

## Chapitre E-II

# Pression. Echanges énergétiques.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## RÉSUMÉ :

*Ce chapitre vise à analyser très en détail l'essence des forces de pression et de leur puissance.*

*La pression, au niveau des parois d'un récipient qui contient, s'explique par les forces de Van der Waals et par l'effet des chocs des molécules. Au sein du fluide même, la définition de la pression fait intervenir des termes d'échange entre un volume de contrôle et l'extérieur.*

*La puissance est une grandeur quadratique, non linéaire donc, et son approche macroscopique fait intervenir des moyennes qui sont des opérations linéaires. Cette contradiction entraîne des distorsions entre la puissance effective et la puissance macroscopique. Cette dernière est la puissance mécanique et l'écart entre les deux la puissance thermique. On en détaillera les aspects au niveau des parois et au sein du fluide.*

# Table des matières

<b>E-II Pression. Echanges énergétiques.</b>	<b>1</b>
1 Forces de pression . . . . .	4
1.a Nature des forces surfaciques. . . . .	4
1.b Pression exercée par un gaz sur la paroi du récipient. . . . .	6
1.c Forces de pression au sein d'un fluide. . . . .	11
1.d Isotropie de la pression. . . . .	15
1.e Notion élémentaire de statique des fluides. . . . .	17
2 Echanges énergétiques. . . . .	18
2.a Travail fourni à un fluide par une paroi mobile. . . . .	18
2.b Travail et chaleur. . . . .	21
2.c Echanges énergétiques au sein d'un fluide. . . . .	22
2.d En guise de conclusion. . . . .	24

# 1 Forces de pression

## 1.a Nature des forces surfaciques.

- Solides et fluides.

Commençons par évoquer le cas des solides qui se comportent de façon différente des fluides, étudiés ici.

Imaginons la surface d'un solide. Les forces diverses qui s'exercent à ce niveau sur le solide peuvent provoquer, outre sa mise en mouvement ou la modification de son mouvement, des déformations, réversibles si les forces ne sont pas trop fortes, partiellement irréversibles sinon. Le lien entre déformations et forces exercées relève de la théorie de l'élasticité. Un point important à noter est que pour certaines déformations (flexion, torsion), les forces exercées ne sont pas normales (ou orthogonales) à la surface et il est d'usage de les appeler *contraintes*. Ce sera l'objet du chapitre B-X en mécanique.

- Nature des forces.

Imaginons maintenant la surface intérieure du récipient qui contient un fluide, liquide ou gaz. L'interaction entre fluide et paroi génère des forces que l'on se propose d'étudier ici. Quel type de force d'interaction peut exister entre un fluide et le récipient, donc entre un atome ou une molécule du fluide et un atome du récipient ?

Peut-il s'agir d'une force à longue portée ? La gravitation est hors jeu car les forces gravitationnelles ne sont appréciables que si un corps a une masse considérable. Une application numérique classique consiste à comparer la force gravitationnelle et la force électrostatique entre deux protons, ce qui se rapproche le plus simplement du cas de deux atomes. Voyons cela : avec une masse  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg et une charge  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C et des constantes de gravitation  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  unité SI et électrostatique  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9$  unités SI, l'on a

$$F_{\text{grav.}} = G \frac{m_p^2}{r^2} \quad \text{et} \quad F_{\text{élec.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$\frac{F_{\text{grav.}}}{F_{\text{élec.}}} = \frac{G m_p^2}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2} = 0,81 \cdot 10^{-37}$$

La simple lecture du résultat rend superflu tout commentaire.

Peut-il s'agir de forces électrostatiques, elles aussi à longue portée ? La réponse est négative car bien que la matière soit formée de particules chargées, elle s'organise en entités neutres ou en entités certes chargées mais s'organisant entre elles de façon que la matière soit globalement neutre sur un volume dont la taille dépasse à peine la distance interatomique. Néanmoins, à courte distance, le bilan des forces entre deux groupes d'atomes électriquement neutres n'est pas tout à fait nul ; c'est ce bilan qui est connu sous le nom de

forces de VAN DER WAALS. On sait (voir chapitre E-VI) que ce sont des forces attractives qui dépendent de la distance  $r$  en  $1/r^7$ , comprenons bien qu'en s'éloignant d'un facteur dix, la force diminue d'un facteur dix millions et devient dès lors négligeable. Pour qu'une molécule du fluide exerce une force de VAN DER WAALS non négligeable sur un atome du récipient, il faut qu'ils soient tous deux très proches de la surface.

Un autre type de force, violente cette fois et de nature quantique, répulsive, est celle qui s'exerce lors du choc d'une molécule du fluide avec la paroi; là encore, il s'agit, par essence, d'une force *surfactive*. Et ceci justifie l'objet de ce chapitre.

- **Pression et viscosité.**

Plaçons-nous dans le cas d'un fluide au repos. Prenons par la pensée un élément d'aire  $dS$  de la surface interne du récipient dont la taille soit petite à notre échelle et assez grande à l'échelle atomique, par exemple de l'ordre du micromètre. Les seules molécules de fluide dont il faille tenir compte pour évaluer la force de VAN DER WAALS exercée sur cet élément de surface sont celles qui en sont éloignés de moins du rayon d'action de ces forces (quelques dixièmes de nanomètres). Leur nombre, leurs positions, leurs vitesses est rapidement fluctuante à cause de l'agitation thermique. Comme celle-ci est régie par des lois statistiques, la moyenne temporelle a une symétrie de révolution autour de la normale à la surface ce qui assure que la force d'interaction est orthogonale à la surface. Il en est de même pour les forces exercées au cours des chocs dont les responsables sont les mêmes molécules soumis à la même agitation thermique aléatoire donc isotrope. Dans ce cas d'orthogonalité à la surface que l'on parle de *forces de pression* ou *forces pressantes*.

Par contre, si la fluide est animé par rapport à la paroi d'une vitesse macroscopique, c'est-à-dire que la moyenne des vitesses des molécules dont on vient de parler n'est plus nulle, alors la symétrie de révolution évoquée n'existe plus et l'on ne peut plus affirmer que les forces sont normales à la surface. Leurs composantes normales sont toujours appelées force pressantes et leurs composantes tangentielles *forces de viscosité*. Ces dernières<sup>1</sup> ne sont appréciables que dans le cas de gradients de vitesse importants ou d'un fluide assez visqueux; dans ce chapitre nous nous placerons dans le cas fréquent où elles sont négligeables.

- **Comparaison des deux composantes de la pression.**

Peut-on comparer les ordres de grandeur des forces de VAN DER WAALS et celles des forces au cours des chocs? On a vu plus haut que pour une surface d'aire  $dS$ , les seules molécules de fluide dont il faille tenir compte, pour les forces de VAN DER WAALS, en sont éloignés de moins du rayon d'action de ces forces (quelques dixièmes de nanomètres). Et pour les chocs? Il faut se souvenir que l'agitation thermique donne à chaque molécule une trajectoire constituée, entre deux chocs intermoléculaires, de segments parcourus à très

---

1. Elles seront étudiées en mécanique aux chapitres B-XIII et B-XIV.

grande vitesse (de l'ordre du kilomètre par seconde<sup>2</sup> à température ambiante), de longueur de l'ordre de grandeur du *libre parcours moyen* et dans toutes les directions; elle forme donc une espèce de pelote de fil, mais globalement, dans un fluide au repos, la molécule reste sur place à de lents mouvements près. C'est dire que seules les molécules dont la distance à la paroi est égale, à peu près, à ce libre parcours moyen sont susceptibles de heurter la paroi.

Dans le cas d'un liquide, où les molécules sont « à touche-touche », on conçoit bien que le libre parcours moyen est un peu inférieur à la distance intermoléculaire (disons 0,2 nm), à peu près comme le rayon d'action des forces de VAN DER WAALS et les nombres de molécules responsables des deux effets, l'un attractif, l'autre répulsif, sont du même ordre de grandeur. Il arrive parfois, mais peu fréquemment, que l'effet global soit attractif, ce qui se traduit par une pression négative sur les parois; ce fait qui permet d'affirmer que la pression dans le cas d'un fluide est la différence entre deux termes du même ordre de grandeur.

Pour un gaz, en s'appuyant sur le modèle des sphères dures (voir chapitre B-XIII) qui donne un libre parcours moyen inversement proportionnel à la densité particulière (nombre de molécules par unité de volume), aux conditions habituelles de température et de pression, il est mille<sup>3</sup> fois plus long. Il y a donc mille fois plus de molécules heurtant la paroi que de molécules l'attirant et l'on peut négliger ces dernières. Les forces de VAN DER WAALS pour un gaz n'interviennent donc que dans des termes correctifs au modèle du gaz parfait.

## 1.b Pression exercée par un gaz sur la paroi du récipient.

### • Lien avec les vitesses des molécules avant et après le choc.

Considérons un élément de surface interne de la paroi, dont la taille soit petite à notre échelle, suffisamment pour qu'on puisse le considérer comme plan, et assez grande à l'échelle atomique, d'aire  $dS$ , de point milieu  $O$ , de normale  $Oz$ , orientée du fluide vers la paroi. Plaçons nous dans le cas d'un gaz, ce qui permet de ne s'intéresser qu'aux chocs subis par la paroi, à des termes correctifs près. Etudions cet élément de surface pendant un intervalle de temps de durée  $dt$ .

Soit une molécule de masse  $\mu$ , indicée par la lettre  $i$  qui heurte l'élément de paroi en un point  $M_i$  pendant l'intervalle de temps considéré. A l'instant initial  $t$ , avant le choc donc, elle a une vitesse  $\vec{v}'_i$  dirigée vers la paroi, de module (ou de norme si vous préférez)  $v'_i$  et faisant avec  $Oz$  l'angle  $\theta'_i$  inférieur à  $\pi/2$ . A l'instant final  $t + dt$ , après le choc<sup>4</sup> donc,

---

2. Voir le chapitre E-VI sur le modèle du gaz parfait

3. Se souvenir qu'une mole d'eau gazeuse occupe aux conditions normales 22,4 litres comme tous les gaz et qu'à l'état liquide, comme sa masse molaire est de 18 grammes par mole, elle occupe 18 millilitres donc à peu près mille fois moins, puisque le litre d'eau pèse un kilogramme.

4. Le chapitre B-XI sur les chocs montre qu'après un choc, la vitesse peut prendre toutes sortes de valeurs et n'est donc pas prévisible.

elle a une vitesse  $\vec{v}''_i$  dirigée vers le gaz, de module  $v''_i$  et faisant avec  $Oz$  l'angle noté  $\theta''_i$  supérieur à  $\pi/2$ . Ceci est illustré par la figure 1 p.7, où l'on a fait figurer, pour plus de lisibilité, non pas  $\theta''_i$  mais  $\pi - \theta''_i$ .

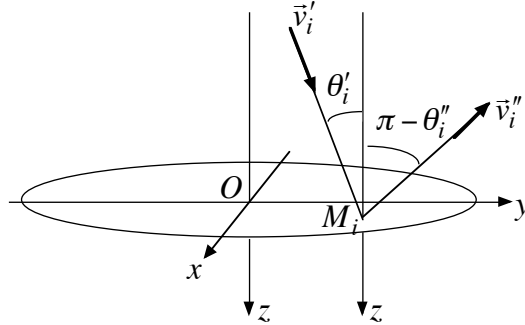


FIGURE 1 – Choc molécule-paroi.

La force  $\vec{f}_i$  exercée par la paroi sur la molécule, dépendant du temps, en fait nulle sauf pendant un bref instant (le choc) où elle est colossale, vérifie, par intégration de la loi de la dynamique :

$$\int_t^{t+dt} \vec{f}_i(\tau) d\tau = \mu \vec{v}''_i - \mu \vec{v}'_i$$

La force totale exercée par l'élément de paroi sur toutes les molécules qui le heurtent pendant l'intervalle de temps considéré s'obtient par sommation sur celles-ci ; elle est opposée, par action et réaction, à la force  $\vec{F}$  exercée par le gaz sur l'élément de paroi d'où :

$$\int_t^{t+dt} \vec{F}(\tau) d\tau = \sum_i (\mu \vec{v}'_i - \mu \vec{v}''_i)$$

Sauf cas extrêmes, la somme porte sur un si grand nombre de chocs que les fluctuations statistiques de la force  $\vec{F}$  sont négligeables et qu'on peut la considérer comme constante d'où :

$$\vec{F} dt = \sum_i (\mu \vec{v}'_i - \mu \vec{v}''_i)$$

Enfin, on a vu que la symétrie conduit à une force normale à la surface, donc la seule composante non nulle de  $\vec{F}$  est, par projection sur  $Oz$  :

$$F_z dt = \sum_i (\mu v'_i \cos \theta'_i - \mu v''_i \cos \theta''_i)$$

• **Proportion du nombre de molécules par direction et module de la vitesse.**

Considérons parmi les molécules celles pour lesquelles le module  $v'_i$  ou  $v''_i$  de la vitesse est compris entre  $v$  et  $v + dv$ , l'angle  $\theta'_i$  ou  $\theta''_i$  qu'elle fait avec  $Oz$  est compris entre  $\theta$  et

$\theta + d\theta$  et l'angle que le plan défini par la vitesse et  $M_i z$  fait avec  $Ox$  est compris entre  $\varphi$  et  $\varphi + d\varphi$ .

D'abord calculons la proportion de molécules qui a ces caractéristiques. Vis à vis de la direction, par isotropie, la proportion est fonction linéaire de l'angle solide<sup>5</sup> défini par ce qui précède, soit fonction linéaire de  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  et puisque l'angle solide sous lequel est vu tout l'espace est  $4\pi$ , la proportion est :

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

Vis à vis du module, la proportion de molécules entre  $v$  et  $v + dv$  est a priori inconnue mais proportionnelle à  $dv$ , car si l'on divise l'intervalle en  $[v, v + dv/2]$  et  $[v + dv/2, v + dv]$  et si  $dv$  est assez petit, la moitié des molécules se trouve dans chaque intervalle. On note<sup>6</sup> donc cette proportion  $\varpi(v) dv$ .

Si  $n$  désigne la densité particulaire totale, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume, alors la densité particulaire des molécules qui ont les caractéristiques choisies de module et direction de vitesse est :

$$\delta n = n \frac{d\Omega}{4\pi} \varpi(v) dv = n \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} \varpi(v) dv = \frac{n}{4\pi} \sin \theta \varpi(v) d\varphi d\theta dv$$

• **Dénombrement des molécules par direction et module de la vitesse.**

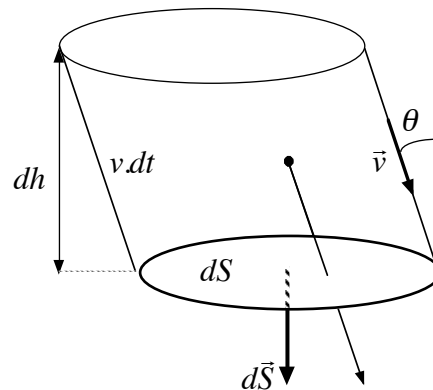


FIGURE 2 – Localisation des molécules concernées.

Parmi les molécules sélectionnées, lesquelles vont heurter l'élément de surface  $dS$  dans l'intervalle  $[t, t + dt]$ ? La question et sa réponse sont récurrentes en physique. Un molécule donnée, de vitesse  $\vec{v}$  parcourt pendant ce temps la distance vectorielle  $\vec{v} dt$ . La molécule heurte  $dS$  si ce vecteur, dessiné au point de départ, coupe  $dS$ ; il faut donc que la position

5. Voir l'annexe du chapitre D-VIII.

6. La lettre  $\varpi$  est un «pi dorique», variante de  $\pi$ .



initiale soit contenue dans un cylindre de base  $dS$  et de génératrices parallèles à  $\vec{v}$  et de longueur  $v dt$ , cylindre dont le volume est le produit de l'aire  $dS$  de sa base par sa hauteur  $dh$  qui vaut  $v dt \cos \theta$ . Si l'on introduit le vecteur surface  $\vec{dS}$ , orthogonal à l'élément de surface, dirigé du fluide vers la paroi et de module (de norme) l'aire  $dS$ , alors le volume est  $dV = dS dh = \vec{v} \cdot \vec{dS} dt$ . Ceci est illustré par la figure 2 p.8.

Remarque : pour les molécules après le choc, on peut faire un raisonnement analogue à ceci près que le volume balayé est  $dV = dS dh = |\vec{v} \cdot \vec{dS}| dt = -\vec{v} \cdot \vec{dS} dt$

Ô mon lecteur préféré, je dis beaucoup de choses et ta vigilance s'émousse. Ne va pas jusqu'à me croire sur parole! Qui te prouve qu'une molécule dans ce volume va effectivement atteindre la paroi? Elle peut très bien en chemin heurter une de ses petites camarades et repartir dans une tout autre direction. Ben oui! Faisons en sorte que cette contrariété soit rare et ne génère que des termes correctifs négligeables; il suffit pour cela de choisir  $dt$  suffisamment petit pour que  $v dt$ , chemin putativement suivi par la molécule, soit négligeable devant son libre parcours moyen (que l'on notera  $\ell$ ) de sorte que l'occurrence d'un choc intermoléculaire intempestif soit rare.

Un autre mensonge par omission, c'est que la molécule n'est pas ponctuelle. En la modélisant par une sphère de rayon  $a$ , pour que la molécule heurte la paroi par sa périphérie, il suffit que son centre soit, à l'instant initial, à une distance inférieure non pas à  $v dt \cos \theta$  mais  $v dt \cos \theta - a$ . Cela dit, la correction est négligeable si  $a$  est négligeable devant  $v dt$ .

Si l'on veut pouvoir faire fi conjointement de ces deux objections, il suffit de choisir  $dt$  de sorte que  $a \ll v dt \ll \ell$ ; encore faut-il que  $a \ll \ell$ . On a vu plus haut que c'est vrai pour un gaz aux conditions habituelles mais complètement faux pour un liquide pour lequel  $a \sim \ell$  (je veux dire qu'ils sont du même ordre de grandeur).

A ces restrictions près, le nombre de molécules sélectionnées traversant  $dS$  pendant  $dt$  est le produit de ce volume par la densité particulière partielle calculée plus haut, donc :

$$\delta N = \delta n dV = \delta n |\vec{v} \cdot \vec{dS}| dt = \frac{n}{4\pi} \sin \theta \varpi(v) d\varphi d\theta dv |\vec{v} \cdot \vec{dS}| dt$$

et leur masse est :

$$\delta m = \delta N \mu = \frac{n\mu}{4\pi} \sin \theta \varpi(v) d\varphi d\theta dv |\vec{v} \cdot \vec{dS}| dt$$

Dans la somme  $\vec{F} dt = \sum_i (\mu \vec{v}'_i - \mu \vec{v}''_i)$ , puisque  $|\vec{v} \cdot \vec{dS}|$  est positif pour les molécules avant le choc et négatif pour les molécules après, la contribution des molécules sélectionnées a la même expression, que ce soit avant ou après le choc :

$$\delta \vec{F} dt = \pm \delta m \vec{v} = \frac{n\mu}{4\pi} \sin \theta \varpi(v) d\varphi d\theta dv \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{dS}) dt$$

dont la projection sur  $Oz$  est :

$$\delta F_z dt = \frac{n\mu}{4\pi} \sin \theta \varpi(v) d\varphi d\theta dv v_z (\vec{v} \cdot \vec{dS}) dt$$

$$\delta F_z dt = \frac{n \mu}{4 \pi} \sin \theta \varpi(v) d\varphi d\theta dv (v \cos \theta) (v dS \cos \theta) dt$$

$$\delta F_z dt = \frac{n \mu}{4 \pi} \sin \theta \cos^2 \theta v^2 \varpi(v) d\varphi d\theta dv dS dt$$

• **Calcul de la pression.**

Il ne reste plus, pour les molécules qui arrivent sur  $dS$  qu'à intégrer de  $\varphi = -\pi$  à  $\varphi = \pi$ , de  $\theta = 0$  à  $\theta = \pi$  (de  $0$  à  $\pi/2$  pour les molécules avant le choc et de  $\pi/2$  à  $\pi$  pour celles après) et de  $v = 0$  à  $v = \infty$ . On a donc :

$$F_z dt = \frac{n \mu}{4 \pi} dS dt \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} v^2 \varpi(v) dv$$

La seule intégrale un tout petit peu moins simple est :

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = - \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d \cos \theta = \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

et  $\int_0^{\infty} v^2 \varpi(v) dv$  peut être interprétée comme la moyenne probabiliste de  $v^2$  ; on appelle traditionnellement *vitesse quadratique moyenne* la grandeur  $v^*$  telle que  $v^{*2} = \int_0^{\infty} v^2 \varpi(v) dv$ . Finalement, après simplification par  $dt$ , l'on tire :

$$F_z = \frac{n \mu}{4 \pi} dS (2 \pi) \left( \frac{2}{3} \right) v^{*2} = \frac{1}{3} n \mu v^{*2} dS$$

On a une force proportionnelle à la surface, ce qui permet de définir une pression par  $F_z = p dS$  ; par ailleurs  $E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^{*2}$  est la moyenne probabiliste de l'énergie cinétique de translation d'une molécule (qui ne se confond avec l'énergie cinétique totale que si le gaz est monoatomique) et donc  $U_T = N E_c^*$ , avec  $N$  nombre total de molécules, est l'énergie totale de translation du gaz. Avec  $n = N/V$ , on tire donc, en ne tenant pas compte des différentes sources de termes correctifs évoquées au cours du calcul, donc dans un modèle de gaz parfait :

$$p dS = \frac{1}{3} \frac{N}{V} 2 E_c^* dS$$

$$p V = \frac{2}{3} U_T$$

Première remarque : L'échelle de température du gaz parfait définit la température par  $p V = N k_B T$ , on en déduit aisément que, dans le cadre où ce qui précède est valable on a  $U_T = \frac{3}{2} N k_B T$  et que si le gaz est monoatomique dont les atomes soient assimilables à des points matériels (l'énergie cinétique  $U$  est l'énergie de translation  $U_T$ ) alors  $U = \frac{3}{2} N k_B T$ . Ceci justifie le modèle du gaz parfait où, outre le produit  $p V$ , l'énergie interne ne dépend que de la température.

Seconde remarque : Si l'on reprenait, de façon inutile, les calculs pour  $F_x$  et  $F_y$  en partant de  $v_x = v \sin \theta \cos \varphi$  et  $v_y = v \sin \theta \sin \varphi$ , l'on remplacerait  $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$  respectivement par  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$  avec un résultat nul dans les deux cas (l'intégration sur  $\varphi$ ). Le résultat des calculs est cohérent avec l'isotropie de ses hypothèses (la répartition isotrope des vitesses).

### 1.c Forces de pression au sein d'un fluide.

- **La problématique.**

Après avoir étudié la pression exercée par un fluide sur les parois du récipient qui le contient, cherchons à définir la pression au sein d'un fluide. Suffit-il d'adapter ce qui précède? La suite va prouver qu'il n'en est rien.

Bien sûr, on peut, par la pensée, commencer par isoler une partie  $\Omega$  du fluide par une surface fermée  $\Sigma$  qui la limite et considérer que ce qui est à l'extérieur de  $\Sigma$  sert de récipient à ce qui est à l'intérieur.

En ce qui concerne les forces de VAN DER WAALS, rien de changé. Une molécule de l'extérieur peut exercer une telle force sur une molécule de l'intérieur pourvu qu'elles soient distantes de moins de la portée des ces forces ; on retrouve donc la notion de force surfacique et l'on ne voit rien de conceptuellement changé.

En ce qui concerne les chocs, une question se pose : une molécule de l'extérieur se dirigeant vers  $\Sigma$  va-t-elle y rebondir? Si nous sommes dans un liquide où le libre parcours moyen est inférieur à la distance interatomique, la réponse est généralement positive, néanmoins il faut prévoir que dans certains cas, elle puisse se faufiler à l'intérieur et que le phénomène inverse existe : des molécules intérieures arriveront à se faufiler à l'extérieur. Mais, à peu de chose près, on retrouve ce qui s'est dit plus haut.

Mais s'il s'agit d'un gaz où le libre parcours moyen  $\ell$  est très supérieur à la distance interatomique, rien ne va plus : la majorité de molécules extérieures se dirigeant vers  $\Sigma$  et dont elles ne sont éloignées que d'une distance inférieure à  $\ell$  (au delà duquel elles changeraient de direction... en simplifiant les choses), va non pas rebondir sur la surface  $\Sigma$  mais la traverser et entrer dans  $\Omega$ . Le phénomène inverse aura lieu : la majorité des molécules intérieures, distantes de moins de  $\ell$  de la surface, vont la traverser et sortir de  $\Omega$ .

Comment gérer cette situation? En se rendant compte que l'on retrouve une problématique classique. En effet, à travers  $\Sigma$  des molécules entrent dans  $\Omega$  et d'autres en sortent. La composition de  $\Omega$  n'est donc pas fixe, c'est n'est donc pas un système (on rajoute parfois fermé) mais un *volume de contrôle* ou encore un *système ouvert*<sup>7</sup>.

---

7. expression qui est un oxymore car un système ouvert n'est justement pas un système, fermé par définition!

• **Choix judicieux des volumes de contrôle.**

A problématique classique, réponse classique mais rien n'empêche de réfléchir un peu avant de se lancer dans les automatismes de pensée. Cherchons à choisir au mieux la surface  $\Sigma$  ou plus exactement, la façon dont elle évoluera avec le temps. Rien ne s'oppose à ce qu'elle se déforme, profitons-en.

Il serait raisonnable que la masse contenue dans le volume de contrôle soit constante pour qu'il ressemble ainsi d'un système fermé ; il serait même avisé que le bilan des masses y entrant et en sortant soit nul non seulement de façon globale mais à travers chaque surface élémentaire, comme c'est le cas pour un système fermé où, cet échange à travers la paroi n'existant pas, le bilan est partout nul.

Remarque : en mécanique des fluides (chapitre B-XIII), dans le cas d'un petit volume de contrôle, on définira de cette façon une *quasi-particule*.

Le raisonnement du paragraphe 1.b, repris ici en convention algébrique, celui qui est illustré par la figure 2 p.8 montre que pour une vitesse  $\vec{v}$  particulière donnée, les molécules qui traversent  $dS$  pendant  $dt$  sont dans un volume  $dS \cos \theta v dt$  et si l'on appelle  $\delta n$  la densité particulière pour cette vitesse leur nombre est  $\delta n dS \cos \theta v dt$  et leur masse  $\mu \delta n dS \cos \theta v dt$  que l'on peut réécrire  $\delta m = \mu \delta n \vec{v} \cdot \vec{dS} dt$  qui donne automatiquement un résultat algébrique, positif dans le sens de la sortie, négatif dans le sens de l'entrée. Le bilan global s'obtient, comme précédemment par intégration sur les angles de la direction et sur le module de la vitesse, quelque chose comme :

$$\delta m = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt \quad \text{avec} \quad \vec{j} = \iiint \mu \delta n \vec{v}$$

où il est inutile pour la compréhension de ce qui suit de reporter l'expression complexe de  $\delta n$  et tout aussi inutile de mener à bien l'intégration. Si l'on a des souvenirs de mécanique des fluides, on reconnaîtra dans  $\vec{j}$  un vecteur densité de courant.

Si l'on repense à la démonstration, on s'aperçoit aisément que  $\vec{v}$  désigne non la vitesse de la molécule dans le référentiel du laboratoire (nous nommerons celle-ci  $\vec{V}$ ) mais sa vitesse relative par rapport à la paroi, dont nous appellerons  $\vec{V}_p$  la vitesse par rapport au laboratoire, donc on a  $\vec{v} = \vec{V} - \vec{V}_p$ . Si nous reportons cette formule dans l'expression de  $\vec{j}$ , on en déduit, puisque  $\vec{V}_p$  est une constante vis-à-vis de l'intégration sur les molécules :

$$\vec{j} = \iiint \mu \delta n (\vec{V} - \vec{V}_p) = \iiint \mu \delta n \vec{V} - \iiint \mu \delta n \vec{V}_p = \iiint \mu \delta n \vec{V} - \vec{V}_p \iiint \mu \delta n$$

Si l'on choisit, au niveau de chaque  $dS$ ,  $\vec{V}_p = \frac{\iiint \mu \delta n \vec{V}}{\iiint \mu \delta n}$ , alors  $\vec{j}$  est partout nul et le bilan de masse localement équilibré ( $\delta m = 0$ ) ; c'est ce que nous voulions et c'est donc possible de faire ce choix.

Il y a néanmoins des échanges de masse : au voisinage de la paroi, chaque molécule a une trajectoire qui ressemble à une pelote de fil (voir plus haut) de rayon le libre parcours moyen  $\ell$ , partiellement à l'intérieur, partiellement à l'extérieur, d'où de nombreuses traversées de la paroi.

• **Pression cinétique.**

Nous pouvons désormais nous lancer sereinement dans la gestion du système ouvert. Puisque l'on s'intéresse aux forces, effectuons un bilan de quantité de mouvement, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , pour le système  $\mathcal{S}$  défini comme le contenu, à l'instant initial  $t$  du volume de contrôle  $\mathcal{V}$  limité par  $\Sigma$ . A cet instant, la quantité du mouvement et celle du système se confondent, donc :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}}(t) = \vec{p}_{\mathcal{V}}(t)$$

Par contre à l'instant  $t + dt$ , le système est formé non seulement du contenu du volume de contrôle, sauf le peu qui y est entré, mais aussi du peu qui en est sorti ; on peut écrire ceci ainsi :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}}(t + dt) = \vec{p}_{\mathcal{V}}(t + dt) + \delta \vec{p}_{\text{sorti}} - \delta \vec{p}_{\text{entré}}$$

On a le droit d'appliquer les principes de la mécanique au système, pas au volume de contrôle, donc la force exercée sur le système qui inclut les forces surfaciques de Van der Waals et celles dues aux chocs, évoquées plus haut, vérifie :

$$\vec{F} dt = \vec{p}_{\mathcal{S}}(t + dt) - \vec{p}_{\mathcal{S}}(t) = \vec{p}_{\mathcal{V}}(t + dt) - \vec{p}_{\mathcal{V}}(t) + \delta \vec{p}_{\text{sorti}} - \delta \vec{p}_{\text{entré}}$$

Par un tour de passe-passe permutons les rôles :

$$\vec{p}_{\mathcal{V}}(t + dt) - \vec{p}_{\mathcal{V}}(t) = \vec{F} dt + \delta \vec{p}_{\text{entré}} - \delta \vec{p}_{\text{sorti}}$$

Et lisons les choses ainsi : on peut considérer que le volume de contrôle (système ouvert) se comporte comme un vrai système (fermé) à condition de lui applique une force fictive  $\vec{F}_{\text{éch.}}$ , que l'on peut appeler terme d'échange défini par :

$$\vec{F}_{\text{éch.}} = \frac{\delta \vec{p}_{\text{entré}}}{dt} - \frac{\delta \vec{p}_{\text{sorti}}}{dt}$$

La contribution à ce terme d'échange de molécules qui entrent (vitesse  $\vec{v}'_i$ ) ou sortent (vitesse  $\vec{v}''_j$ ) à travers un élément de surface  $dS$  pendant  $dt$  sera donc :

$$\vec{F} dt = \sum_i \mu \vec{v}'_i - \sum_j \mu \vec{v}''_j$$

Que me dis-tu, ô mon lecteur ? Que tu as déjà vu cette expression un peu plus haut, au paragraphe 1.b ? Tu as raison et j'espérais bien que tu t'en aperçusses. On espère ainsi,

par analogie, pouvoir affirmer que la pression au sein du fluide aura les mêmes propriétés qu'au niveau des parois. Dans ce cas-ci, on parlera de *pression cinétique*.

Mais attention, il y a quand même une subtilité : les lois de la physique sont valables dans le référentiel du laboratoire avec les vitesses absolues (notées  $V$ ) et non les vitesses relatives à la paroi mobile (notées  $v$ ). Les calculs menés dans le paragraphe 1.b revenaient à calculer

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \iiint dm \vec{v} = \iiint \mu \vec{v} \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

Il faudra ici calculer

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \iiint dm \vec{V}$$

mais attention, le calcul de  $\delta m$  fait intervenir les vitesses relatives à la paroi, il suffit de relire la démonstration et d'en comprendre le sens pour s'en convaincre ; donc :

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \iiint dm \vec{V} = \iiint \mu \vec{V} \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

En reportant  $\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{v}$  où  $\vec{V}_p$  est la vitesse de la paroi, on en déduit pour la force d'échange

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ech.}} dt &= \iiint \mu (\vec{V}_p + \vec{v}) \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) \\ \vec{F}_{\text{ech.}} dt &= \iiint \mu \vec{V}_p \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) + \iiint \mu \vec{v} \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) \\ \vec{F}_{\text{ech.}} dt &= \vec{V}_p \iiint \mu \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) + \iiint \mu \vec{v} \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette expression  $\delta m = \iiint \mu \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$ , or, on a vu que l'on choisit l'évolution temporelle de la paroi de sorte que  $\delta m$  soit partout nul ; on en déduit :

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \vec{V}_p \delta m + \iiint \mu \vec{v} \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) = \iiint \mu \vec{v} \delta n (\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

Finalement confondre  $\vec{V}$  et  $\vec{v}$  aurait conduit au même résultat mais ça n'autorise pas à faire l'impasse sur cette difficulté.

Ne me reproche pas, mon lecteur, de t'avoir donné quatre pleines pages d'explications pour en arriver là. Si<sup>8</sup> le résultat est bien le même qu'au niveau des parois, le mécanisme est totalement différent ! Sur une paroi, les molécules arrivent avec une vitesse  $\vec{v}'_i$  et rebondissent avec une vitesse  $\vec{v}''_i$  tandis qu'au sein du liquide, les molécules qui arrivent avec une vitesse  $\vec{v}'_i$  pénètrent dans le volume de contrôle pendant que d'autres en sortent avec la vitesse  $\vec{v}''_j$

---

8. Le « si concessif » est en voie d'extinction ; je lutte pour sa survie.

## 1.d Isotropie de la pression.

On vient de voir que sur un élément d'aire  $dS$  de la surface fermée d'un volume au sein d'un fluide s'exerce, de la part de l'extérieur, une force pressante normale, de module proportionnel à  $dS$  et, sauf cas exceptionnels réservés à l'état liquide, dirigé vers l'intérieur. La force pressante est alors notée  $\vec{dF} = -p \vec{dS}$  où  $p$  est la pression, positive, sauf dans les cas exceptionnels évoqués ci-dessus, calculée au point  $M$  milieu de l'élément de surface réputé infiniment petit.

Remarque : si l'on introduit le vecteur normal  $\vec{n}$  dirigé vers l'extérieur, on peut noter  $\vec{dS} = dS \vec{n}$

Certes, mais il y a là un non-dit admis sans justification et j'aime à traquer ce genre de choses<sup>9</sup>. Si j'imagine un autre volume de fluide avec une autre surface mais passant par le même point  $M$ , sur un nouvel élément de surface de vecteur  $\vec{dS}'$  contenant ce point  $M$ , s'exercera une force normale que l'on pourra écrire  $\vec{dF}' = -p' \vec{dS}'$ . La question posée dans ce paragraphe est celle-ci : a-t-on forcément  $p' = p$  ; si oui, l'on pourra bien parler de la pression en  $M$  et noter  $p(M)$ , sinon, il faudra parler de la pression en  $M$  dans la direction  $\vec{n}$  et noter  $p(M, \vec{n})$ .

Si l'on relit tout ce qui précède, l'isotropie de la distribution des vitesses intervenant dans l'étude des chocs et dans celle des termes d'échange, l'isotropie de forces de VAN DER WAALS suffit à se convaincre que la réponse est positive.

Oui, mais cela reporte l'explication sur les mécanismes qui expliquent la pression, alors que l'on peut plus rapidement et plus simplement justifier l'isotropie de la pression à partir du fait que les forces de pression sont normales à la surface. Imaginons, au sein d'un fluide, un petit tétraèdre, infiniment petit, à trois faces en forme de triangle rectangle. Avec un choix convenable des axes, ses sommets et leurs coordonnées seront notées respectivement  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(dx, 0, 0)$ ,  $B(0, dy, 0)$  et  $C(0, 0, dz)$  ainsi que les présente la figure 3 p.16. En faisant varier par la pensée  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , on donne à  $\vec{n}$ , vecteur unitaire normal de la face  $ABC$  toutes les orientations possibles, ce qui permet d'étudier la dépendance de la pression vis-à-vis de  $\vec{n}$ .

Le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de la face  $OAB$  est  $-\vec{e}_z$ , l'aire de cette face triangulaire est  $\frac{1}{2} dx dy$  et son vecteur surface est donc  $\vec{dS}_1 = -\frac{1}{2} dx dy \vec{e}_z$  ; si l'on note  $p_1$  la pression dans la direction de  $-\vec{e}_z$ , la force pressante sur cette face est donc :

$$\vec{dF}_1 = -p_1 \vec{dS}_1 = \frac{1}{2} p_1 dx dy \vec{e}_z$$

De la même façon, les forces pressantes exercées sur les faces  $OBC$  et  $OBA$  sont respectivement :

$$\vec{dF}_2 = \frac{1}{2} p_2 dy dz \vec{e}_x$$

---

9. à la base de bien des racismes.

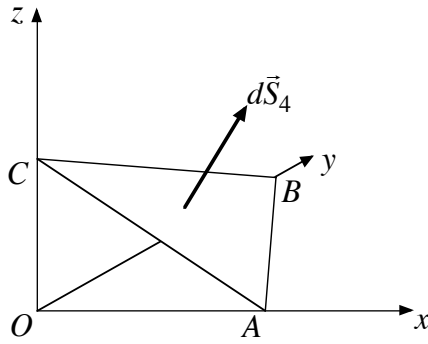


FIGURE 3 – Élément de fluide.

$$d\vec{F}_3 = \frac{1}{2} p_3 dz dx \vec{e}_y$$

Enfin, pour la dernière face  $ABC$ , on a certes  $d\vec{F}_4 = -p_4 d\vec{S}_4$ , mais comment calculer  $d\vec{S}_4$  ?

Le plus simple est de se souvenir<sup>10</sup> que la somme des vecteurs surfaces d'une surface fermée est nulle et l'on en déduit élégamment que

$$d\vec{S}_4 = -d\vec{S}_1 - d\vec{S}_2 - d\vec{S}_3$$

d'où l'on déduit aisément que :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4 &= (p_4 - p_1) d\vec{S}_1 + (p_4 - p_2) d\vec{S}_2 + (p_4 - p_3) d\vec{S}_3 = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} (p_1 - p_4) dx dy \vec{e}_z + \frac{1}{2} (p_2 - p_4) dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} (p_3 - p_4) dz dx \vec{e}_y \end{aligned}$$

ce qui est le bilan des forces surfaciques auquel il faut ajouter les forces *volumiques* qui se résument le plus souvent au poids  $dm \vec{g}$ , soit en introduisant la masse volumique  $\rho$ , en choisissant  $Oz$  vertical ascendant (d'où  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ ) et sachant que le volume du tétraèdre est  $\frac{1}{6} dx dy dz$ , un poids égal à :

$$dm \vec{g} = -\frac{1}{6} \rho g \vec{e}_z dx dy dz$$

Enfin, en appelant  $\vec{a}$  l'accélération du centre de gravité, le théorème dit « du centre de gravité » donne, en passant le poids dans l'autre membre :

$$\frac{1}{6} \rho (\vec{a} + g \vec{e}_z) dx dy dz = \frac{1}{2} (p_1 - p_4) dx dy \vec{e}_z + \frac{1}{2} (p_2 - p_4) dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} (p_3 - p_4) dz dx \vec{e}_y$$

10. Voir le chapitre A-IX d'analyse vectorielle.



Les longueurs élémentaires  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  sont supposées infiniment petites de sorte que le second membre est un infiniment petit d'ordre deux et le premier d'ordre trois et que ce dernier devient négligeable dans le passage à la limite où les trois longueurs tendent vers zéro ; ainsi :

$$\vec{0} = \frac{1}{2} (p_1 - p_4) dx dy \vec{e}_z + \frac{1}{2} (p_2 - p_4) dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} (p_3 - p_4) dz dx \vec{e}_y$$

Il suffit alors de projeter sur les trois axes pour en déduire que  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ , c'est à dire que la pression en  $O$  (passage à la limite quand les longueurs sont infiniment petites) et dans les directions de  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  et aussi la direction quelconque de la normale à  $ABC$  sont égales ; la pression est bien fondamentalement isotrope, que le fluide soit au repos ou en mouvement !

Remarque : si l'on ne se souvient pas que le vecteur surface total d'une surface fermée est nul, on peut se servir des propriétés du produit vectoriel en contrôlant l'orientation par la « règle des trois doigts de la main droite » et affirmer que :

$$d\vec{S}_4 = \frac{1}{2} \vec{CA} \wedge \vec{CB} = etc.$$

## 1.e Notion élémentaire de statique des fluides.

Ce paragraphe est là essentiellement que comme bande-annonce des chapitres B-XII à B-XV de mécanique des fluides.

Imaginons au sein d'un fluide au repos dans un champ de pesanteur  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ , un cube élémentaire de côté  $a$  infiniment petit dont les arêtes soient parallèles aux axes dont l'un est vertical ascendant. La gravitation impose une direction particulière au problème, l'axe  $Oz$ , ce qui a comme conséquence que la pression dépend de la cote  $z$  du point. La face inférieure, d'aire  $a^2$ , située à une cote  $z$ , est donc soumise à la force de pression  $a^2 p(z) \vec{e}_z$  de la part du fluide en dessous. La face supérieure, située à une cote  $z + a$ , est donc soumise à la force de pression  $-a^2 p(z + a) \vec{e}_z$  de la part du fluide en dessus. Les forces de pression sur les quatre autres faces s'annulent deux à deux par symétrie. Enfin le poids est  $-\rho a^3 g \vec{e}_z$  où  $\rho$  est la masse volumique. A l'équilibre puisque le fluide est au repos, la somme des forces est nulle, donc :

$$a^2 p(z) \vec{e}_z - a^2 p(z + a) \vec{e}_z - \rho a^3 g \vec{e}_z = \vec{0}$$

Après projection et simplification par  $a^3$ , on en déduit :

$$\frac{dp}{dz} \approx \frac{p(z + a) - p(z)}{a} = -\rho g$$

qui est la loi fondamentale de l'hydrostatique.

Une conséquence pratique est que la pression dans un fluide n'est jamais uniforme, sauf en impesanteur et que l'on ne peut pas parler rigoureusement de LA pression du

fluide. Néanmoins, c'est un abus de langage tolérable si la variation relative de pression entre le point le plus bas et le point le plus haut du fluide est négligeable. En fixant le maximum tolérable d'écart à 1%, la différence de hauteur  $h$  entre ces deux points ne devra pas dépasser, pour de l'eau ( $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) autour de la pression atmosphérique ( $p_a = 10^5 \text{ Pa}$ ) et sur terre ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ) une valeur telle que  $\mu g h = \frac{p_0}{100}$  soit 10 cm et pour un gaz, en gros mille fois moins dense aux conditions normales, mille fois plus soit 100 m. Pour un gaz, il n'y aura donc pas de problème, un laboratoire d'une hauteur de cent mètres nécessiterait un budget élyséen<sup>11</sup>, pour un liquide, il faudra être circonspect.

De façon plus générale le théorème du gradient (voir chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle) permet de remplacer les forces pressantes, surfaciques par essence, par une force volumique équivalente :

$$-\oint_{\Sigma} p \, dS = -\iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} p \, dV$$

où  $\Sigma$  est une surface fermée d'intérieur  $\Omega$ . Formellement, on se ramène à une force volumique  $-\overrightarrow{\text{grad}} p$  qui apparaîtra en mécanique des fluides dans les équations d'EULER et de NAVIER-STOKES.

## 2 Echanges énergétiques.

### 2.a Travail fourni à un fluide par une paroi mobile.

- Formule générale.

Imaginons un fluide contenu dans un volume  $\Omega$  limité par une paroi solide déformable  $\Sigma$ . On se propose ici, dans une première approche naïve, de calculer le travail de forces extérieures qui provoquent un déplacement élémentaire de la paroi et l'on va commencer par calculer le travail doublement élémentaire  $\delta_2 W$  de la force de pression  $d\vec{F} = -p(M) d\vec{S}$  exercée par l'extérieur sur une portion élémentaire de vecteur surface  $d\vec{S}$ , centrée sur le point  $M$  et se déplaçant de  $d\vec{\ell}$ .

Dans le cas où le déplacement se fait vers l'extérieur (voir figure 4 p.19), l'on a :

$$\begin{aligned} \delta_2 W &= d\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -p(M) d\vec{S} \cdot d\vec{\ell} = -p(M) \|d\vec{S}\| \|d\vec{\ell}\| \cos \theta = \dots \\ &\dots = -p(M) \|d\vec{S}\| dh = -p(M) \delta_2 V \end{aligned}$$

où  $\delta_2 V$  est le *volume balayé* par  $dS$  dans son déplacement  $d\ell$ . Si le déplacement se fait vers l'intérieur le  $\cos \theta$  est négatif et l'on trouverait  $\delta_2 W = +p(M) \delta_2 V$ . Pour éviter une discussion sur le signe, on choisit une convention algébrique pour les volumes balayés, positifs vers l'extérieur, négatifs vers l'intérieur. Ainsi quelque soit le cas de figure, on

---

11. Aucune allusion à un quelconque Président de la République mais à Michel AUDIART.

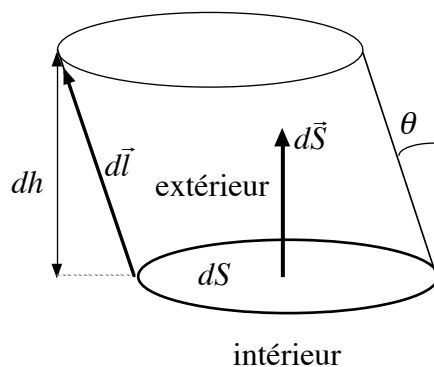


FIGURE 4 – Travail élémentaire des forces de pression.

aura  $\delta_2 W = -p(M) \delta_2 V$  et par intégration sur toute la paroi, le travail total pour une déformation élémentaire est :

$$\delta W = \oint_{\Sigma} -p(M) \delta_2 V$$

On peut dans cette formule insister sur le fait que  $p(M)$  désigne la pression au niveau de la paroi, soit encore de la surface du fluide, en écrivant un indice qui le rappelle :

$$\delta W = \oint_{\Sigma} -p_{\text{surf.}}(M) \delta_2 V$$

On trouve trop souvent<sup>12</sup> dans le cours de thermodynamique, l'expression « pression extérieure » au lieu de « pression surfacique » ; c'est pédagogiquement dangereux car l'expression sous-entend qu'elle diffère de la « pression intérieure », donc qu'il y a discontinuité de pression au niveau de la paroi, ce qui est contraire à la loi d'action et réaction et est donc a priori absurde<sup>13</sup>.

• **Un cas particulier important.**

Un cas particulier est celui où la pression surfacique est uniforme, ce qui arrive en pratique

- si la pression est uniforme au sein du fluide,
- si seule une partie de la paroi se déplace avec une pression uniforme à ce niveau (la pression surfacique peut différer sur les parties immobiles de la paroi, là où  $\delta_2 V$  est nul).

Appelons alors  $p$  la valeur de cette pression surfacique uniforme ; le travail s'écrit alors :

$$\delta W = \oint_{\Sigma} -p_{\text{surf.}}(M) \delta_2 V = -p \oint \delta_2 V$$

12. y compris, je le confesse, dans mes cours quand j'ai débuté ma carrière.

13. Voir quand même au chapitre B-XII sur les phénomènes de capillarité pour nuancer cette affirmation.

Faisons un petit schéma (figure 5 p.20) avec des crayons de couleur. En bleu, la position initiale de la paroi limitant un volume initial  $V_{\text{initial}} = V$  et en violet, la position finale de la paroi limitant un volume  $V_{\text{final}} = V + dV$  (on note ici  $dV$  et non  $\delta V$ , car c'est bien la variation, assimilée à une différentielle, d'une grandeur physique : le volume occupé par le fluide). Par endroits, la paroi a balayé des volumes vers l'extérieur (hachurés vert) de volume total noté  $\delta V_{\text{sorti}}$ , par endroits, vers l'intérieur (hachurés rouge) de volume total noté  $\delta V_{\text{entré}}$ .

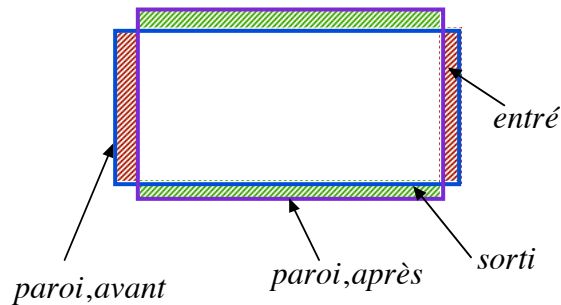


FIGURE 5 – Somme des volumes balayés.

On voit aisément que :

$$\begin{aligned}
 V_{\text{final}} &= V_{\text{initial}} + \delta V_{\text{sorti}} - \delta V_{\text{entré}} \\
 V + dV &= V + \delta V_{\text{sorti}} - \delta V_{\text{entré}} \\
 dV &= \delta V_{\text{sorti}} - \delta V_{\text{entré}}
 \end{aligned}$$

Or la convention algébrique compte positivement les  $\delta_2$  vers l'extérieur, donc sortis et négativement ceux vers l'intérieur, donc entrés. Dès lors :

$$\begin{aligned}
 dV &= \oint \delta_2 V \\
 \delta W &= -p \oint \delta_2 V = -p dV
 \end{aligned}$$

Retenons donc :

$$\delta W = -p dV \text{ si la pression surfacique est uniforme sur parties mobiles de la paroi}$$

Ce qu'il faut retenir ce n'est pas la formule, tout le monde s'en souvient, c'est la condition de validité, que l'on oublie trop souvent de vérifier avec des conséquences parfois désastreuses.

Un cas particulier où cette condition est vérifiée est celui d'un volume infiniment petit et déformable (une quasi-particule) au sein d'un fluide dont la surface fait office de paroi car alors la variation de pression entre différents points infiniment proches est négligeable.

## 2.b Travail et chaleur.

La conclusion du paragraphe précédent, quelque convaincante qu'elle paraisse, ne peut être acceptée en l'état. En effet, les parois sont aussi le lieu des échanges thermiques et l'équivalence entre chaleur et travail (voir chapitre E-I) nous oblige à trouver une description mécanique aux échanges thermiques.

Imaginons une surface élémentaire soumise, dans une vision macroscopique à la force pressante  $\vec{F}$  et animée d'une vitesse  $\vec{V}$ . Le paragraphe précédent définissait le travail élémentaire par  $\delta_2 W = \vec{F} \cdot \vec{V} dt$ ; nous parlerons désormais plutôt de puissance mécanique  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ .

A l'échelle microscopique, cette force et cette vitesse sont soumises à des fluctuations statistiques dues à l'agitation thermique, tant de façon spaciale que temporelle; pour alléger, nous ne nous intéresserons qu'à ce second aspect. La force  $\vec{F}(t)$  à l'échelle microscopique diffère de la force macroscopique qui en est la moyenne et que nous noterons désormais  $\vec{F}_m$ ; elle en diffère par une fluctuation variable que nous noterons  $\vec{f}(t)$ . Il en sera de même pour la vitesse, de sorte que l'on puisse noter :

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) &= \vec{F}_m + \vec{f}(t) \\ \vec{V}(t) &= \vec{V}_m + \vec{v}(t)\end{aligned}$$

Remarquons que puisque la moyenne temporelle<sup>14</sup> de  $\vec{F}(t)$  est  $\langle \vec{F}(t) \rangle = \vec{F}_m$ , que la moyenne est une opération linéaire et que la moyenne d'une constante est cette constante, on en déduit :

$$\begin{aligned}\langle \vec{F}(t) \rangle &= \langle \vec{F}_m \rangle + \langle \vec{f}(t) \rangle \\ \vec{F}_m &= \vec{F}_m + \langle \vec{f}(t) \rangle \\ \langle \vec{f}(t) \rangle &= \vec{0}\end{aligned}$$

et de même  $\langle \vec{v}(t) \rangle = \vec{0}$ . C'était en fait évident, mais c'était l'occasion de roder les outils avant la suite que voici.

Au niveau microscopique le puissance est :

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{V}(t) = (\vec{F}_m + \vec{f}(t)) \cdot (\vec{V}_m + \vec{v}(t)) = \vec{F}_m \cdot \vec{V}_m + \vec{F}_m \cdot \vec{v}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{V}_m + \vec{f}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Prenons-en la moyenne et tenons compte de la linéarité en « sortant » les facteurs constants :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P}(t) \rangle &= \langle \vec{F}_m \cdot \vec{V}_m \rangle + \langle \vec{F}_m \cdot \vec{v}(t) \rangle + \langle \vec{f}(t) \cdot \vec{V}_m \rangle + \langle \vec{f}(t) \cdot \vec{v}(t) \rangle \\ \mathcal{P}_m &= \vec{F}_m \cdot \vec{V}_m + \vec{F}_m \cdot \langle \vec{v}(t) \rangle + \vec{V}_m \cdot \langle \vec{f}(t) \rangle + \langle \vec{f}(t) \cdot \vec{v}(t) \rangle\end{aligned}$$

---

14. la moyenne temporelle d'une fonction  $f(t)$  est traditionnellement notée  $\langle f(t) \rangle$

Or les moyennes de  $\vec{f}(t)$  et de  $\vec{v}(t)$  sont nulles, d'où :

$$\mathcal{P}_m = \vec{F}_m \cdot \vec{V}_m + \langle \vec{f}(t) \cdot \vec{v}(t) \rangle$$

Le premier terme est la puissance vue du point de vue macroscopique, c'est celle que l'on a étudiée dans le paragraphe 2.a et qui est perçue comme la puissance mécanique. Le second est le produit de deux fonctions de moyennes nulles mais n'a pas une moyenne nulle pour autant car on sort du domaine de la linéarité ; il est aisé de trouver des contre-exemples<sup>15</sup>. C'est ce terme qui traduit la puissance des échanges thermiques. Toute la difficulté historique à concevoir les lois de la thermodynamique tient là : dès que l'on passe à l'énergie, grandeur quadratique par essence, il y a distorsion entre les aspects macro- et micro-scopiques.

On peut rétorquer que la puissance thermique, produit de deux fluctuations faibles doit être négligeable. C'est vrai, on ne le nie pas, et c'est bien pour cela que les échanges thermiques sont bien plus lents que les échanges mécaniques. L'explosion d'un ballon de baudruche est quasiment instantanée ; le refroidissement d'un bol de soupe très lent.

## 2.c Echanges énergétiques au sein d'un fluide.

On reprend ici la problématique développée au paragraphe 1.c débutant p.11 transposée au niveau énergétique.

Un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  d'énergie  $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}$  (cinétique et potentielle relative aux interactions intérieures) et soumis de la part des forces de VAN DER WAALS et des chocs à une puissance  $\mathcal{P}$ , étudié pendant un intervalle de temps de durée  $dt$ , vérifie en conclusion d'un même type de raisonnement qu'au paragraphe 1.c :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{V}}(t + dt) - \mathcal{E}_{\mathcal{V}}(t) = \mathcal{P} + \delta\mathcal{E}_{\text{entré}} - \delta\mathcal{E}_{\text{sorti}}$$

qui fait là aussi apparaître un terme d'échange, homogène à une puissance, que l'on appelle parfois *puissance cinétique* et dont l'expression est :

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} = \frac{\delta\mathcal{E}_{\text{entré}}}{dt} - \frac{\delta\mathcal{E}_{\text{sorti}}}{dt}$$

De la même façon qu'au paragraphe 1.c où l'on avait :

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \sum_i \mu \vec{v}'_i - \sum_j \mu \vec{v}''_j$$

qui s'adaptait, en détaillant les vitesses par direction et module, en cette intégrale :

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \iiint dm \vec{V} = \iiint \mu \vec{V} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

---

15.  $f(t) = \cos(\omega t)$  a une moyenne nulle, son carré, cas particulier du produit, a une moyenne 1/2

on aura ici

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \sum_i \mu \frac{v_i'^2}{2} - \sum_j \mu \frac{v_j''^2}{2}$$

qui s'adaptera en :

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \iiint dm \frac{V^2}{2} = \iiint \mu \frac{V^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

En reportant  $\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{v}$  où  $\vec{V}_p$  est la vitesse de la paroi, on en déduit :

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \iiint \mu \frac{(\vec{V}_p + \vec{v})^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \iiint \mu \frac{(\vec{V}_p^2 + 2\vec{V}_p \cdot \vec{v} + \vec{v}^2)}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \iiint \mu \frac{\vec{V}_p^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) + \iiint \mu \vec{V}_p \cdot \vec{v} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) + \iiint \mu \frac{\vec{v}^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \frac{\vec{V}_p^2}{2} \iiint \mu \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) + \vec{V}_p \cdot \iiint \mu \vec{v} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) + \iiint \mu \frac{\vec{v}^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

On reconnaît dans cette expression  $\delta m = \iiint m \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$ , or on a vu que l'on choisit l'évolution temporelle de la paroi de sorte que  $\delta m$  soit partout nul ; on y reconnaît aussi ce résultat du paragraphe 1.c :

$$\vec{F}_{\text{ech.}} dt = \iiint \mu \vec{V} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt) = \iiint \mu \vec{v} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

et l'on en déduit :

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} dt = \frac{\vec{V}_p^2}{2} \delta m + \vec{V}_p \cdot \vec{F}_{\text{ech.}} dt + \iiint m \frac{\vec{v}^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS} dt)$$

$$\mathcal{P}_{\text{ech.}} = \vec{F}_{\text{ech.}} \cdot \vec{V}_p + \iiint m \frac{\vec{v}^2}{2} \delta n(\vec{v} \cdot \vec{dS})$$

Comme pour les échanges énergétiques avec la paroi, on retrouve un terme macroscopique qui est la puissance mécanique ( $\vec{F}_{\text{ech.}} \cdot \vec{V}_p$ ) et un terme correctif qui est la puissance thermique.

Il n'est désormais plus besoin de recourir à un quelconque fluide calorique (voir chapitre E-I) pour expliquer les échanges thermiques.

## 2.d En guise de conclusion.

Nous sommes désormais armés pour comprendre l'essence énergétique du premier principe de la thermodynamique.

Comme on disait à la fin de chaque épisode des romans-feuilletons<sup>16</sup>, « la suite au prochain numéro. . . », à savoir le chapitre E-III.

---

16. «Feuilleton» est dans son sens premier un terme typographique, ce qui prouve bien que les premiers feuilletons ont paru dans les journaux. Ils sont nés au XIXe siècle et l'on pense très fort à Alexandre DUMAS et à Eugène SUE.