

## Chapitre B-XVII/D-IX

# Aspects corpusculaire de la lumière.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## RÉSUMÉ :

*Ce chapitre est à la fois le chapitre D-IX d'optique et le chapitre B-XVII de mécanique (quantique en l'occurrence).*

*L'accent est mis sur l'aspect historique et sur les différentes étapes qui ont conduit à la notion de photon.*

*La première est l'explication de la distribution spectrale du rayonnement du corps noir par la quantification de l'énergie échangée entre la matière et le champ électromagnétique (Max Planck en 1900).*

*La seconde est l'explication du seuil de fréquence dans l'effet photoélectrique par la quantification de l'énergie électromagnétique (Albert Einstein en 1905).*

*La troisième est l'explication du spectre de l'hydrogène atomique par la quantification des niveaux d'énergie de l'atome (Niels Bohr en 1913).*

*La dernière est la vérification que le quantum électromagnétique est bien une particule par la mise en évidence d'une quantité de mouvement liée à la longueur d'onde conformément aux lois relativistes (Arthur Compton en 1923).*

*Pour terminer on explique la dualité onde-corpuscule en assimilant le photon à un train d'onde ou paquet d'onde et en en déduisant les relations d'incertitude d'Heisenberg, sans avoir besoin d'un formalisme quantique.*

# Table des matières

<b>B-XVII/D-IX</b>	<b>Aspects corpusculaire de la lumière.</b>	<b>1</b>
1	Introduction historique. . . . .	4
2	Rayonnement du corps noir. . . . .	5
2.a	Ondes stationnaires dans un parallélépipède. . . . .	5
2.b	Dénombrement des modes. . . . .	6
2.c	La catastrophe de l’ultra-violet. . . . .	6
2.d	Quantification de l’énergie des modes de la cavité. . . . .	8
3	L’effet photoélectrique. . . . .	9
3.a	Les faits expérimentaux. . . . .	9
3.b	Une étape vers le concept de photon. . . . .	10
3.c	La théorie de l’effet photoélectrique. . . . .	11
4	Le spectre de l’hydrogène. . . . .	11
4.a	Les résultats expérimentaux. . . . .	11
4.b	Interprétation de Bohr. . . . .	12
4.c	Quantification du moment cinétique. . . . .	13
5	Et le photon devient une particule. . . . .	15
5.a	Le photon comme particule relativiste. . . . .	15
5.b	L’effet Compton. . . . .	15
6	Démythification de la dualité onde-corpuscule. . . . .	18
6.a	Rappel sur les trains ou paquets d’onde. . . . .	18
6.b	Démythification des relations d’incertitude d’Heisenberg. . . . .	19

# 1 Introduction historique.

L'invention de la lunette astronomique en 1609, dont on sait le rôle dans la naissance de l'astronomie scientifique, coïncide à peu près avec le point de départ des recherches scientifiques sur l'optique.

Depuis la découverte en 1620 des lois de SNELL-DESCARTES puis le développement de l'optique géométrique, l'évolution des idées a suivi celle de la physique basculant d'une vision corpusculaire, donc mécanique, à une vision ondulatoire.

NEWTON, le père de la mécanique, a observé la décomposition de la lumière, la coloration des lames minces<sup>1</sup>, la diffraction mais a proposé en 1675 une explication corpusculaire à ces phénomènes : la lumière est constituée de grains qui se déplacent.

RÖEMER évalue la vitesse de la lumière en 1676 de façon relativement correcte. Il est intéressant de constater que c'est le triomphe de la mécanique qui a permis cette mesure. En effet les lois de la mécanique céleste permettent de calculer avec une bonne précision les moments où les satellites de Jupiter se cachent derrière lui ou redeviennent visibles. L'observation de ces *immersions* et *émersions* à partir de la Terre se fait avec un retard plus ou moins grand selon que Jupiter est plus ou moins loin. C'est là-dessus que s'est basé RÖEMER pour ses calculs.

HUYGENS en 1690 a néanmoins proposé un mécanisme d'agitation se propageant de proche en proche, typique d'une approche ondulatoire et introduira un concept qui deviendra celui de surface d'onde. A cette époque de la mécanique triomphante, ses travaux ne trouvent aucun écho.

Bien plus tard, pendant que les lois de l'électromagnétisme prennent forme, YOUNG invente en 1810 un dispositif générant des interférences qui enterre le modèle corpusculaire au profit du modèle ondulatoire. FRESNEL reprend en 1812 les idées de HUYGENS et propose une théorie de la diffraction.

En 1849, Hippolyte FIZEAU invente un dispositif qui lui permet une mesure précise de la vitesse de la lumière. Et l'on constatera que c'est la valeur de la vitesse prévue dans la théorie de MAXWELL (1864) pour les ondes électromagnétiques<sup>2</sup>. Désormais l'optique cesse d'être une discipline à part et s'intègre à l'électromagnétisme.

La théorie corpusculaire semble tombée aux oubliettes de l'Histoire. Mais coup de théâtre, la physique va traverser à la toute fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au tout début du XX<sup>e</sup> une grave crise dont elle sortira totalement renouvelée et qui remettra sur la sellette la théorie corpusculaire, en l'étendant à la matière.

Dans ce chapitre, nous allons évoquer les phénomènes dont l'étude a dégagé la notion de quantification de l'énergie et celle de photon. Nous les présenterons un peu comme un roman policier scientifique, car c'en a été un.

---

1. on sait maintenant qu'il s'agit d'un phénomène d'interférences entre les rayons réfléchis par les deux faces de la lame

2. c'est-à-dire  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

## 2 Rayonnement du corps noir.

L'étude spectrale du rayonnement du corps noir a historiquement montré des contradictions avec les modèles thermodynamiques habituels ; c'est en cherchant à résoudre cette contradiction qu'on a mis pour la première fois le doigt sur les phénomènes quantiques. Nous nous intéresserons plutôt à la densité spectrale d'énergie dans une cavité parallélépipédique qui est directement liée<sup>3</sup> rayonnement du corps noir.

### 2.a Ondes stationnaires dans un parallélépipède.

On suppose ici que le lecteur a déjà manipulé des ondes stationnaires et des ondes électromagnétiques.

Les trois composantes du champ électrique et les trois composantes du champ magnétique d'une onde stationnaire dans une cavité vide parallélépipédique sont, en prenant les axes du repère parallèles aux arêtes de la cavité, des fonctions de la forme

$$f(x, y, z, t) = Cte \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \sin(\gamma z) \sin(\omega t)$$

à des déphasages près, omis pour alléger l'écriture, et que l'on peut considérer comme superposition d'ondes progressives en :

$$Cte \sin(\pm \alpha x \pm \beta y \pm \gamma z - \omega t) = Cte \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)$$

(toujours à des déphasages près) où les  $\vec{k}$  possibles ont pour composantes  $\pm\alpha$ ,  $\pm\beta$  et  $\pm\gamma$ .

Les conditions aux limites sur les parois, appliquées à l'onde stationnaire, imposent la nullité de certaines composantes ou de certaines de leurs dérivées sur les parois. Il en résulte classiquement (voir au chapitre D-II les parties traitant des ondes progressives et stationnaires) que sur les trois directions, la distance entre parois est un multiple entier de la demi-période spatiale vis-à-vis de la coordonnée concernée, donc en notant  $a$ ,  $b$  et  $d$  ( $c$  est déjà pris !) les longueurs des trois côtés de la cavité et  $l$ ,  $m$  et  $n$  trois entiers, on a successivement :

$$\begin{aligned} a &= l \frac{\pi}{\alpha} & b &= m \frac{\pi}{\beta} & d &= n \frac{\pi}{\gamma} \\ k_x &= \alpha = l \frac{\pi}{a} & k_y &= \beta = m \frac{\pi}{b} & k_z &= \gamma = n \frac{\pi}{d} \end{aligned}$$

Par ailleurs toute composante  $f$  d'un des champs d'une onde électromagnétique dans le vide vérifie l'équation de propagation  $\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2}$ , d'où  $\vec{k}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  et  $k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ .

---

3. Cela est développé dans le chapitre consacré à la thermodynamique des particules indiscernables ; le faire ici casserait la dynamique du chapitre.

## 2.b Dénombrement des modes.

L'objectif est ici de calculer le nombre de types d'ondes stationnaires de pulsation comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ . Un type d'onde (on dit un *mode de la cavité*) est décrite par son vecteur  $\vec{k}$  que l'on peut représenter dans un espace imaginaire à trois dimensions correspondant à  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$ . Un mode y est représenté par un point et les différents points forment un empilement périodique de points distants de  $\frac{\pi}{a}$ ,  $\frac{\pi}{b}$  et  $\frac{\pi}{d}$  sur les trois directions. En gros, on peut affecter à chaque point l'intérieur d'un parallélépipède d'abscisses entre  $(l - \frac{1}{2})\frac{\pi}{a}$  et  $(l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{a}$  selon l'axe des  $k_x$ ,  $(m - \frac{1}{2})\frac{\pi}{b}$  et  $(m + \frac{1}{2})\frac{\pi}{b}$  selon l'axe des  $k_y$  et  $(n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{d}$  et  $(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{d}$  selon l'axe des  $k_z$  donc un pseudo-volume  $\frac{\pi^3}{abd} = \frac{\pi^3}{V}$  où  $V$  est le volume géométrique de la cavité.

Les modes correspondant à une pulsation comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , donc à un vecteur d'onde de module compris entre  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $k + dk = \frac{\omega + d\omega}{c}$ , ce qui correspond à l'intervalle entre deux sphères de rayons  $k$  et  $k + dk$  de pseudo-volume  $4\pi k^2 dk$  où plutôt le huitième de cet intervalle car  $\pm\alpha$ ,  $\pm\beta$  et  $\pm\gamma$ , compte tenu des parités des fonctions sinusoïdales, représentent la même onde ; le pseudo-volume est donc réduit à  $\frac{\pi}{2} k^2 dk$ . Le nombre de points représentatifs des modes possibles s'obtient en divisant cet pseudo-volume par celui occupé par un point, soit :

$$dn = \frac{\frac{\pi}{2} k^2 dk}{\frac{\pi^3}{V}} = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2}$$

Signalons que ce résultat doit être multiplié par un degré de dégénérescence  $g = 2$  correspondant aux deux polarisations élémentaires possibles d'une telle onde.

La suite des calculs pourra être effectué avec le module (la norme)  $k$  du vecteur d'onde, la pulsation  $\omega$ , la fréquence  $f$  en faisant à chaque fois apparaître une densité spectrale de modes. Avec  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$ , on passe d'une des formulations suivantes à l'autre :

$$\begin{aligned} dn &= g \rho_k(k) dk = \frac{V k^2 dk}{\pi^2} \\ dn &= g \rho_\omega(\omega) d\omega = \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \\ dn &= g \rho_f(f) df = \frac{8\pi V f^2 df}{c^3} \end{aligned}$$

## 2.c La catastrophe de l'ultra-violet.

On déduit de ce qui précède la loi de RAYLEIGH-JEANS en 1900 (démonstration améliorée en 1905). A chaque mode est associée l'énergie d'un mode vibratoire comme les modes vibratoires des molécules diatomiques, soit  $kT$  (équipartition de l'énergie selon le modèle de MAXWELL-BOLTZMANN). Dans cette approche, on a une énergie dans la bande de fréquences  $[f, f + df]$  :

$$dU = dn kT = g \rho_f(f) df kT$$

d'où :

$$\frac{dU}{df} = \frac{8 \pi V f^2 k T}{c^3}$$

Cette formule prévoit une divergence quand la fréquence croît et qui n'est heureusement pas observée expérimentalement. Cette contradiction fut baptisée *catastrophe de l'ultra-violet*.

Parallèlement Wilhelm WIEN avait proposé en 1896 une loi empirique, tirée des résultats expérimentaux, pour les hautes fréquences de la forme :

$$\frac{dU}{df} = A V f^3 \exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)$$

où  $A$  et  $h$  sont des constantes (on anticipe sur la notation de cette seconde constante). Mais cette loi, où les constantes sont déterminées de façon expérimentale, ne convient pas aux basses fréquences.

En octobre 1900, Max PLANCK propose, sans chercher à la justifier, une formule dont les deux lois précédentes soient des approximations respectivement aux basses et aux hautes énergies. En effet, partons de la formule qu'il proposa :

$$\frac{dU}{df} = A V \frac{f^3}{\exp\left(\frac{h f}{k T}\right) - 1}$$

Si  $h f$  est petit devant  $k T$  et avec  $e^x = 1 + x + \dots$  quand  $x$  est petit, on a :

$$\frac{dU}{df} \approx A V \frac{f^3}{\frac{h f}{k T}} = \frac{A V f^2 k T}{h}$$

qui est bien la loi de RAYLEIGH-JEANS, à l'écriture de la constante près ( $\frac{A}{h} = \frac{8\pi}{c^3}$ ).

Si  $h f$  est grand devant  $k T$  et avec  $e^x \gg 1$  quand  $x$  est grand, on a :

$$\frac{dU}{df} \approx A V f^3 \exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)$$

qui est bien la loi de WIEN.

En prime, l'accord avec les deux lois asymptotiques et avec l'expérience était non seulement qualitatif mais quantitatif.

A titre d'illustration, la figure 1 p. 8 montre un diagramme à plusieurs températures non de l'énergie volumique mais de la puissance surfacique (qui lui est proportionnelle) en fonction de la longueur d'onde (au lieu de la fréquence).

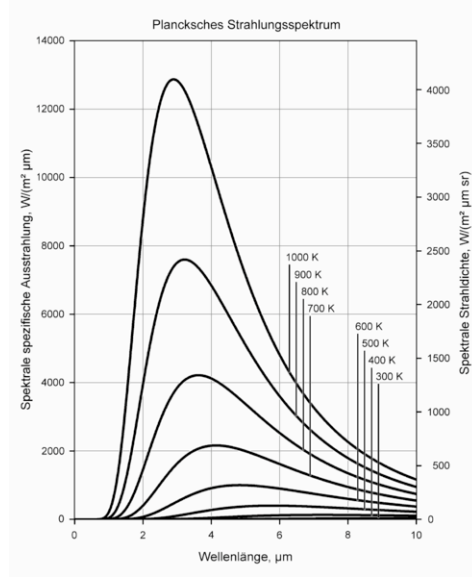


FIGURE 1 – Diagramme énergie-longueur d’onde.

## 2.d Quantification de l’énergie des modes de la cavité.

Deux mois plus tard, Max PLANCK comprend<sup>4</sup> qu’il peut justifier cette formule en quantifiant l’énergie d’un mode : celle-ci ne prend pas une infinité continue de valeurs mais une infinité dénombrable de multiples (éventuellement nuls) d’une valeur proportionnelle à la fréquence  $f$  (ou  $\nu$ ) du mode, la constante est notée  $h$  et s’appellera bientôt la constante de PLANCK.

Avec la statistique de BOLTZMANN, la probabilité que l’énergie d’un mode soit égale à  $E_n = n h f$  où  $n$  est un entier, éventuellement nul, est de la forme  $\varpi_n = A \exp\left(-\frac{n h f}{k T}\right)$  avec bien sûr  $\sum_0^\infty \varpi_n = 1$  d’où<sup>5</sup>  $A = 1 - \exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)$

L’énergie moyenne, pour un mode de fréquence  $f$ , est, par définition,  $\langle E(f) \rangle = \sum_0^\infty \varpi_n E_n$

4. Les articles qu’il a fait paraître ne permettent pas de savoir ce qui, précisément, a fait jaillir cette idée. Le fonctionnement du cerveau reste un mystère.

5. En posant  $X = \exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)$ , on a  $1 = A \sum_0^\infty X^n = \frac{A}{1-X}$



d'où<sup>6</sup> :

$$\langle E(f) \rangle = \sum_0^{\infty} \varpi_n E_n = A h f \sum_0^{\infty} n \exp\left(-\frac{n h f}{k T}\right) = \dots = h f \frac{\exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)}$$

Dans cette nouvelle approche, on a une énergie dans la bande de fréquences  $[f, f + df]$  :

$$dU = dn \langle E(f) \rangle = g \rho_f(f) df \langle E(f) \rangle$$

d'où, après multiplication « haut et bas » par  $\exp\left(\frac{h f}{k T}\right)$  :

$$\frac{dU}{df} = \frac{8 \pi h V f^3}{c^3} \frac{\exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h f}{k T}\right)} = \frac{8 \pi h V f^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h f}{k T}\right) - 1}$$

qui est bien la formule proposée deux mois plus tôt.

A ce stade de l'histoire des sciences, la notion de photon n'est pas encore dégagée ; on a juste mis en évidence une quantification de l'énergie d'une onde stationnaire. Prudemment, on considère à l'époque que ce sont les échanges énergétiques qui sont quantifiés.

### 3 L'effet photoélectrique.

#### 3.a Les faits expérimentaux.

Le premier effet électrique de la lumière sur les métaux est l'effet photovoltaïque découvert par Antoine BECQUEREL<sup>7</sup> en 1829 : une pile constituée de deux électrodes métalliques dont une oxydée et plongées dans un électrolyte délivre un courant si elle est éclairée ; l'effet reste inexplicé.

En 1887, Heinrich HERTZ montre qu'une plaque de zinc décapée<sup>8</sup> et fortement éclairée se charge positivement. Il utilise un électroscope, c'est-à-dire un ensemble de deux petites

---

6. On se sert de

$$\sum_0^{\infty} X^n = \frac{1}{1 - X}$$

d'où, par dérivation,

$$\sum_0^{\infty} n X^{n-1} = \frac{1}{(1 - X)^2}$$

puis multiplication par  $X$

$$\sum_0^{\infty} n X^n = \frac{X}{(1 - X)^2}$$

7. Antoine Becquerel est le grand-père d'Henri Becquerel qui a découvert la radioactivité.

8. pour enlever la couche d'oxyde en surface.

feuilles métalliques en contact avec la plaque de zinc et qui se repoussent dès qu'elles sont chargées par répulsion entre charges de même signe. L'expérience est schématisée par la figure 2 p. 10 où la plaque de zinc, posée sur le *plateau* de l'électroscope est figurée en vert et le faisceau lumineux, produit par un arc électrique, qui l'éclaire en bleu.

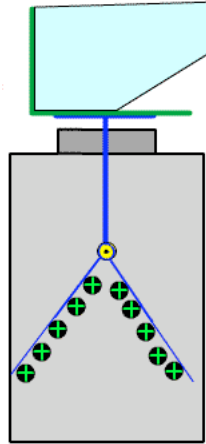


FIGURE 2 – Effet photoélectrique.

L'électron est découvert en 1897 par J.-J. THOMSON et l'on comprend alors que le rayonnement lumineux qui éclaire la plaque de zinc lui arrache des électrons et l'on améliore l'expérience soit en captant les électrons arrachés par une autre plaque maintenue à un potentiel attracteur donc positif par rapport à la première et en mesurant le courant qui en résulte donc le nombre d'électrons arrachés, soit en les repoussant par un potentiel négatif, ce qui mesure leur énergie au travers du potentiel qu'il faut établir pour annuler le courant. Les résultats sont surprenants pour l'époque :

- le phénomène a lieu quel que soit l'éclairement (puissance surfacique reçue) de la plaque mais uniquement si la fréquence  $\nu$  est supérieure à une valeur seuil  $\nu_s$ ,
- le nombre d'électrons arrachés, à une fréquence donnée est proportionnel à l'éclairement,
- l'énergie cinétique des électrons arrachés est fonction affine de la fréquence ; il semble que ce dernier résultat n'a été connu et vérifié qu'après avoir été prévu par EINSTEIN en 1905 (cf infra).

### 3.b Une étape vers le concept de photon.

La réponse a été apportée en 1905 par Albert EINSTEIN. Il s'appuie sur la découverte par Max PLANCK en 1900 de la quantification des échanges entre matière et rayonnement (cf supra) pour formuler l'hypothèse audacieuse que l'énergie d'une onde électromagnétique est émise par paquets dont l'énergie  $E$  est proportionnelle à la fréquence  $\nu$ , conformément à la règle de quantification établie par PLANCK. Conceptuellement, la quantification n'est plus une propriété des échanges entre matière et rayonnement mais une propriété intrinsèque du

rayonnement. Ces quanta<sup>9</sup> d'énergie n'ont toutefois pas encore acquis le statut de particule.

### 3.c La théorie de l'effet photoélectrique.

Pour arracher un électron d'un métal, il faut lui fournir une certaine *énergie d'extraction*  $E_0$ . Si un quantum d'énergie  $E = h\nu$  où  $\nu$  est la fréquence et  $h$  la constante de PLANCK est échangé entre une onde électromagnétique et un électron de conduction, de deux choses l'une :

- $h\nu$  est inférieur à  $E_0$  et l'électron ne peut être arraché ; il absorbe l'énergie puis la restitue au réseau métallique qui s'échauffe mais il n'y a pas d'effet photoélectrique.
- $h\nu$  est supérieur à  $E_0$  et il peut être arraché en utilisant une partie, soit  $E_0$ , de l'énergie du quantum pour l'extraction et le reste lui sert d'énergie cinétique.

Tout ceci explique correctement toutes les constatations expérimentales :

- la fréquence seuil car  $h\nu > E_0$  équivaut à  $\nu > \nu_s = \frac{E_0}{h}$ ,
- la proportionnalité entre intensité et éclairement car la puissance reçue est proportionnelle, à fréquence donnée, au nombre de quanta et car l'intensité est proportionnelle au nombre d'électrons arrachés et car enfin un quantum arrache un électron et un seul,
- la relation affine entre énergie cinétique et fréquence car  $h\nu = E_0 + \frac{1}{2} m v^2$ .

Pour cette théorie<sup>10</sup>, EINSTEIN reçoit, en 1921 le prix NOBEL.

## 4 Le spectre de l'hydrogène.

### 4.a Les résultats expérimentaux.

La mise au point du spectroscope à réseau de diffraction par FRAUNHOFER en 1821 permet, pendant tout le XIX<sup>e</sup> siècle, l'étude du spectre solaire qui est essentiellement le spectre d'absorption de la lumière qu'il émet par la couronne solaire, majoritairement composée d'hydrogène atomique. L'utilisation de lampe à décharge à hydrogène rendit l'étude de ce spectre (cette fois d'émission) plus aisée.

L'atome d'hydrogène est le plus simple qui soit (un proton et un électron) et son spectre est organisé en plusieurs groupes de raies, les *séries*, et l'on a cherché à trouver un lien entre la longueur d'onde  $\lambda$  (ou le nombre d'onde  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ ) d'une raie et de son rang  $n$  dans la série, lien qui fut aisé à trouver par tâtonnements<sup>11</sup>.

Furent explorées successivement :

---

9. Les physiciens de l'époque étaient de bons latinistes : à un singulier neutre en -um (quantum), ils ont donné un pluriel en -a (quanta).

10. Paradoxalement, ce n'est pas pour les théories de relativité qu'il a reçu ce prix.

11. A partir des résultats expérimentaux, on trace des graphes donnant  $\lambda^a$  en fonction de  $n^b$  pour diverses valeurs des exposants  $a$  et  $b$ , jusqu'à ce qu'on trouve des points alignés.

- la série de BALMER en 1885, dans le visible, avec une formule  $\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$  où  $n \geq 3$  et où  $R_H$  est la constante de RYDBERG.
- la série de LYMAN en 1906, dans l’ultra-violet, avec une formule  $\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$  où  $n \geq 2$ .
- la série de PASCHEN en 1908, dans l’infra-rouge, avec  $\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right)$  où  $n \geq 4$ .

Dès 1888, à la suite des travaux de Johann BALMER, Johannes RYDBERG propose la formule générale :

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

que les travaux de Theodore LYMAN et Friedrich PASCHEN viennent confirmer, puis ultérieurement (au-delà donc du cadre de ce chapitre à forte connotation historique) pour les valeurs suivantes de  $m$ , Frederick BRACKETT (1922 pour  $m = 4$ ), August PFUND (1928 pour  $m = 5$ ) et Curtis HUMPHREYS (1953 pour  $m = 6$ ). Pour les premières séries, hormis celle de BALMER visible à l’oeil nu, il est vraisemblable<sup>12</sup> que le détecteur ait été un papier photographique sensible à l’infra-rouge ou l’ultra-violet.

Restait à comprendre le mécanisme qui explique une formule si simple.

## 4.b Interprétation de Bohr.

A cette époque, les connaissances sur la structure de l’atome sont les suivantes :

- en 1897, Joseph John THOMSON montre que les rayons cathodiques<sup>13</sup> sont formés de particules chargées négativement ; il découvre ainsi l’électron. Il imagine que l’atome est une soupe sphérique chargée positivement dans laquelle se trouvent des électrons quasi-ponctuels (modèle dit du plum-pudding).
- en 1909, en bombardant une mince feuille d’or par des particules alpha, Ernest RUTHERFORD constate que rares sont les particules notablement déviées, il en déduit que la structure de la matière est lacunaire et propose un modèle planétaire où l’électron orbite autour d’un noyau positif quasi-ponctuel.
- toutefois, ce modèle pose problème : une des conséquences de équations de MAXWELL (établies vers 1865) est qu’un tel électron en orbite doit rayonner de l’énergie donc en perdre et spiraler vers le noyau ; son orbite est donc instable.

Les idées de quantifications sont dans l’air du temps (cf supra) et Niels BOHR propose en 1913 un modèle où l’énergie de l’électron en orbite ne peut varier continûment mais par saut entre valeurs quantifiées. La suite devient lumineuse : les seules orbites stables de l’électron sont quantifiées par un entier  $n$  et ont pour énergies  $E_n = -\frac{A}{n^2}$  où  $A$  est une constante, la plus basse ( $n = 1$ ) correspond à l’état *fondamental* et les autres ( $n \geq 2$ ) à des *états excités*.

12. Les sources auxquelles j’ai eu accès n’offrent pas de certitude, mais une présomption.

13. On sait donc depuis J. J. Thomson qu’il s’agit d’électrons arrachés puis accélérés par un champ électrique intense en surface d’un métal ; pour qu’il puissent être observés avant d’être absorbés, on réalise l’expérience dans un gaz raréfié. C’est sur ce principe que fonctionne un tube au néon.

Pour passer d'un état d'énergie  $E_{n_1}$  à un état d'énergie supérieure quantifiée par  $n_2$  supérieur à  $n_1$ , il doit absorber un quantum d'énergie électromagnétique d'énergie :

$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = A \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

donc de fréquence  $f$  telle que (cf supra, l'énergie d'un quantum est  $hf$ ), soit successivement avec  $\lambda = cT = \frac{c}{f}$  :

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = A \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{A}{hc} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

où la constante  $\frac{A}{hc}$  s'identifie à la constante de RYDBERG  $R_H$ .

Inversement en se désexcitant d'un état d'énergie  $E_{n_1}$  à un état d'énergie inférieure quantifiée par  $n_2$  inférieur à  $n_1$ , il doit émettre un quantum d'énergie électromagnétique d'énergie  $\Delta E = E_{n_1} - E_{n_2}$  dont on calculera la longueur d'onde comme ci-dessus.

On vient là d'accomplir un troisième pas. Le premier était la quantification des échanges entre onde électromagnétique et matière (PLANCK en 1900), le second la quantification de l'énergie de l'onde (EINSTEIN en 1905) et le dernier la quantification des niveaux énergétiques de la matière (BOHR en 1913).

#### 4.c Quantification du moment cinétique.

En même temps que la découverte de la quantification des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, Niels BOHR a proposé, non pas une explication, mais une propriété des orbites stables que nous allons établir ici.

Soit donc pour l'électron de l'hydrogène monoatomique, une orbite circulaire autour du noyau de rayon  $r$  et parcourue à la vitesse  $v$ . La loi fondamentale de la dynamique avec une force de COULOMB entre le noyau de charge  $e$  et l'électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  est en projection sur la normale (accélération centripète égale à  $\frac{v^2}{r}$ ) donne pour toute trajectoire, stable ou non :

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

d'où l'on tire :

$$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

dont le premier membre est le double de l'énergie cinétique  $E_c$  et le second l'opposé de l'énergie potentielle d'attraction coulombienne  $E_p$  ; on en déduit deux expressions possibles

de l'énergie totale, l'une en fonction de  $v$ , l'autre en fonction de  $r$  car  $2E_c = -E_p$  entraîne que :

$$E_t = E_c + E_p = -E_c = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} m v^2 = -\frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0 r}$$

La quantification des énergies doit vérifier  $\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = A \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$ , ce qui donne des énergies en  $E_n = -\frac{A}{n^2} + Cte$  à une constante additive près ; or il est raisonnable de penser que la plus grande valeur de  $E_n$  soit  $E_\infty$  correspond à la plus grande valeur de l'énergie classique, obtenue pour un rayon infini. Ce maximum classique est nul, la constante additive introduite ci-dessus aussi et, pour obtenir le rayon  $r_n$  et la vitesse  $v_n$  correspondant à  $E_n = -\frac{A}{n^2}$ , l'on identifie les deux approches avec  $A = h c R_H$  (cf supra) :

$$-\frac{h c R_H}{n^2} = -\frac{1}{2} m v_n^2 = -\frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0 r_n}$$

d'où l'on tire :

$$v_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2 h c R_H}{m}} \quad \text{et} \quad r_n = n^2 \frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0 h c R_H}$$

Niels BOHR s'est intéressé ensuite au moment cinétique noté ici  $\vec{L}$  (on a déjà utilisé  $\sigma$  pour le nombre d'onde) de l'électron par rapport au noyau, sans doute parce que c'est une constante classique d'un mouvement à force centrale. On a donc en module (en norme) :

$$L_n = r_n m v_n = n \frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0} \sqrt{\frac{2 m}{h c R_H}}$$

Comment Niels BOHR a-t-il reconnu dans  $L_1$  la constante de PLANCK réduite, c'est-à-dire  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , l'histoire ne le dit pas. Il connaissait les valeurs numériques de  $e$ ,  $m$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $c$ ,  $h$  et  $R_H$  ; il a donc pu calculer  $L_1$  puis a dû chercher à relier ce résultat à quelque chose de simple.

La règle de quantification qu'il a proposée est donc particulièrement simple et par conséquent particulièrement séduisante :

$$L_n = n \hbar$$

Par identification des deux expressions de  $L_1$ , en exprimant  $h$  en fonction de  $\hbar$  on a successivement :

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar c R_H}} &= \hbar \\ \frac{e^4}{64 \pi^2 \varepsilon_0^2} \frac{m}{\pi \hbar c R_H} &= \hbar^2 \\ R_H &= \frac{m e^4}{64 \pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3 c} \end{aligned}$$

ce qui permet le calcul de la constante de RYDBERG en fonction des constantes fondamentales de la physique. Le résultat obtenu est en très bon accord avec le résultat expérimental, ce qui valide l'intuition de BOHR.

## 5 Et le photon devient une particule.

### 5.a Le photon comme particule relativiste.

Dans deux articles en 1909 et 1916, Albert EINSTEIN montre, à partir du rayonnement du corps noir, que les quanta électromagnétiques doivent posséder aussi une quantité de mouvement, ce qui leur confère de facto le statut de particule. Avec le recul, il est plus pertinent de partir des propriétés relativistes d'une masse ponctuelle (voir le chapitre B-VII sur la dynamique relativiste). Une masse ponctuelle  $m$  animée d'une vitesse de module (de norme)  $v$  a, en mécanique relativiste, une quantité de mouvement de module  $p$  et une énergie  $E$  telles que :

$$p = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et l'on vérifie aisément que ces deux grandeurs sont liées par la relation :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Dans le cas d'un quantum se déplaçant à la vitesse de la lumière  $c$ , l'expression de l'énergie  $E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  lui donne une valeur infinie, sauf si  $m$  est nulle ; or l'énergie d'un quantum est finie et égale à  $h f$  ou  $h \nu$  selon la notation choisie pour la fréquence, donc sa masse est forcément nulle.

L'autre formule donnant la quantité de mouvement,  $p = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , conduit alors à une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ . On partira donc de  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  qui donne, puisque  $m$  est nulle :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Ne restait plus qu'à concevoir une vérification expérimentale.

### 5.b L'effet Compton.

A partir de 1916, Arthur COMPTON étudie le comportement des rayons X traversant un cristal pour tester une théorie sur le magnétisme de la matière, qui se révélera fausse, et constate incidemment que les rayons qui ressortent n'ont pas exactement les mêmes propriétés que les rayons incidents. Intrigué, il teste diverses explications, finit par utiliser

un spectromètre de BRAGG, à savoir un cristal utilisé comme réseau de diffraction en trois dimensions qui permet une mesure précise des longueurs d'onde des rayons X, ce qui lui permet de chiffrer la différence de longueur d'onde entre les rayons X incidents et les rayons X émergents.

Dans un premier temps, il pense que les rayons X sont absorbés puis réémis par des charges en mouvement et que la variation de longueur d'onde est due à un effet DOPPLER. En 1922, il comprend enfin la vérité et l'article explicatif paraît en 1923 qui fait office de date officielle de la découverte de l'effet qui porte désormais son nom.

Cet effet s'explique par le choc traité de façon relativiste (voir chapitre B-XI sur les chocs) entre un électron et un quantum d'énergie considéré comme une particule (cf supra). Après le choc, l'énergie du quantum change, donc sa fréquence aussi, c'est cela l'effet COMPTON. L'énergie d'un quantum dans le cas de rayons X est beaucoup plus grande que l'énergie de liaison de l'électron ce qui permet de l'assimiler, en bonne approximation, avec un électron libre au repos. On peut raisonner directement dans le référentiel du laboratoire ; étudions le choc décrit par la figure 3 p.16.

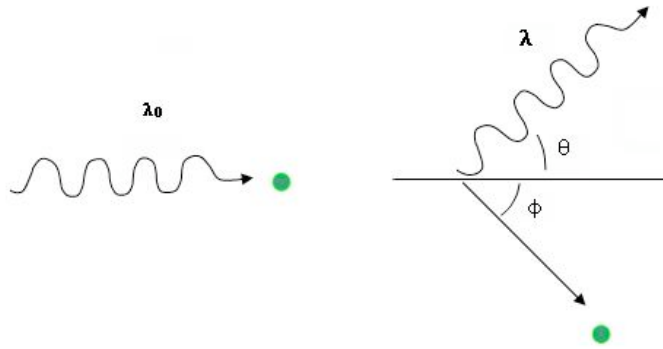


FIGURE 3 – Effet Compton.

Avant le choc, un quantum de fréquence  $\nu_0$  et de longueur d'onde  $\lambda_0$  se dirige vers un électron au repos ; après le choc, le photon repart dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec sa direction initiale, sa fréquence est devenue  $\nu$  et sa longueur d'onde  $\lambda$  tandis que l'électron est éjecté dans une autre direction. Notons  $\vec{u}_0$  et  $\vec{u}$  les vecteurs unitaires des directions du photon,  $m$ , la masse de l'électron,  $E$  et  $\vec{p}$  son énergie et sa quantité de mouvement après le choc.

La conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie se traduisent par :

$$\frac{h\nu_0}{c} \vec{u}_0 + \vec{0} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} + \vec{p}$$

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + E$$

en évitant le piège classique : en mécanique relativiste, un corps au repos n'a pas une énergie nulle mais l'énergie de repos  $mc^2$ .



Que peut-on en déduire ? Le plus intéressant n'est pas ici le sort tragique de l'électron mais le changement de fréquence du photon. On va donc éliminer  $E$  et  $p$  en les isolant et en se servant de la relation  $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$ . En fait, on parle en apparence des deux conservations de l'énergie et de la quantité de mouvement, mais on utilise tacitement l'unique conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total et l'on se débarrasse de l'électron après le choc grâce à la pseudo-norme de son quadrivecteur énergie-impulsion. On réécrit se qui précède ainsi :

$$\vec{p} c = h (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})$$

$$E = h (\nu_0 - \nu) + m c^2$$

puis on mène<sup>14</sup> l'élimination :

$$\begin{aligned} m^2 c^4 &= E^2 - \vec{p}^2 c^2 = [h (\nu_0 - \nu) + m c^2]^2 - h^2 (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})^2 \\ m^2 c^4 &= h^2 (\nu_0 - \nu)^2 + 2 h (\nu_0 - \nu) m c^2 + m^2 c^4 - h^2 (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})^2 \\ 0 &= h^2 (\nu_0 - \nu)^2 + 2 h (\nu_0 - \nu) m c^2 - h^2 (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})^2 \\ 0 &= h^2 (\nu_0^2 - 2 \nu_0 \nu + \nu^2) + 2 h (\nu_0 - \nu) m c^2 - h^2 (\nu_0^2 - 2 \nu_0 \nu \vec{u}_0 \cdot \vec{u} + \nu^2) \\ 0 &= h^2 (\nu_0^2 - 2 \nu_0 \nu + \nu^2) + 2 h (\nu_0 - \nu) m c^2 - h^2 (\nu_0^2 - 2 \nu_0 \nu \cos \theta + \nu^2) \\ 0 &= h^2 (-2 \nu_0 \nu) + 2 h (\nu_0 - \nu) m c^2 - h^2 (-2 \nu_0 \nu \cos \theta) \\ 2 h^2 \nu_0 \nu (1 - \cos \theta) &= 2 h (\nu_0 - \nu) m c^2 \\ \frac{h}{m c^2} (1 - \cos \theta) \nu_0 \nu &= \nu_0 - \nu \end{aligned}$$

Le résultat est alors plus lisible en faisant apparaître les longueurs d'onde :

$$\begin{aligned} \frac{h}{m c^2} (1 - \cos \theta) &= \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0 \nu} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda_0}{c} \\ \lambda - \lambda_0 &= \frac{h}{m c} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

La quantité  $\frac{h}{m c}$ , homogène à une longueur est notée  $\lambda_C$  et appelée longueur d'onde COMPTON. Avec  $m = 0,91 \cdot 10^{-30}$  kg,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup> et  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J · s, on arrive à  $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12}$  m. Pour que l'effet soit mesurable, il faut que  $\lambda_0$  ne soit pas trop grand devant  $\lambda_C$ , c'est pourquoi on utilise des rayons X « durs ».

C'est l'explication de cet effet COMPTON qui confère explicitement le statut de particule au quantum d'énergie électromagnétique. Le nom de photon lui sera donné plus tard, en 1926 par le chimiste Gilbert LEWIS<sup>15</sup>.

14. très tranquillement

15. On prononce quelque chose comme « Louise » avec un accent tonique et un allongement sur le « ou ».

## 6 Démythification de la dualité onde-corpuscule.

### 6.a Rappel sur les trains ou paquets d'onde.

Il est fréquent de voir présenté le double aspect ondulatoire et corpusculaire comme une antinomie entre deux visions inconciliables, un mystère insondable, un oxymore, une aporie ou que sais-je encore ? Pourtant tout physicien bien constitué sait ce qu'est une vitesse de groupe et maîtrise la nécessité de cohérence pour obtenir des interférences ; il est donc rompu à manipuler le concept de *train d'onde* (ou *paquet d'onde*) et a donc parfaitement compris le caractère parfaitement naturel de cette dualité. La suite de mon propos est donc en fait parfaitement inutile, mais vous commencez à me connaître, j'aime expliquer les choses.

Soyons toutefois raisonnables : une description simple et conforme à l'équation de d'ALEMBERT d'un paquet d'onde à trois dimensions, qui soit à la fois d'extension spatiale limitée et d'allure propagative, n'est pas très facile à exhiber et la complexité des calculs masquerait le point essentiel ; nous raisonnerons donc avec un modèle uni-dimensionnel.

Un phénomène propagatif est décrit par une fonction  $F(t^*)$  avec  $t^* = t - \frac{x}{c}$  ; c'est un train ou paquet d'onde si l'on a, avec un choix astucieux des origines du temps et de l'espace :

$$F(t^*) = f(t^*) \exp(i\omega_0 t^*)$$

où  $\omega_0$  est qualifié abusivement de fréquence du train d'onde et où  $f(t^*)$  est une fonction nulle partout sauf dans un intervalle restreint  $[\tau_1, \tau_2]$  où elle est bornée, mais pas trop restreint de sorte que  $(\tau_2 - \tau_1)$  soit assez grand devant la période de la fonction sinusoïdale.

En trois dimensions pour une onde électromagnétique, le champ magnétique est lié et proportionnel<sup>16</sup> au champ électrique et les densités volumiques d'énergie et de quantité de mouvement sont respectivement  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$  (très classiquement) et  $\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$  (moins connu, voir la fin du chapitre C-VIII sur les équations de MAXWELL). Dans un contexte uni-directionnel, on adapte en disant que ces densités volumiques sont quadratiques, c'est-à-dire proportionnelles au carré de  $F(t^*)$ . L'énergie totale ou la quantité de mouvement totale est donc proportionnelle, dans cette transcription, à l'intégrale :

$$I = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f^2 \left( t - \frac{x}{c} \right) \cos^2 \left[ \omega_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] dx$$

dont il est aisé de montrer qu'elle est bornée, en gros ainsi grâce aux propriétés de la

---

16. rigoureusement pour une onde sinusoïdale, en très bonne approximation pour un train d'onde.

fonction  $f$  :

$$I = \int_{c(t-\tau_2)}^{c(t-\tau_1)} f^2 \left( t - \frac{x}{c} \right) \cos^2 \left[ \omega_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] dx < \dots$$

$$\dots < \int_{c(t-\tau_2)}^{c(t-\tau_1)} f^2 \left( t - \frac{x}{c} \right) < \int_{c(t-\tau_2)}^{c(t-\tau_1)} f_{max}^2 = f_{max}^2 c (\tau_2 - \tau_1)$$

Il n'y a donc aucun mystère à ce qu'un train d'onde éminemment ondulatoire soit vu comme une particule qui transporte une énergie et une quantité de mouvement dans une extension spatiale limitée. Le mystère quantique, c'est la quantification, pas la dualité onde-corpuscule.

## 6.b Démythification des relations d'incertitude d'Heisenberg.

Approfondissons un peu plus en choisissant un train d'onde unidirectionnel (noté comme ci-dessus  $F(t^*) = f(t^*) \exp(i \omega_0 t^*)$  avec  $t^* = t - \frac{x}{c}$ ) particulièrement simple en choisissant  $f(t^*) = 1$  si  $|t^*| \leq T$  et  $f(t^*) = 0$  si  $|t^*| > T$ . Ce n'est sans doute pas très réaliste, mais l'objectif ici n'est pas le réalisme mais la démythification annoncée ; avec ce choix, elle ne sera pas masquée par l'aridité des calculs.

### • Approche temps-énergie.

Plaçons-nous à une abscisse quelconque  $x_0$  et étudions la valeur de  $F \left( t - \frac{x_0}{c} \right)$ . C'est une fonction sinusoïdale entre  $-T + \frac{x_0}{c}$  et  $T + \frac{x_0}{c}$  et c'est nul en dehors. En ce point, on « voit » donc quelque chose à l'instant  $\frac{x_0}{c}$  à plus ou moins  $T$  près ;  $T$  fait donc office d'incertitude  $\Delta t$  sur l'instant de passage du train d'onde en  $x_0$ .

Une sinusoïde tronquée dans le temps n'est pas une sinusoïde, on peut donc la décomposer en vraies sinusoïdes par la transformation de FOURIER (c'est en ce sens qu'un train d'onde, terme qui décrit la limitation dans le temps, devient un paquet d'onde, terme qui décrit la sommation d'ondes). On a, en notation de physicien<sup>17</sup> :

$$F \left( t - \frac{x_0}{c} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i \omega t) d\omega$$

avec  $\tilde{F}$  qui sert d'amplitude complexe à la composante de pulsation  $\omega$  et que l'on calcule par :

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F \left( t - \frac{x_0}{c} \right) \exp(-i \omega t) dt$$

---

17. Le mathématicien place, par symétrie,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  devant les deux intégrales.

Le changement de variable  $\tau = t - \frac{x_0}{c}$  conduit à :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-i \frac{\omega x_0}{c}\right) \int_{-T}^T \exp[i(\omega_0 - \omega)\tau] d\tau = \dots \\ \dots &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-i \frac{\omega x_0}{c}\right) \frac{2i \sin[(\omega_0 - \omega)T]}{i(\omega_0 - \omega)} = \frac{T}{\pi} \exp\left(-i \frac{\omega x_0}{c}\right) \text{snc}[(\omega_0 - \omega)T]\end{aligned}$$

où l'on note  $\text{snc } \xi = \frac{\sin \xi}{\xi}$  (fonction sinus-cardinal).

En grandeurs quadratiques, on a donc :

$$|\tilde{F}(\omega)|^2 = \frac{T^2}{\pi^2} \text{snc}^2[(\omega_0 - \omega)T]$$

et la propriété classique du carré d'un sinus cardinal (voir interférences et diffraction entre autres) permet d'affirmer qu'il est négligeable en dehors de l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  pour son argument (voir graphe de  $\text{snc}^2 \xi$  en figure 4 p. 20). Donc dans sa décomposition en sinusoides, seules les pulsations telles que  $-\pi < (\omega_0 - \omega)T < \pi$  sont à prendre en compte ; on peut dire que la pulsation  $\omega$  est égale à  $\omega_0$  à plus ou moins  $\frac{\pi}{T}$  près et la fréquence  $f$  égale à  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  à plus ou moins  $\frac{1}{2T}$  près et l'énergie  $E = hf$  du quantum à  $h \frac{\omega_0}{2\pi}$  plus ou moins  $\frac{h}{2T}$  près ;  $\frac{h}{2T}$  fait donc office d'incertitude  $\Delta E$  sur l'énergie.

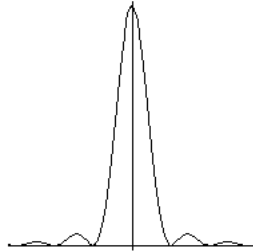


FIGURE 4 – Fonction sinus-cardinal.

Résumons  $\Delta t = T$  et  $\Delta E = \frac{h}{2T}$ , d'où la relation d'incertitude temps-énergie :

$$\Delta t \cdot \Delta E = \frac{h}{2}$$

Mieux on connaît l'instant de passage du quantum, moins on connaît son énergie et vice-versa.

Remarque : la mécanique quantique ne définit pas tout à fait de la même façon  $\Delta t$  et  $\Delta E$  et trouve  $\hbar$  au lieu de  $\frac{h}{2}$  ce qui n'est qu'une question de définition.

• **Approche position-quantité de mouvement.**

Plaçons-nous maintenant à un instant quelconque  $t_0$  et étudions la valeur de  $F\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$ . C'est une fonction sinusoïdale de  $x$  entre  $-cT + ct_0$  et  $cT + ct_0$  et c'est nul en dehors. A cet instant, on « voit » donc quelque chose à l'abscisse  $ct_0$  à plus ou moins  $cT$  près ;  $cT$  fait donc office d'incertitude  $\Delta x$  sur la position du train d'onde à  $t_0$ .

On adaptera la transformation de FOURIER en

$$F\left(t_0 - \frac{x}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k) \exp(ikx) dk$$

avec :

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(t_0 - \frac{x}{c}\right) \exp(-ikx) dx$$

On mène ensuite les calculs de la même façon et l'on trouve que  $k$  est égal à  $\frac{\omega_0}{c}$  avec une incertitude sur  $k$  égale à  $\frac{\pi}{cT}$  qui se reporte en une incertitude  $\Delta p = \frac{h}{2cT}$  sur la quantité de mouvement du quantum  $p = \frac{hf}{c}$  et cette fois, on en tire :

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{2}$$

Mieux on connaît la position du quantum, moins on connaît sa quantité de mouvement et vice-versa.

• **Conclusion.**

Les relations d'incertitude d'HEISENBERG ne sont que des propriétés tout à fait classiques des trains d'onde et sont parfaitement connues, sous une autre forme<sup>18</sup>, en optique physique : plus la source lumineuse a des trains d'onde longs, plus elle est monochromatique (et plus on peut s'éloigner de l'endroit de la différence de marche nulle avant d'entrer dans le blanc d'ordre supérieur, voir chapitre D-XI).

---

18. Difficile de dire ici « dans une autre optique », mais c'est ce que je veux dire !