\cos\theta$ et $\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S\,\cos\theta}{r^2}$ où θ désigne l'angle entre OM et Mz.