Chapitre B-VI

Cinématique relativiste.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On commence par un rappel historique : les premières mesures de la vitesse de la lumière, la publication des équations de Maxwell qui montrent le caractère électromagnétique de la lumière, le problème qu'elles posent par sa vitesse qui ne peut pas être la même dans tous les référentiels galiléens, la recherche du référentiel privilégié que serait l'« éther », l'expérience de Michelson et Morley dont le résultat négatif a ouvert la voie vers la découverte par Einstein de la théorie de la relativité.

On verra qu'on ne peut résoudre le problème évoqué ci-dessus qu'en abandonnant l'idée d'un temps absolu.

On montrera ensuite comment, en partant de l'invariance de la vitesse de la lumière, on arrive à gérer le changement de référentiel galiléen par la matrice de Lorentz. On étudiera les premières conséquences : contraction des longueurs et dilatation du temps que l'on retrouvera par une méthode graphique (diagrammes de Minskowski, variante Loedel).

Enfin on introduira les quadrivecteurs pour construire une physique relativiste ; en particulier on définira le quadivecteur vitesse et l'on en déduira la loi relativiste de composition des vitesses.

En guise d'ouverture vers des horizons plus larges, on s'intéressera à la transformation d'une onde plane progressive et l'on trouvera les formules relativistes de l'effet Doppler et de l'aberration.

Il pourra être utile, du côté mathématique, de se rafraîchir la mémoire sur les matrices unitaires.

Table des matières

B-VI Cinématique relativiste. 1

1 La genèse. 5

1.a La vitesse de la lumière. 5

1.b Les équations de Maxwell. 6

1.c L'éther. 6

1.d L'expérience de Michelson et Morley. 7

1.e Marche d'approche. 11

2 Les postulats et les remises en question. 12

2.a Les postulats. 12

2.b L'apparente contradiction. 12

2.c La synchronisation des horloges. 13

2.d La relativité du temps et des longueurs. 13

3 Le formalisme. 14

3.a Le cahier des charges 14

3.b Evénements et intervalles. 15

3.c La matrice de Lorentz. 16

3.d Quadrivecteurs. 20

4 Conséquences immédiates. 21

4.a Passé absolu, futur absolu, éloignement absolu. 21

4.b Contraction des longueurs. 22

4.c Dilatation du temps. 24

4.d Le référentiel galiléen tangent. 25

5 Représentations graphiques. 27

5.a L'exemple des diagrammes de Minkowski symétriques (ou diagrammes de Loedel) 27

5.b Représentation graphique de la contraction des longueurs. 29

5.c Représentation graphique de la dilatation du temps. 30

6 Vers une cinématique relativiste. 31

6.a Quadrivecteur vitesse. 32

6.b Composition des vitesses. 33

6.c Le cas des ondes planes progressives. 34

1 La genèse.

1.a La vitesse de la lumière.

La première mesure de la vitesse de la lumière a été réalisée par l'astronome Römer en 1676 par une constatation astronomique. Io, satellite de Jupiter passe régulièrement dans l'ombre de celui-ci (occultation) ; or ces passages sont observés en avance quand la Terre est proche de Jupiter (conjonction) et en retard quand la Terre est éloignée (opposition) ; Römer comprit que ces écarts entre positions extrêmes étaient dus au temps de propagation de la lumière sur une distance égale au diamètre de l'orbite terrestre (voir figure 1 p. 5, due à Römer lui-même ; A est le Soleil, B Jupiter, D et C les positions d'Io en début et fin d'occultation, E, F, G, H, K et L différentes positions possibles de la Terre sur son orbite, plus ou moins éloignées de Jupiter, H est la plus proche, E la plus éloignée). Compte tenu de la faible précision des mesures, il obtint un résultat nettement sous-évalué mais du bon ordre de grandeur ($2,2 \cdot 10^8$ m/s).

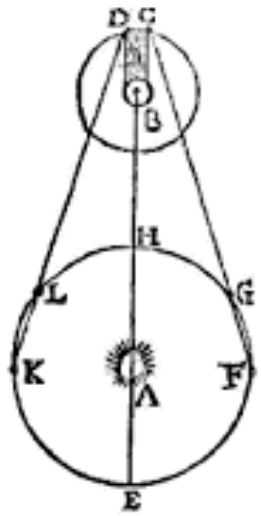

Figure 1 – Les occultations d'Io.

La seconde mesure fut réalisée en 1849 par Fizeau par une méthode astucieuse : une roue dentée à N dents est mise en rotation, un mince pinceau de lumière traverse la roue perpendiculairement au niveau de ses dents et se réfléchit sur un miroir placé à une distance D ; si pendant l'aller-retour, la roue a tourné de $\frac{1}{2N}$ tour, équivalent à la moitié d'un intervalle entre dents, le faisceau qui avait traversé la roue dans l'espace entre deux dents, rencontre une dent et est donc occulté. La vitesse de rotation provoquant l'occultation est

donc, en tour par unité de temps :

$$\omega = \frac{\left(\frac{1}{2\,N}\right)}{\left(\frac{2\,D}{c}\right)} = \frac{c}{4\,N\,D}$$

Le principe est simple mais afin que la vitesse de rotation restât raisonnable (inférieure à 1000 tr/min), il lui a fallu placer le miroir à près de 9 km ! La valeur trouvée par Fizeau ($3,1 \cdot 10^8$ m/s) est très proche de la valeur actuellement admise.

Depuis 1983, la vitesse de la lumière a été fixée à 299 792 458 m/s, l'unité de temps a une définition potentiellement variable et le mètre est défini à partir de celle-ci de sorte que la valeur de c, vitesse de la lumière, soit égale à la valeur indiqué plus haut.

1.b Les équations de Maxwell.

Vers 1864, Maxwell réalise une synthèse cohérente des lois de l'électrostatique, du magnétisme et de l'induction, synthèse qui sera publiée en 1873 (voir chapitre C-VIII). Il en déduit la possibilité d'ondes électromagnétiques dont la célérité c est liée à la constante de l'électrostatique ε_0 et à celle du magnétisme μ_0 par la relation $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$ qui donne à c la valeur connue à l'époque de la vitesse de la lumière et prouve ainsi la nature électromagnétique de la lumière.

La découverte par Hertz d'autres ondes électromagnétiques désormais, qualifiées de *hertziennes*, avec une première liaison en 1886 entre un émetteur et un récepteur, ouvrant la voie à la télégraphie sans fil, puis à la radiophonie, constitue une vérification expérimentale majeure de la théorie de Maxwell.

1.c L'éther.

Mais, car il y a un « mais », cette théorie est la première qui ne soit pas valable dans tous les référentiels galiléens, sinon dans un changement de référentiel galiléen, avec une vitesse d'entraînement v non nulle, la vitesse absolue et la vitesse relative de la lumière seraient c dans les deux référentiels et l'on aurait $c = c + v$, ce qui est absurde.

Il faut donc admettre qu'il y a un référentiel « plus galiléen que les autres » [1] dans lequel les équations de Maxwell seraient valables et uniquement dans celui-là.

Comme par ailleurs, on n'admettait pas à l'époque, ni bien avant, qu'une vibration pût exister sans support matériel, on reprit le concept d'*éther* déjà utilisé, entre autres par Huygens et Young. La nature précise de cet éther était bien sûr très floue mais c'est lui qui jouait le rôle de référentiel privilégié, le seul où la vitesse de la lumière soit c

1. « Tous les animaux sont égaux, mais certains le sont plus que d'autres. » George Orwell dans *La Ferme des Animaux*.

1.d L'expérience de Michelson et Morley.

Initialement, il s'agissait de mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther. Une série d'expériences fut menée en 1881 par Michelson seul puis une autre en 1887 avec Morley. Il utilisa un interféromètre de sa conception et qui porte désormais son nom. Son principe sera détaillé en optique physique (au chapitre D-XI) ; nous nous contenterons de donner ici le strict minimum nécessaire à cet exposé qui s'appuiera sur la figure 2 p. 7.

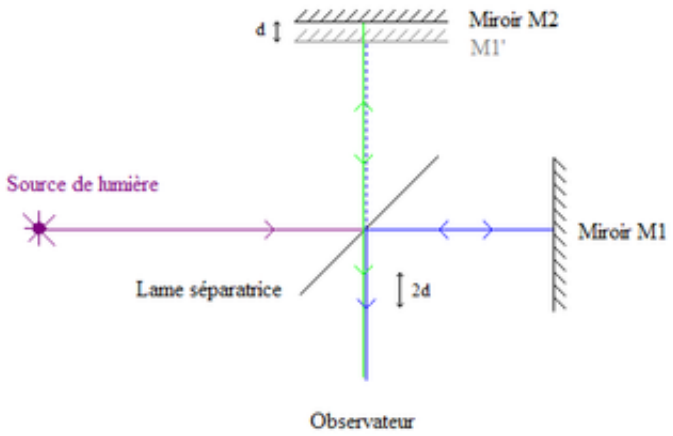

Figure 2 – Interféromètre de Michelson.

Une source de lumière envoie un faisceau vers une lame *séparatrice* placée à 45° qui envoie la moitié de l'énergie dans deux directions orthogonales ; ces faisceaux rencontrent deux miroirs qui les réfléchissent vers la séparatrice qui les sépare à nouveau en deux faisceaux chacun, les uns retournent vers la source et ne sont pas exploités, les autres vers un observateur et interfèrent. Si les deux distances séparatrice-miroir sont égales, les interférences sont constructives et l'intensité lumineuse est maximale ; si elles diffèrent d'un quart de longueur d'onde (donc les aller-retour d'une demi), les interférences sont destructrices et l'intensité nulle. Ceci si l'interféromètre est fixe par rapport au prétendu éther.

Supposons les deux distances séparatrice-miroir égales (on note d) et supposons que la Terre, donc l'interféromètre, se déplace par rapport à l'éther à une vitesse d'entraînement v parallèlement à la normale au miroir $M1$.

Calculons la durée t_1 de l'aller-retour séparatrice-miroir 1 ; le plus simple est de se placer dans le référentiel du laboratoire dans lequel, par la loi de composition des vitesses, les vitesses relatives de la lumière sont $c+v$ dans un sens et $c-v$ dans l'autre. L'on a, en faisant une approximation au premier ordre non nul car v est petit devant c :

$$t_1 = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = \frac{2\,d\,c}{c^2-v^2} = \frac{2\,d}{c}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2\,d}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Pour la durée t_2 de l'aller-retour séparatrice-miroir 2, il est plus simple de se placer dans le référentiel de l'éther. A un instant $t = 0$ la lumière part de la séparatrice en S vers le miroir en M ; à l'instant $\tau = \frac{t_2}{2}$ la lumière arrive sur le miroir qui entre temps s'est déplacé, ainsi que la séparatrice, d'une distance $v\,\tau$ pour arriver respectivement en M' et S', distance considérablement exagérée pour la lisibilité sur la figure 3 p. 8 ; enfin à l'instant $2\,\tau = t_2$ la lumière revient sur la séparatrice qui entre temps s'est déplacée, ainsi que le miroir, d'une nouvelle distance $v\,\tau$ pour arriver respectivement en S'' et M''.

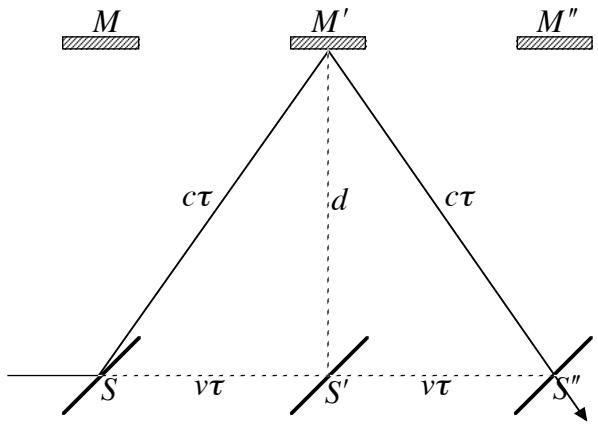

FIGURE 3 – Interféromètre de Michelson (bis).

Un application du théorème de PYTHAGORE au triangle $SM'S'$ ou $S'M'S''$ conduit à $c^2\,\tau^2 = v^2\,\tau^2 + d^2$ d'où :

$$t_2 = 2\,\tau = \frac{2\,d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\,d}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2\,d}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right)$$

La différence des temps de trajets est donc :

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{d\,v^2}{c^3}$$

On se convainc aisément que le calcul de l'ordre d'interférence, donné habituellement à partir de la différence de marche (de longueurs parcourues donc) $\Delta\ell$ par $p = \frac{\Delta\ell}{\lambda}$, sera donné ici par $p = \frac{\Delta t}{T}$ où T est la période de l'onde lumineuse. En se souvenant que celle-ci et la longueur d'onde sont liés par $\lambda = c\,T$, on en déduit :

$$p = \frac{\Delta t}{T} \approx \frac{d\,v^2}{c^3\,T} = \frac{d}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2}$$

En fait il est impossible de s'assurer que les deux miroirs sont exactement à la même

distance de la séparatrice ; disons que M_1 est à une distance d_1 et M_2 à une distance $d_2 = d_1 + \delta$ avec $\delta \ll d_1$, on arrive alors à :

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{2\,d_1}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2\,d_2}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{2\,d_1}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2\,d_1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2\,\delta}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{d_1\,v^2}{c^3} - \frac{2\,\delta}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right)$$

soit en négligeant le terme correctif dans le terme correctif (qui donne une correction d'ordre deux) :

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{d_1\,v^2}{c^3} - \frac{2\,\delta}{c}$$

$$p = \frac{\Delta t}{T} \approx \frac{d\,v^2}{c^3\,T} - \frac{2\,\delta}{c\,T} = \frac{d}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2} - \frac{2\,\delta}{\lambda}$$

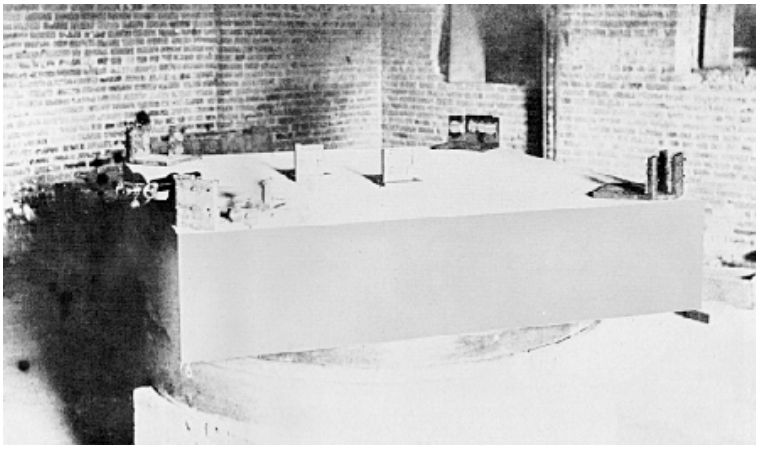

FIGURE 4 – Interféromètre de Michelson sur son support.

Comme il est impossible de mesurer δ, un nouvelle astuce consiste alors à faire tourner tout l'appareil de 90°, sans changer les miroirs de position par rapport à la séparatrice, ce qui revient à permuter les formules de calculs de t_1 et t_2, sans changer δ. Comme nous le voyons sur la photographie 4 p. 9, le support repose sur une grande bassine remplie de mercure. Cela permet à la plaque de tourner sans trop de vibrations qui pourraient perturber l'expérience. On arrive à un nouvel ordre d'interférence p' et une différence d'ordre Δp entre les deux expériences qui sont :

$$p' \approx -\frac{d}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2} - \frac{2\,\delta}{\lambda}$$

$$\Delta p = p - p' \approx \frac{2\,d}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2}$$

Ce dernier résultat ne dépend plus de δ et permet donc de mesurer v, sauf que... Sauf que, l'expérience menée par Michelon selon ce protocole, ou plutôt en faisant tourner l'appareil en espérant voir la figure d'interférences évoluer entrer deux positions extrêmes dans des positions orthogonales, a été négative.

La première explication proposée a été que, par hasard, la Terre avait une vitesse nulle par rapport à l'éther. Or cette vitesse (absolue) est la somme de la vitesse du Soleil par rapport à l'éther (entraînement), quasiment constante car le Soleil est pratiquement confondu avec le centre de gravité du système solaire qui est un système isolé car les autres étoiles sont bien trop loin, et de la vitesse de la terre par rapport au Soleil (relative) qui elle varie légèrement en module et beaucoup en direction. Si un jour, les vitesses relative et d'entraînement ont même module et des directions opposées, la vitesse absolue est certes nulle, mais six mois plus tard, la Terre a parcouru la moitié de son orbite, la vitesse d'entraînement est inchangée et la vitesse relative est à peu près de même module mais cette fois de même sens que la vitesse d'entraînement, la vitesse absolue n'est plus nulle. Michelson a donc réitéré l'expérience six mois plus tard... avec le même résultat négatif.

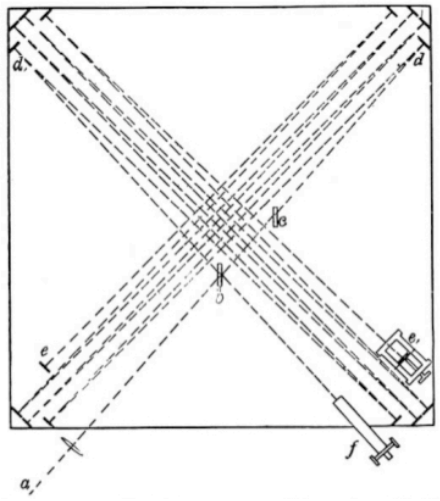

Figure 5 – Interféromètre de Michelson (les miroirs multiples).

L'expérience a été reprise avec la collaboration de Morley en s'assurant que l'appareil avait une sensibilité suffisante. L'ordre de grandeur de la vitesse de la Terre sur son orbite est de $3 \cdot 10^4$ m/s et la vitesse de la lumière est pratiquement $3 \cdot 10^8$ m/s d'où $\frac{v}{c} \sim 10^{-4}$. Pour qu'une modification de la figure d'interférence soit nette il faut qu'elle soit proche d'un décalage d'une demi-frange (un maximum d'intensité devient un minimum) ; disons que l'on vise $\Delta p \geqslant \Delta p_{\min} = 0,4$ et enfin prenons pour longueur d'onde la valeur au milieu

du spectre visible soit $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$ m. On veut donc :

$$\Delta p \approx \frac{2\,d}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \geqslant \Delta p_{\min}$$

$$d > \frac{\lambda\,\Delta p_{\min}}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^{-2}$$

$$d > \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,4}{2}\,(10^{-4})^{-2} = 12\,\mathrm{m}$$

Construire un bâti d'une vingtaine de mètres (tout compris) avec une rigidité suffisante était impossible et le trajet d'une douzaine de mètres était obtenu en « repliant » les rayons lumineux grâce à des miroirs auxiliaires qui leur faisaient faire de nombreux aller-retour, comme l'indique la figure 5 p. 10, et que l'on devine sur la photographie 4 p.9

Que tous ceux qui dans leur vie ont pesté pour régler un interféromètre de Michelson à deux miroirs tirent leur chapeau à ceux qui en avaient seize à régler !

1.e Marche d'approche.

Restait à expliquer ce résultat négatif.

Lorentz et Fitzgerald suggérèrent que l'interféromètre se contractait lors de son déplacement relatif à l'éther dans la direction du mouvement avec un facteur $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Cela expliquait correctement les résultats expérimentaux mais était « deus ex machina » [2] guère satisfaisant.

En 1898, Larmor proposa une transformation mathématique qui rendait les équations de Maxwell invariantes dans un changement de référentiel galiléen, transformation que Poincaré, qui formula le premier le concept de « relativité », baptisa transformation de Lorentz en 1905. C'est un peu trop complexe pour être exposé ici.

Enfin en 1905, Einstein publia quatre articles dans « Annalen der Physik », le premier expliquait l'effet photoélectrique par un aspect corpusculaire de la lumière qui allait ouvrir la voie vers la mécanique quantique et lui valu le prix Nobel de physique en 1921, le second expliquait le «mouvement brownien» et validait indirectement l'hypothèse atomique en offrant un nouveau moyen de calculer la constante d'Avogadro, le troisième réfutait l'idée d'un temps absolu et l'existence de l'éther et le dernier introduisait la formule-culte $E = m\,c^2$ établissant l'équivalence entre masse et énergie.

Bien que l'outil mathématique principal de la théorie de la relativité ait été proposée avant lui, c'est Einstein qui a effectué le bond conceptuel décisif en abandonnant la notion

2. Les intrigues du théâtre baroque étaient si compliquées que la seule façon de les dénouer au dernier acte était de faire descendre un dieu des cintres du théâtre par une machinerie, d'où l'expression de « dieu sorti de la machine » désignant une solution alambiquée de l'ordre du miracle.

tacite de temps absolu au profit du principe de relativité énonçant que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

Entre la publication des équations de Maxwell et celle des articles d'Einstein, trente-deux années seulement se sont écoulées, soit une génération, mais pas n'importe laquelle.

2 Les postulats et les remises en question.

2.a Les postulats.

La théorie de la relativité restreinte postule que :

- le temps est uniforme, c'est-à-dire qu'une même expérience menée à deux instants différents avec les mêmes conditions initiales aura la même durée. Du reste sans ce postulat, comment se fier à une horloge et mesurer le temps ?
- l'espace est homogène : les lois de la physique sont indépendantes du point où on les applique.
- l'espace est isotrope : les lois de la physique sont indépendantes de la direction dans laquelle on les applique.
- les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens, c'est la principe de *relativité*. En particulier la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens.
- la vitesse de la lumière est la vitesse maximale à laquelle se propagent les interactions.
- toute particule isolée a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen.
- aux faibles vitesses, la mécanique classique est un approximation de la mécanique relativiste (principe d'*équivalence*).

2.b L'apparente contradiction.

L'invariance de la vitesse de la lumière est contradictoire avec la mécanique classique car elle viole la loi de composition des vitesses. Pourtant la mécanique classique a fait ses preuves par l'étude des mouvements dans le système solaire et l'invariance de la vitesse de la lumière est une constatation expérimentale depuis l'expérience de Michelson et Morley. Comment résoudre cette aporie [3] ?

Einstein a eu la clairvoyance de rechercher la cause de cette incompatibilité dans un postulat *implicite* (c'est-à-dire sous-entendu) en mécanique classique, l'existence d'un temps universel indépendant du référentiel dans lequel on se place. C'est parce qu'il est difficile de contester ce dont on n'a pas conscience, qu'il a fallu du génie pour le faire. Une fois la prise de conscience effectuée, on peut avancer.

3. c'est-à-dire un problème insoluble mais incontournable ou encore une impasse dans un raisonnement procédant d'une incompatibilité logique.

2.c La synchronisation des horloges.

A priori, on ne peut dire que deux événements sont simultanés que s'ils sont mesurés avec la même horloge, donc au même endroit. S'ils ont lieu à deux endroits, notés A et B, d'un même référentiel, donc avec deux horloges différentes, on ne pourra parler de simultanéité que si les horloges sont synchronisées. Comment procéder ?

EINSTEIN s'appuie sur l'invariance de la vitesse de la lumière dans une *expérience de pensée*. A émet un signal lumineux à l'instant t_A mesuré par l'horloge en A, ce signal est reçu par B à l'instant t'_B mesuré par l'horloge en B, B renvoie instantanément le signal vers A qui le reçoit à l'instant t''_A mesuré par l'horloge en A.

Du point de vue de A, comme l'espace est isotrope, le trajet de la lumière de A vers B et de B vers A durent le même temps et donc la réception du signal par B a eu lieu à l'instant $t'_A = (t_A + t''_A)/2$ mesuré par l'horloge en A. Si t'_A et t'_B sont égaux, les horloges sont synchronisées, sinon la différence $t'_B - t'_A$ permet d'effectuer la correction nécessaire.

2.d La relativité du temps et des longueurs.

• La relativité du temps.

EINSTEIN montre ensuite par un raisonnement simple (une autre *expérience de pensée*) que l'idée d'un temps universel est un leurre.

Imaginons dans un référentiel galiléen deux points fixes A et B, distants de $2\,d$, munis de deux horloges synchronisées et M leur milieu, fixe lui aussi. Au même instant (disons $t = 0$), il émettent un signal lumineux vers M ; celui-ci reçoit les deux signaux au même instant $t = d/c$; comme il se sait au milieu de AB, il considère les émissions des signaux comme simultanées.

Imaginons[4] maintenant un point mobile M' se déplaçant sur la droite AB à vitesse constante dirigée de A vers B et passant à l'instant $t = 0$ des horloges de A et B au milieu M ; comme il se dirige vers la source B, il reçoit son signal en avance et comme il s'éloigne de la source A, il reçoit son signal en retard ; pour lui, l'émission du signal par B est antérieure à celle du signal de A.

La notion de simultanéité n'est donc pas absolue mais dépend du référentiel dans lequel on se trouve, elle est relative.

• La relativité des longueurs.

Mesurer la longueur d'une règle au repos dans le référentiel du laboratoire est aisé, il suffit de calculer la différence des abscisses des extrémités en ayant pris soin de choisir Ox

4. Je ne crois pas utile de faire un schéma, mais rien ne vous empêche d'en faire un en marge de ce document.

parallèle à la règle. Si la règle y est mobile, il faut mesurer ces abscisses au même moment. Or la simultanéité est relative ; donc les longueurs le sont aussi.

3 Le formalisme.

3.a Le cahier des charges

En mécanique classique, le changement de référentiel galiléen est une activité tranquille. Précisons toutefois les origines et axes du référentiel absolu $\mathcal{R} = Oxyz$ et du relatif $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$ de façon raisonnable.

- On choisit O' arbitrairement dans $\mathcal{R}'$.
- Dans $\mathcal{R}$, on choisit pour axe Ox la trajectoire rectiligne de O' et l'on y choisit l'origine O de façon arbitraire.
- Dans $\mathcal{R}'$, on choisit pour axe $O'x'$, l'axe Ox.
- Dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on choisit comme origine des temps l'instant où O et O' sont confondus.
- Dans $\mathcal{R}$, on choisit Oy et Oz orthogonaux entre eux et à Ox.
- Dans $\mathcal{R}'$, on choisit $O'y'$ et $O'z'$ respectivement parallèles à Ox et Oy

Si v est le module de la vitesse de O' par rapport à $\mathcal{R}$, on a avec ces conventions $OO' = v\,t$; le tout est résumé par la figure 6 p. 14.

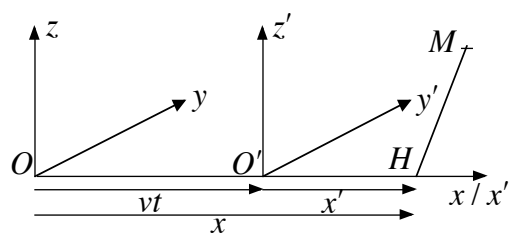

FIGURE 6 – Changement de référentiel.

Soit un point M se projetant en H sur Ox ; ses abscisses dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont $x = OH$ et $x' = O'H$ et l'on voit clairement que $x = x' + v\,t$, $y = y'$ et $z = z'$ et dans l'hypothèse d'un temps absolu, indépendant du référentiel, on peut noter $t = t'$ et réécrire $x = x' + v\,t'$, soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

et l'on en déduit aisément la transformation inverse : $x' = x - v\,t$, $y' = y$, $z' = z$ et $t' = t$, soit :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pour bâtir la mécanique relativiste, il faut trouver par quoi remplacer ces relations, sachant que l'on a rejeté l'idée d'un temps absolu mais sans dire par quoi la remplacer. C'est mince, mais tant mieux, pour rebâtir, il faut du passé faire table rase [5].

3.b Evénements et intervalles.

Par définition un *événement* est la donnée d'un point repéré par ses coordonnées et d'un instant. Les notations varient d'un auteur à l'autre, on note le temps avant (t, M) ou (t, x, y, z) ou encore $(t, \overrightarrow{M})$ ou après (M, t) ou (x, y, z, t) ou encore $(\overrightarrow{M}, t)$; on trouve aussi (t, x_1, x_2, x_3) ou (x_1, x_2, x_3, t). Regrouper dans une même parenthèse des grandeurs non homogènes n'est pas très raisonnable, nous y reviendrons.

Considérons les deux événements suivants, l'émission d'un signal lumineux au point A à l'instant t_A, soit (t_A, x_A, y_A, z_A) et sa réception au point B à l'instant t_B, soit (t_B, x_B, y_B, z_B). On a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = c\,(t_B - t_A)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2\,(t_B - t_A)^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (c\,t_B - c\,t_A)^2 = 0$$

On voit, au passage, que pour rendre homogène la définition d'un événement, il est raisonnable de prendre $(c\,t, \overrightarrow{M}) = (c\,t, x, y, z)$ parfois noté (x_0, x_1, x_2, x_3).

Par définition, un *intervalle* s_{AB} entre deux événements, cette fois-ci quelconques et sans lien a priori entre eux, (t_A, x_A, y_A, z_A) et (t_B, x_B, y_B, z_B), est défini par son carré qui peut être positif ou négatif (comme on n'en utilise que son carré, on ne précise pas quelle racine, éventuellement imaginaire, on choisit). Il y a là-aussi deux conventions selon les auteurs :

$$\text{soit} \qquad s_{AB}^2 = -(c\,t_B - c\,t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

$$\text{soit} \qquad s_{AB}^2 = +(c\,t_B - c\,t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

N'était le signe moins devant le terme temporel de la première version, on aurait une norme euclidienne dans $\mathbb{R}^4$ ou plus exactement l'espace affine associé. Comme cette ressemblance permettra de simplifier les raisonnements ultérieurs, il est d'usage de l'appeler

5. Paroles d'Eugène Pottier écrites en 1871 pendant la répression de la Commune de Paris, mises en musique en 1888 par Pierre Degeyter et ne me dites pas que vous ne savez pas de quel chant il s'agit.

pseudo-norme. Mais attention ! Une norme est nulle si et seulement les deux points sont confondus ; ici, l'on vient de voir que la pseudo norme est nulle si et seulement si les deux événements peuvent être le départ et l'arrivée d'un signal lumineux.

Comme les physiciens n'ont pas peur de vivre dangereusement, certains (moi en particulier) accentuent parfois la ressemblance en remplaçant dans la définition de l'événement $c\,t$ par $i\,c\,t$ de façon à avoir des signes plus partout dans la définition de l'intervalle. Les notations choisies dans ce cours sont :

$$\boxed{\text{événement : } (i\,c\,t, M) \text{ ou } (i\,c\,t, x, y, z)}$$

$$\boxed{\text{intervalle : } s_{AB}^2 = (i\,c\,t_B - i\,c\,t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

3.c La matrice de Lorentz.

• Invariance de l'intervalle.

Considérons deux événements infiniment proches, que l'on note $(i\,c\,t, x, y, z)$ et $(i\,c\,t + i\,c\,\mathrm{d}t, x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$, séparés par l'intervalle $\mathrm{d}s$ tel que :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2$$

Dans un changement de référentiel galiléen, ces événements ont pour coordonnées relatives, compte tenu qu'il n'y a plus de temps absolu, $(i\,c\,t', x', y', z')$ et $(i\,c\,t' + i\,c\,\mathrm{d}t', x' + \mathrm{d}x', y' + \mathrm{d}y', z' + \mathrm{d}z')$ et sont séparés par l'intervalle $\mathrm{d}s'$ tel que :

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 - c^2\,\mathrm{d}t'^2$$

Si $\mathrm{d}s = 0$ c'est que les deux événements correspondent à une longueur parcourue à la vitesse c de la lumière ; comme celle-ci est invariante dans un changement de référentiel galiléen, on aura donc aussi $\mathrm{d}s' = 0$.

Dans les autres cas, $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}s'$ sont deux infiniment petits dont on ne peut pas raisonnablement imaginer qu'ils soient d'ordres différents ; on peut donc écrire que $\mathrm{d}s' = a\,\mathrm{d}s$ en négligeant d'éventuels termes en $\mathrm{d}s^2$, $\mathrm{d}s^3$, etc. dans l'hypothèse sous-entendue d'un passage à la limite quand $\mathrm{d}s$ tend vers zéro. Le coefficient a pourrait dépendre a priori du temps, de l'espace et de la vitesse $\overrightarrow{v}$ du second référentiel par rapport au premier soit :

$$\mathrm{d}s' = a(t, M, \overrightarrow{v})\,\mathrm{d}s$$

En utilisant les axiomes de la mécanique relativiste, on se convainc que a ne dépend pas de t (temps uniforme), ni de M (espace homogène) ni de la direction de $\overrightarrow{v}$ (espace isotrope), donc seulement de son module. On a donc, en notant $v = \|\overrightarrow{v}\|$:

$$\mathrm{d}s' = a(\|\overrightarrow{v}\|)\,\mathrm{d}s = a(v)\,\mathrm{d}s$$

Imaginons maintenant un troisième référentiel dans lequel les mêmes événements sont séparés de $\mathrm{d}s''$ et notons $v_{2/1}$, $v_{3/2}$ et $v_{3/1}$ les trois vitesses relatives. On a donc :

$$\mathrm{d}s' = a(v_{2/1})\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \qquad \mathrm{d}s'' = a(v_{3/2})\,\mathrm{d}s' \quad \text{et} \qquad \mathrm{d}s'' = a(v_{3/1})\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s'' = a(v_{3/1})\,\mathrm{d}s = a(v_{3/2})\,\mathrm{d}s' = a(v_{3/2})\,a(v_{2/1})\,\mathrm{d}s$$

$$\text{d'où} \qquad a(v_{3/1}) = a(v_{3/2})\,a(v_{2/1})$$

Or, en se gardant toutefois d'écrire $\overrightarrow{v_{3/1}} = \overrightarrow{v_{3/2}} + \overrightarrow{v_{2/1}}$, formule établie avec un temps absolu, le module de $\overrightarrow{v}_{3/1}$ dépend non seulement de ceux de $\overrightarrow{v_{3/2}}$ et $\overrightarrow{v_{2/1}}$ mais aussi de l'angle θ entre ces deux vecteurs, on peut donc écrire quelque chose comme :

$$\forall\,\theta \qquad a[f(v_{3/2}, v_{2/1}, \theta)] = a(v_{3/2})\,a(v_{2/1})$$

Par la pensée, fixons $v_{2/1}$ et $v_{3/2}$ et laissons θ varier, le second membre reste fixe mais $f(v_{3/2}, v_{2/1}, \theta)$ varie donc aussi, a priori, $a(v_{3/1})$; on ne peut résoudre l'apparente contradiction qu'en admettant que a est une fonction constante.

La relation $a(v_{3/1}) = a(v_{3/2})\,a(v_{2/1})$ devient $a = a^2$ qui a pour solution $a = 0$ exclue par le fait que $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}s'$ sont infiniment petits du même ordre et $a = 1$. Donc $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s'$ et par intégration entre deux événements A et B, $s_{AB} = s'_{AB}$.

Dans un changement de référentiel galiléen, l'intervalle entre deux événements est invariant.

Remarque : Dans un exposé en classe avec l'objectif de finir le programme à temps, on aurait pu sauter ce paragraphe en disant que puisqu'on sait que $\mathrm{d}s' = 0$ si $\mathrm{d}s = 0$, c'est une bonne idée de chercher une solution à notre problème qui conserve l'intervalle et puisque la suite aboutit, cela suffira à notre bonheur. Dans ce monde de fous où il est essentiel d'aller vite, on serait passé à côté de l'essentiel : cette solution est la seule possible. Sachons donc prendre le temps[6] quand il le faut.

• Construction de la matrice de passage.

On reprend le contexte du paragraphe 3.a p. 14 et de la figure 6 p. 14. Le choix des origines est tel que l'événement $(0, O) = (0, 0, 0, 0)$ a les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$; un événement quelconque a pour coordonnées $(i\,c\,t, x, y, z)$ dans $\mathcal{R}$ et $(i\,c\,t', x', y', z')$ dans $\mathcal{R}'$. Pour lier ces deux groupes de coordonnées, on cherche une transformation géométrique qui conserve l'intervalle entre l'événement origine et l'événement considéré. Comme formellement la pseudo-norme $(i\,c\,t)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ ressemble à une norme euclidienne et comme on cherche quelque chose qui ressemble à la matrice de passage galiléenne du

6. Que le regret du passé et la peur du futur ne vous empêchent pas de profiter pleinement du présent !

paragraphe 3.a qui ne modifie que x et t, la bonne idée consiste à chercher une matrice qui soit formellement une matrice de rotation [7] sur x et $i\,c\,t$ soit :

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Reste à trouver α ; pour cela intéressons nous à l'origine O' du second référentiel. Dans le premier référentiel son abscisse est telle que $x = v\,t$, dans le second son abscisse est nulle à tout instant ($\forall t'\ x' = 0$). La relation matricielle donne :

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i\,c\,t = \cos\alpha\,(i\,c\,t') \quad \text{soit} \quad t = \cos\alpha\,t' \qquad x = \sin\alpha\,(i\,c\,t') \qquad y = 0 \qquad \mathrm{z} = 0$$

Alors la relation $x = v\,t$ donne :

$$x = v\,t = \sin\alpha\,(i\,c\,t') = v\,\cos\alpha\,t'$$

$$\tan\alpha = \frac{v}{i\,c} = -\frac{i\,v}{c}$$

Evidemment, un angle dont la tangente est imaginaire pur n'est pas très raisonnable mais nous sommes dans un contexte de rotation formelle dont on doit admettre les bizarreries. Nous tirerons $\cos\alpha$ de :

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où l'on a pris la racine positive car on veut, quand v est petit, retrouver le coefficient 1 de la théorie galiléenne. Enfin :

$$\sin\alpha = \tan\alpha\,\cos\alpha = \frac{\frac{-i\,v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La matrice de passage s'écrit donc :

7. parce qu'une rotation conserve la (pseudo-)norme !

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ce qui donne après développement et division par $i\,c$ pour la première ligne

$$t = \frac{t' + \frac{v\,x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

La façon la plus rapide de retrouver la théorie galiléenne aux faibles vitesses d'entraînement, par comparaison avec celle de la lumière, consiste à considérer celle-ci comme infinie et à annuler les termes en $1/c$ et $1/c^2$. La vérification est immédiate, je vous en fais grâce.

Bien sûr, la démonstration qui précède sent le soufre ; en fait ce n'en est pas une, c'est une astuce pour trouver une matrice plausible et il reste à vérifier que cette matrice conserve bien la pseudo-norme. Pour cela, il suffit de vérifier [8] que les colonnes de la matrice sont des vecteurs de pseudo-norme unité et deux à deux orthogonaux dans le pseudo-produit scalaire, ce qui se fait aisément, je vous en épargne le détail.

Pour trouver la matrice inverse, surtout pas de calculs, formellement cette matrice est unitaire (cf note 8), comme toute matrice qui conserve la norme, et son inverse est tout simplement sa transposée, ce qui revient (un seul regard suffit) à transformer v en $-v$, d'où

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8. Voir en algèbre linéaire les propriétés des matrices « unitaires ».

Ce qui donne après développement et division par $i\,c$ pour la première ligne

$$t' = \frac{t - \frac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

La matrice de passage que nous venons de trouver s'appelle matrice de Lorentz.

Remarque : Pour alléger l'écriture, on trouve souvent $\beta = \dfrac{v}{c}$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; la matrice de Lorentz s'écrit effectivement plus simplement :

$$\begin{pmatrix} \gamma & i\,\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -i\,\beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mais je n'y oppose avec une farouche énergie pour deux raisons. La première c'est que β et γ se présentent comme deux grandeurs distinctes alors qu'elles sont liées par $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. La seconde est la plus importante : dans un problème où un point a une vitesse v dans $\mathcal{R}$ et une vitesse v' dans $\mathcal{R}'$, référentiel mobile à la vitesse V par rapport à $\mathcal{R}$, il y a trois β valant respectivement v/c, v'/c et V/c et trois γ. J'ai trop souvent vu des élèves céder à la facilité plutôt que suivre mes austères conseils, confondre donc les trois γ avec le seul premier apparu dans leur calculs et aller droit au désastre dans ce type de situation ; je persiste donc dans mes convictions.

Notation simplifiée : La matrice de Lorentz ne modifie pas ce qui se passe parallèlement aux axes des y et des z ; si l'on garde cela bien dans l'esprit, on peut se contenter d'écrire :

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ x' \end{pmatrix}$$

3.d Quadrivecteurs.

En notant $(i\,c\,t, \overrightarrow{M})$ un événement quelconque (avec le choix des origines précédemment précisé) et $(\mathcal{L})$ la matrice de Lorentz, on peut convenir de condenser la notation de la

transformation de LORENTZ en :

$$(i\,c\,t, \overrightarrow{M}) = (\mathcal{L})\,(i\,c\,t', \overrightarrow{M}')$$

Les chapitres suivant feront apparaître des grandeurs d'allure $(i\,v_0, \overrightarrow{v}) = (i\,v_0, v_1, v_2, v_3)$ qui, dans un changement de référentiel galiléen, se comportent de même, soit :

$$(i\,v_0, \overrightarrow{v}) = (\mathcal{L})\,(i\,v_0', \overrightarrow{v}')$$

Ces grandeurs seront appelées *quadrivecteurs*, en particulier $(i\,c\,t, \overrightarrow{M})$ est le quadrivecteur position.

Convention personnelle (adaptée de celle de mon ami Louis C.) : je note un quadrivecteur par une des flèches disponibles dans LaTeX, l'éditeur de textes scientifiques incontournable, celle qui rappelle plus ou moins vaguement le chiffre 4. $\overleftarrow{M}$ notera par exemple le quadrivecteur position que l'on pourra définir par $\overleftarrow{M} = (i\,c\,t, \overrightarrow{M})$.

4 Conséquences immédiates.

4.a Passé absolu, futur absolu, éloignement absolu.

Prenons comme origine un événement quelconque qui sera donc noté $(0, 0, 0, 0)$ et un événement $(i\,c\,t, x, y, z)$. Dans un contexte unidirectionnel, les événements tels que $s^2 = x^2 - c^2\,t^2 = 0$ sont représentés sur un graphe plan (x en abscisse et $c\,t$ en ordonnée) par deux droites ; dans un contexte bidirectionnel, les événements tels que $s^2 = x^2 + y^2 - c^2\,t^2 = 0$ sont représentés sur un graphe en trois dimensions (x en abscisse, y en ordonnée et $c\,t$ en cote) par un cône de révolution d'axe Ot qui l'on peut dessiner en perspective ou en projection ; dans un contexte tridirectionnel, les événements tels que $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2\,t^2 = 0$ sont représentés sur un graphe en quatre dimensions par un *hypercône* de révolution d'axe Ot que l'on peut toujours essayer de dessiner en perspective ou en projection mais même si l'on y arrive, le résultat sera illisible faute d'habitude de voir en 4-D. Contentons-nous du schéma 7 p. 22 en 3-D et en perspective pour comprendre ce qui suit.

Un événement à l'intérieur de l'hypercône est tel que s^2 est strictement négatif donc s imaginaire (on dira qu'il est *du genre temps*). Par conservation de l'intervalle, il en sera de même dans tous les référentiels galiléens et donc, dans aucun référentiel galiléen, on ne peut avoir $t' = 0$ car alors s'^2 serait positif ou nul, ce qui est contraire à l'hypothèse, autrement dit l'événement à l'intérieur de l'hypercône ne peut être simultané avec l'événement origine ; il est soit dans son passé, soit dans son futur, son passé absolu ou son futur absolu. Par contre on pourra trouver un référentiel galiléen où $x' = y' = z' = 0$, autrement dit qu'il ait lieu au même endroit que l'événement origine.

Un événement à l'extérieur de l'hypercône est tel que s^2 est strictement positif donc s réel (on dira qu'il est *du genre espace*). Par conservation de l'intervalle, il en sera de même

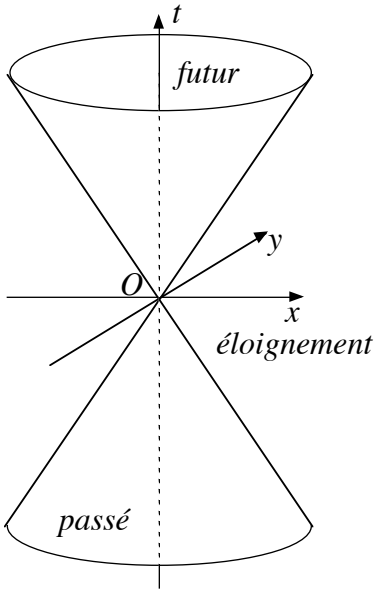

FIGURE 7 – L'hypercône du temps.

dans tous les référentiels galiléens et donc, dans aucun référentiel galiléen, on ne peut avoir $x' = y' = z' = 0$ car alors s'^2 serait négatif ou nul, ce qui est contraire à l'hypothèse, autrement dit l'événement à l'extérieur de l'hypercône ne peut coïncider (avoir lieu au même endroit) avec l'événement origine ; il est en est éloigné de façon absolue. Par contre on pourra trouver un référentiel galiléen où $t' = 0$, autrement dit qu'il ait lieu au même moment que l'événement origine, qu'il lui soit simultané.

Bien sûr, un événement sur l'hypercône correspond à la réception d'un signal lumineux émis à l'événement origine.

4.b Contraction des longueurs.

Imaginons une règle parallèle à l'axe Ox d'un référentiel absolu et mobile par rapport à celui-ci avec une vitesse constante parallèle à Ox de module v. Prenons comme référentiel relatif le référentiel lié à la règle et dont l'origine O' est l'un des bouts de celle-ci, l'autre étant A' d'abscisse fixe égale à la longueur de la règle L_0 dans son référentiel, appelée *longueur propre*. La longueur de la règle dans le référentiel absolu est la différence des abscisses des extrémités *mesurées à un même instant* t. Cette contrainte incite à utiliser la matrice de LORENTZ inverse. En notation simplifiée, on a pour le point O' :

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x_{O'}(t) \end{pmatrix}$$

d'où en développant selon x :

$$0 = \frac{x_{O'}(t) - v\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

et pour le point A' :

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ L_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x_{A'}(t) \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \frac{x_{A'}(t) - v\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Par différence membre à membre, on en déduit la longueur L de la règle dans le référentiel absolu :

$$L_0 = \frac{x_{A'}(t) - x_{O'}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{L = L_0\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vu du référentiel absolu par rapport auquel elle se déplace à vitesse v, la règle s'est raccourcie d'un facteur $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$; il y a *contraction des longueurs*. Aux vitesses ordinaires sur Terre, disons 30 m/s soit 108 km/h, ce facteur vaut $\sqrt{1-10^{-14}} \approx 1 - 0,5 \cdot 10^{-14}$ et une règle d'un mètre se raccourcit de quelque chose comme deux fois le diamètre d'un noyau atomique. A la vitesse de la Terre sur son orbite, environ 30 km/s, ce facteur vaut $\sqrt{1-10^{-8}} \approx 1 - 0,5 \cdot 10^{-8}$ et le diamètre de la Terre (13 000 km) se raccourcit de 6,5 cm... dans le référentiel d'une soucoupe volante faisant du sur place dans le référentiel de Copernic.

Par contre si la règle est orthogonale à sa vitesse absolue, il n'y a pas de contraction car la matrice de Lorentz ne modifie pas ce qui se passe selon Oy et Oz. Un objet tridimensionnel en mouvement ne sera contracté que dans la direction de son mouvement ; par exemple une sphère deviendra un ellipsoïde [9].

9. Un autre problème est de savoir comment elle sera vue, car des photons arrivant dans l'œil au même

4.c Dilatation du temps.

Imaginons un processus de durée finie qui a lieu en un point mobile avec une vitesse constante de module v par rapport à un référentiel absolu. Prenons ce point, la direction de la vitesse et le début du processus comme origine O', axe $O'x'$ et origine des temps d'un référentiel relatif ; prenons comme origines de l'espace et du temps dans le référentiel absolu le début du processus et la position de O' à cet instant, et prenons Ox confondu avec $O'x'$ de sorte que l'événement $(O, t = 0)$ du référentiel absolu coïncide avec l'événement $(O', t' = 0)$ du référentiel relatif.

Dans le référentiel relatif, lié au lieu du processus, celui-ci prend fin à $t' = T_0$ appelé *durée propre* ou improprement [10] *temps propre* et dans le référentiel absolu, à l'instant $t = T$. En notation simplifiée, on a pour cette fin de processus qui dans le référentiel relatif a lieu en O' $(x' = 0)$ et à $t' = T_0$:

$$\begin{pmatrix} i\,c\,T \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,T_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où, en développant la première ligne :

$$i\,c\,T = \frac{i\,c\,T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

T est plus grand que T_0, il y a *dilatation du temps.*

Cet effet a pu être mis en évidence au milieu du XXème siècle sur les muons produits par l'effet des rayons cosmiques sur l'atmosphère terrestre. Le muon [11] est hautement instable ; sa une demi-vie [12], lors qu'il est au repos, est de 2,2 microsecondes ; or les muons « cosmiques », produits à des vitesses proches de celle de la lumière, ont une demi-vie dix fois plus grande, compatible avec le facteur $1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ calculé à partir de leur vitesse. On ne détaille pas ici le protocole expérimental qui nécessite de solides connaissances sur l'absorption des particules énergétiques par la matière.

---

moment n'auront pas été émis au même instant, ce qui ne respecte pas le protocole de mesure des abscisses à un même instant.

10. Désolé, je n'ai pas pu m'empêcher.
11. particule élémentaire proche de l'électron si ce n'est qu'il est environ 200 fois plus lourd.
12. temps au bout duquel, dans une population de muons, la moitié s'est désintégrée.

Un second exemple est celui des satellites GPS dont la vitesse orbitale est de l'ordre de 4 km/s, ce qui crée, pour leurs horloges atomiques, une dilatation d'un facteur

$$[1-(1,33\cdot 10^{-5})^2]^{-\frac{1}{2}} = (1-1,78\cdot 10^{-10})^{-\frac{1}{2}} \approx 1+0,89\cdot 10^{-10}$$

qui donne par jour (86 400 s) un décalage [13] par rapport à une horloge atomique au sol de $\Delta t = 86\,400\cdot 0,89\cdot 10^{-10}$ de l'ordre de 7 à 8 μs par jour. C'est peu mais cela crée pour la localisation d'un récepteur GPS une erreur qui augmente chaque jour de $c\,\Delta t = 210$ à 240 m ! Il importe donc que les horloges embarquées soient régulièrement synchronisées avec une horloge-mère au sol.

Citons enfin l'expérience de pensée connue sous le nom de « paradoxe des jumeaux » ou « paradoxe de Langevin ». A vingt ans, l'un des deux jumeaux, disons Bastien, quitte la Terre et vogue à une vitesse relative telle que $1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2$ (soit $\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$) et ce pendant dix ans ; là où il est arrivé, il fait quelques expériences brèves puis revient pendant dix autres années avec la même vitesse, dans l'autre sens, et Bastien rejoint donc la Terre à quarante ans. Pour son frère, disons Alain, resté tranquillement à la maison, l'aller et le retour ont duré chacun dix ans multiplié par $1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ soit vingt ans chacun ; quand son frère Bastien revient, Alain a donc soixante ans. Soit, mais Bastien, qui lui aussi est très au fait de la théorie de la relativité restreinte, estime que pendant son aller qui a duré dix ans à ses yeux, il voguait à vitesse relative constante par rapport à un référentiel galiléen donc il était dans un référentiel galiléen et donc par un raisonnement symétrique son frère a dû vivre dix ans divisé (permutation des rôles) par $1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ soit cinq ans et la même chose pour le retour ; il doit donc retrouver son frère Alain âgé de trente ans et non soixante. Quel est le bon raisonnement ? Faute de pouvoir faire l'expérience pour de vrai, il faut chercher où se loge la dissymétrie...

4.d Le référentiel galiléen tangent.

Dans le paradoxe des jumeaux, la dissymétrie se trouve dans les phases nécessaires d'accélération au début de l'aller et du retour et de décélération à la fin de l'aller et du retour, pendant lesquelles le référentiel du frère voyageur n'est plus galiléen, celui-ci n'a donc pas le droit de raisonner comme il l'a fait.

D'où la question qui s'impose : quelle relation entre les durées d'un événement dans un référentiel galiléen et un référentiel relatif non galiléen, mobile à une vitesse variable $v(t)$?

Dans un bref intervalle de temps $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ entourant l'instant t du temps du référentiel absolu, considérons un référentiel d'origine la position de O' à l'instant t et se déplaçant à la vitesse uniforme $v(t)$ par rapport au référentiel absolu, on l'appelle *référentiel galiléen*

13. A ce décalage s'ajoute en fait un autre nettement plus grand, dû à l'influence de la gravité terrestre sur le temps, c'est un effet de la théorie de la relativité *générale* que je ne peux expliquer dans ce cours de relativité *restreinte*.

tangent[14] ; les écarts entre le référentiel relatif et son référentiel tangent sont du second ordre et deviennent négligeables quand ε tend vers zéro. On peut dès lors utiliser les résultats liés à la matrice de Lorentz pour un événement infiniment petit de *durée propre* $\mathrm{d}t_0$ dans le référentiel non galiléen et $\mathrm{d}t$ dans le référentiel absolu. Dans l'hypothèse où $v(t)$ est connue en fonction du temps t du référentiel absolu, on adapte la forme de la dilatation du temps :

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}$$

ou mieux, en séparant les variables :

$$\mathrm{d}t_0 = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$$

Si, pour fixer les idées et à titre d'exemple et donc sans se poser la question de savoir si c'est possible ou non, la phase d'accélération se fait, vue du référentiel absolu, à accélération constante a pendant un temps τ tel que $a\,\tau = v$, vitesse qui restera constante ensuite, cette phase dure dans le référentiel non galiléen un temps τ_0 tel que :

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - \frac{a^2\,t^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $t = \frac{c}{a}\,\sin\varphi$, d'où $\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, conduit à :

$$\tau_0 = \frac{c}{a}\int_0^{\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)} \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c}{a}\int_0^{\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\tau_0 = \frac{c}{2\,a}\int_0^{\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)} [1 + \cos(2\,\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\tau_0 = \frac{c}{2\,a}\left\{\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right) + \frac{1}{2}\,\sin\left[2\,\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)\right]\right\}$$

$$\tau_0 = \frac{c}{2\,a}\left\{\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right) + \cos\left[\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)\right]\,\sin\left[\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)\right]\right\}$$

$$\tau_0 = \frac{c}{2\,a}\left[\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right) + \frac{a\,\tau}{c}\sqrt{1 - \frac{a^2\,\tau^2}{c^2}}\right] = \frac{\tau}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2\,\tau^2}{c^2}} + \frac{c}{2\,a}\,\arcsin\left(\frac{a\,\tau}{c}\right)$$

Soit en notant $c = c\,\tau$ la vitesse finale :

14. On devrait dire « tangent à l'instant t » ; à chaque instant, il y a un référentiel tangent donc ne jamais dire « *le* référentiel tangent ».

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{c}{v}\,\arcsin\left(\frac{v}{c}\right)$$

La suite relève du calcul numérique. Prenons par exemple la même vitesse finale que plus haut, dans l'exposé du paradoxe des jumeaux, soit $\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$; alors :

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,855$$

Remarque : pour un voyage agréable, on peut prendre l'accélération a de l'ordre de grandeur de g de sorte que, en raisonnant de façon classique, l'accélération d'entraînement remplace la gravitation disparue, ce qui donne $\tau \approx 6$ mois.

5 Représentations graphiques.

5.a L'exemple des diagrammes de Minkowski symétriques (ou diagrammes de Loedel)

Le formalisme matriciel peut paraître lourd à manipuler et dès les débuts de la théorie de la relativité, on a essayé de le remplacer par un formalisme géométrique plus aisé à manier. Le plus connu est celui des diagrammes de Minkowski [15] dont une variante moins connue dite symétrique ou diagramme de Loedel [16] est encore un peu plus aisée ; c'est elle que je présenterai ici car on trouvera aisément l'autre dans la littérature. Citons aussi les diagrammes de Bondi qu'on ne détaillera pas non plus.

Un événement sera ici repéré par ses coordonnées spatiales x, y et z et la coordonnée temporelle réelle [17] homogène $\tau = c\,t$. On a vu dans le contexte du changement le référentiel étudié au paragraphe 3.c débutant p. 16, explicitant le passage entre un référentiel absolu et un référentiel relatif se déplaçant à une vitesse uniforme v parallèle à Ox par rapport au premier, que y et z ne sont pas modifiées et l'on va uniquement représenter dans le plan les coordonnées x et τ dans le référentiel absolu et x' et τ' dans le relatif. En adaptant les résultats trouvés à la fin de ce paragraphe (remplacement de t par τ), on a :

$$x = \frac{x' + \frac{v\,\tau'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

15. Hermann Minkowski, mathématicien et physicien allemand (1864–1909) a étudié le contenu géométrique de la théorie de la relativité.

16. Enrique Loedel-Palumbo, physicien argentin d'origine uruguayenne, 1901–1962, semble avoir surtout eu un rôle de vulgarisation de la théorie de la relativité.

17. comment dessiner $i\,c\,t$?

$$\tau = \frac{\tau' + \frac{v\,x'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Soit en introduisant un angle β (entre 0 et $\pi/2$) tel que $\sin\beta = \frac{v}{c}$ et donc aussi $\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$:

$$x = \frac{x' + \sin\beta\,\tau'}{\cos\beta}$$

$$\tau = \frac{\tau' + \sin\beta\,x'}{\cos\beta}$$

soit encore matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\beta} & \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \\ \\ \frac{\sin\beta}{\cos\beta} & \frac{1}{\cos\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix}$$

On interprète ainsi : Soit un événement repéré par ses coordonnées x et τ dans le plan muni d'une base vectorielle quelconque (ni forcément normée ni forcément orthogonale) formée des vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_\tau}$ d'une part et d'autre part par ses coordonnées x' et τ' si l'on remplace la base par une autre formée des vecteurs $\overrightarrow{e_{x'}}$ et $\overrightarrow{e_{\tau'}}$ dont les coordonnées dans la première base sont les colonnes de la matrice soient :

$$\overrightarrow{e_{x'}} = \frac{1}{\cos\beta}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,\overrightarrow{e_\tau}$$

$$\overrightarrow{e_{\tau'}} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{1}{\cos\beta}\,\overrightarrow{e_\tau}$$

alors la relation matricielle est la simple traduction du changement de base vectorielle. Toute représentation graphique repose sur la méthode suivante : on trace le point de coordonnées x et τ dans une base quelconque (représentées par deux axes et leurs vecteurs unitaires), on trace les axes correspondant aux vecteurs unitaires de la seconde base, calculées par les deux dernières relations et il ne reste plus qu'à projeter le point parallèlement, aux deux nouveaux axes pour trouver x' et τ'.

Reste à trouver la première base [18] de façon astucieuse pour faciliter l'exploitation du graphique. Réécrivons ainsi les relations entre les deux bases :

$$\cos\beta\,\overrightarrow{e_{x'}} = \overrightarrow{e_x} + \sin\beta\,\overrightarrow{e_\tau}$$

$$\cos\beta\,\overrightarrow{e_{\tau'}} = \sin\beta\,\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_\tau}$$

On tire de la seconde relation :

$$\overrightarrow{e_\tau} = -\sin\beta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\beta\,\overrightarrow{e_{\tau'}}$$

18. la suite prouve qu'on procède ici de façon légèrement différente.

et si l'on reporte ce résultat dans la première, on arrive à

$$\cos\beta\,\overrightarrow{e_{x'}} = (1-\sin^2\beta)\,\overrightarrow{e_x} + \sin\beta\,\cos\beta\,\overrightarrow{e_{\tau'}} = \cos^2\beta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\beta\,\cos\beta\,\overrightarrow{e_{\tau'}}$$

soit après simplification et en recopiant le résultat antérieur, le système :

$$\overrightarrow{e_{x'}} = \cos\beta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\beta\,\overrightarrow{e_{\tau'}}$$

$$\overrightarrow{e_\tau} = -\sin\beta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\beta\,\overrightarrow{e_{\tau'}}$$

dont la forme ultra-classique montre que si les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_{\tau'}}$ forment une base orthonomée, alors les vecteurs $\overrightarrow{e_{x'}}$ et $\overrightarrow{e_\tau}$ forment une base orthonormée déduite de la précédente par une rotation de l'angle β.

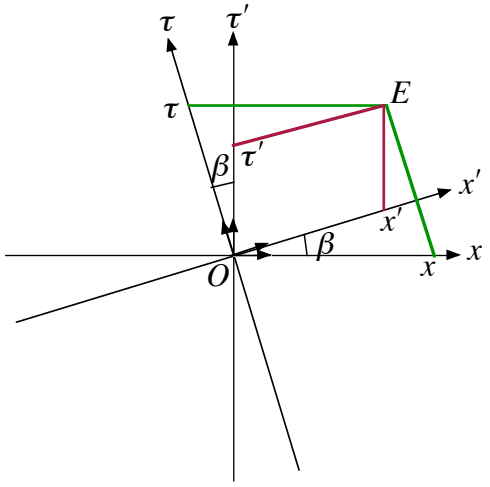

FIGURE 8 – Diagramme de Loedel.

Dès lors, la conception du diagramme est aisé et la figure 8 p. 29 en montre le résultat. La seule difficulté minime est la gestion des bases non orthogonales. Les projections dans la base de coordonnées x et τ se font parallèlement aux axes Ox et $O\tau$ (en vert sur la figure) et celles dans la base de coordonnées x'et τ' se font parallèlement aux axes Ox' et $O\tau'$ (en rouge sur la figure). Par exemple, on peut partir de la donnée de x et τ pour construire le point E puis le projeter pour visualiser x' et τ'.

5.b Représentation graphique de la contraction des longueurs.

Reprenons comme exemple d'utilisation de ce diagramme, le phénomène de contraction des longueurs mis en évidence au paragraphe 4.b p. 22 dont on reprend le protocole. Une règle est immobile dans le référentiel mobile parallèlement à Ox et $O'x'$, on choisit O confondu à $t = 0$ avec l'une des extrémités de la règle. Dans le référentiel mobile, les deux

extrémités de la règle ont pour abscisses $x' = 0$ et $x' = L_0$ (longueur propre) quelque soit le temps repéré par τ'. Les trajectoires (on dit aussi *lignes d'univers*) dans l'espace-temps des événements correspondants (coordonnées d'espace et de temps) sont donc les droites parallèles à l'axe des τ' d'équation $x = 0$ et $x = L_0$ comme sur la figure 9 p. 30 (on n'y a pas noté l'angle β).

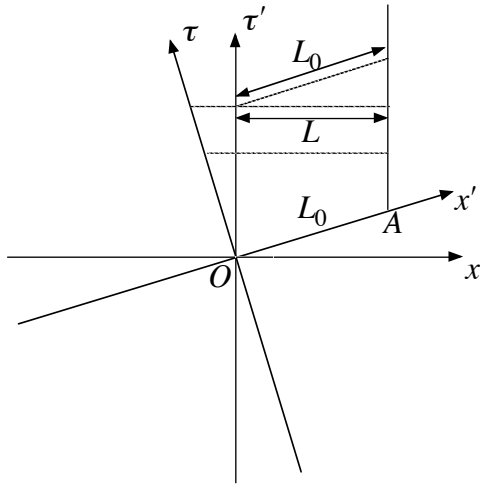

FIGURE 9 – Contraction des longueurs.

Tout droite parallèle à l'axe de x' correspondant à un temps τ' donné du référentiel mobile coupe naturellement ces deux trajectoires selon un segment de longueur L_0 (voir figure). La longueur L de la règle dans le référentiel fixe est par définition (la seule raisonnablement possible) la différence des abscisses des extrémités, mesurées au même temps τ ; on l'obtient en traçant une droite parallèle à l'axe des x correspondant au temps τ qui coupe les deux trajectoires selon un segment de longueur L ; sur la figure, on a tracé deux de ces droites l'une de façon arbitraire, l'autre plus adroitement de façon à faire apparaître un triangle rectangle qui conduit à :

$$L = L_0 \cos\beta = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

On retrouve géométriquement le résultat du paragraphe 4.b p. 22.

5.c Représentation graphique de la dilatation du temps.

Reprenons comme second exemple d'utilisation de ce diagramme, le phénomène de dilatation du temps mis en évidence au paragraphe 4.c p. 24 dont on reprend le protocole. On étudie un phénomène qui dure un temps T_0 (temps propre) en un point fixe du référentiel mobile. On peut toujours choisir les origines de sorte que ce point fixe ait pour abscisse $x' = 0$ et que le phénomène dure de $t' = 0$ à $t' = T_0$. Sur la figure 10 p. 31 (on n'y a

pas noté l'angle β), on a placé les deux événements correspondants dans la base (x', τ') : les points O ($x' = 0$ et $\tau' = 0$) et F ($x' = 0$ et $\tau' = cT_0$). Pour alléger on a noté sur le diagramme T_0 pour cT_0.

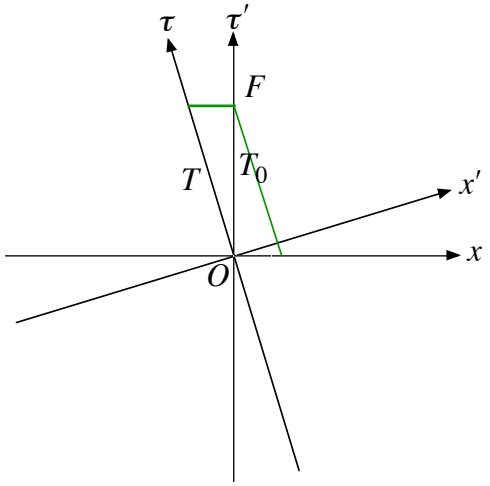

FIGURE 10 – Dilatation du temps.

Par définition (là encore la seule raisonnablement possible), la durée du phénomène est la différence des instants des événements « début » et « fin » mesurés dans le référentiel fixe soit sur le diagramme dans la base (x, τ). La construction établie à figure 8 p. 29 montre que l'événement « début » a une coordonnée temporelle nulle et l'événement « fin » une coordonnée temporelle cT (on a noté T sur le diagramme) telle que $cT_0 = cT \cos\beta$, d'où :

$$T = \frac{T_0}{\cos\beta} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On retrouve géométriquement le résultat du paragraphe 4.c p. 24.

6 Vers une cinématique relativiste.

Construire une cinématique relativiste consiste à n'introduire que des grandeurs qui, dans un changement de référentiel, se transforment selon la matrice de LORENTZ, des quadrivecteurs donc. La suite nous prouvera que cela ne nous laisse pas de marge de manœuvre mais c'est à ce prix que l'on pourra construire des lois physiques valables dans tous les référentiels galiléens.

6.a Quadrivecteur vitesse.

En mécanique classique, la vitesse est définie par $\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, que l'on peut noter aussi $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ car le choix du point origine n'influe pas sur le résultat. A un déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ accompli pendant le temps $\mathrm{d}t$, on associe l'événement élémentaire $\overleftarrow{\mathrm{d}M} = (i\,c\,dt, \overrightarrow{\mathrm{d}M})$ qui dans un changement de référentiel se comporte comme un quadrivecteur, par définition. Mais on ne peut le diviser par $\mathrm{d}t$ pour définir un quadrivecteur vitesse car $\mathrm{d}t$ dépend du référentiel. Précisons : si l'on appelle $(\mathcal{L})$ la matrice de Lorentz et si l'on affecte d'un signe apostrophe les coordonnées dans le référentiel relatif, on a par définition :

$$\overleftarrow{\mathrm{d}M} = (\mathcal{L})\,\overleftarrow{\mathrm{d}M'}$$

d'où :

$$\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = (\mathcal{L})\,\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}M'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\,(\mathcal{L})\,\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}M'}}{\mathrm{d}t'} = (\mathcal{L}^*)\,\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}M'}}{\mathrm{d}t'}$$

où $(\mathcal{L}^*) = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\,(\mathcal{L})$ n'est pas la matrice de Lorentz. Que faire ? Simplement diviser $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ par une quantité qui ne dépende pas du référentiel mais soit de la nature d'une durée élémentaire. Il suffit de peu de réflexion pour arriver au choix raisonnable qu'est la durée propre $\mathrm{d}t_0$ de l'événement élémentaire, c'est-à-dire sa durée dans le référentiel galiléen tangent (voir paragraphe 4.d p. 25). On a vu un peu plus haut que $\mathrm{d}t_0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$.

Par définition, le quadrivecteur vitesse sera :

$$\overleftarrow{v} = \frac{1}{\mathrm{d}t_0}\,(i\,c\,\mathrm{d}t, \overrightarrow{\mathrm{d}M}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t}\,(i\,c\,\mathrm{d}t, \overrightarrow{\mathrm{d}M}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(i\,c, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right) = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(i\,c, \overrightarrow{v}) = \left(\frac{i\,c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Retenons donc :

$$\boxed{\overleftarrow{v} = \left(\frac{i\,c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}$$

Remarque : calculons la pseudo-norme du quadrivecteur vitesse :

$$\overleftarrow{v}^2 = \frac{(i\,c)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{(-c^2+v^2)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{(-c^2+v^2)}{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = -c^2$$

Tous les quadrivecteurs vitesse ont la même pseudo-norme qui est une constante, ce qui aura des conséquences intéressantes dans le chapitre B-VII (dynamique relativiste). Retenons donc :

$$\boxed{\overleftarrow{v}^2 = -c^2}$$

Bien sûr, on pourrait de la même façon chercher à définir un quadrivecteur accélération à partir du quadrivecteur vitesse ; il sera plus intéressant de faire de la dynamique en multipliant par la masse pour définir un quadrivecteur force à partir du quadrivecteur quantité de mouvement car on pense très fort à la mécanique classique ($\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\overrightarrow{a}$). C'est ce que nous ferons au chapitre B-VII.

6.b Composition des vitesses.

On étudie le mouvement d'un point dans deux référentiels galiléens, le second (le relatif) se déplaçant par rapport au premier (l'absolu) à une vitesse $\overrightarrow{u}$ de module u dans la direction commune des axes Ox et $O'x'$. La vitesse absolue du point est $\overrightarrow{v}$, de composantes (v_x, v_y, v_z) et de module v, et sa vitesse relative est $\overrightarrow{v}'$, de composantes (v'_x, v'_y, v'_z) et de module v'. Par quoi remplacer la formule classique $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}'$? C'est simple, car les quadrivecteurs vitesses sont « gérés » par la matrice de Lorentz ; on a tout simplement :

$$\overleftarrow{v} = (\mathcal{L})\,\overleftarrow{v}'$$

soit en développant :

$$\begin{pmatrix} \frac{i\,c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \\ \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \\ \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \\ \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & \frac{i\,\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \\ \frac{-i\,\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\,c}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \\ \\ \frac{v'_x}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \\ \\ \frac{v'_y}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \\ \\ \frac{v'_z}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

Deux remarques, la première est que ma mise en garde à la toute fin du paragraphe 3.c correspond à ce que nous sommes en train de faire, la seconde est que, si je m'obstine dans mon rigorisme, la suite sera illisible ; nous noterons dans le cours du calcul, à titre provisoire, $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$, $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et $\gamma'_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$. Ce qui précède se réécrit donc :

$$\begin{pmatrix} i\,\gamma_v\,c \\ \gamma_v\,v_x \\ \gamma_v\,v_y \\ \gamma_v\,v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & i\,\gamma_u\,\frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -i\,\gamma_u\,\frac{u}{c} & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,\gamma'_v\,c \\ \gamma'_v\,v'_x \\ \gamma'_v\,v'_y \\ \gamma'_v\,v'_z \end{pmatrix}$$

ce qui donne en développant ligne par ligne, en simplifiant la première par $i\,c$:

$$\begin{cases} \gamma_v = \gamma_u\,\gamma'_v + \gamma_u\,\gamma'_v\,\frac{u\,v'_x}{c^2} = \gamma_u\,\gamma'_v\,\left(1 + \frac{u\,v'_x}{c^2}\right) \\ \gamma_v\,v_x = \gamma_u\,\gamma'_v\,u + \gamma_u\,\gamma'_v\,v'_x = \gamma_u\,\gamma'_v\,(u + v'_x) \\ \gamma_v\,v_y = \gamma'_v\,v'_y \\ \gamma_v\,v_z = \gamma'_v\,v'_z \end{cases}$$

De la première relation on tire γ'_v que l'on reporte dans les trois lignes suivantes, après des calculs de routine, on arrive à :

$$\begin{cases} v_x = \frac{u+v'_x}{1+\frac{u\,v'_x}{c^2}} \\ \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma_u\left(1+\frac{u\,v'_x}{c^2}\right)} = \dfrac{v'_y\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{u\,v'_x}{c^2}\right)} \\ \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma_u\left(1+\frac{u\,v'_x}{c^2}\right)} = \dfrac{v'_z\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{u\,v'_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

Ouf ! On peut là encore retrouver les formules classiques en faisant tendre formellement c vers l'infini.

Il existe une autre démonstration sans passer par les quadrivecteurs ; il y a un peu moins de calculs ; j'ai préféré utiliser les outils plus en conformité avec l'esprit de la relativité.

6.c Le cas des ondes planes progressives.

Imaginons un phénomène ondulatoire en $\exp[i\,(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} - \omega\,t)]$, comment gérer dans ce cas un changement relativiste de référentiel galiléen ?

En fait, c'est très simple une fois que l'on a compris que la valeur de la phase, c'est-à-dire $\varphi = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} - \omega\,t$ ne dépend pas du référentiel dans lequel on se trouve ; mais ce n'est pas facile de s'en convaincre. Raisonnons sur un exemple, toujours dans le cas où la vitesse relative est selon Ox : on étudie une corde de direction Ox vibrant dans la direction de Oz, avec dans le référentiel absolu quelque chose comme :

$$z = z_m\,\cos(\omega\,t - k\,x)$$

Considérons comme événement un point de la corde à un instant donné soit $(i\,c\,t, x, 0, z_m\,\cos(\omega\,t - k\,x)$, dans un changement de référentiel, on a avec la matrice de LORENTZ inverse :

$$\begin{pmatrix} i\,c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,c\,t \\ x \\ 0 \\ z_m\,\cos(\omega\,t - k\,x) \end{pmatrix}$$

d'où $z' = z = z_m\,\cos(\omega\,t - k\,x)$, ce qui montre que c'est la valeur de la fonction qui suit la transformation mais pas son argument ; c'est particulièrement net avec une sinusoïde si $z(x,t)$ est maximal dans le référentiel absolu c'est que, par exemple, on a $\omega\,t - k\,x = 2\,\pi$ alors la formule ci-dessus montre que $z' = z_m$ donc que z' est aussi maximal donc que la phase est toujours $2\,\pi$.

La vraie question est : comment exprimer cette phase invariante en fonction des coordonnées spatio-temporelles dans le référentiel relatif ? Il suffit de se souvenir qu'une transformation qui conserve la pseudo-norme conserve le pseudo-produit scalaire [19].

On peut écrire $\varphi = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega\,t = (i\,\omega/c)\,(i\,c\,t) + k_x\,x + k_y + k_z\,z$ c'est à dire sous forme du pseudo-produit scalaire des quadrivecteurs $\overleftarrow{M} = (i\,c\,t, x, y, z) = (i\,c\,t, \overrightarrow{M})$ (le quadrivecteur événement) et d'un nouveau quadrivecteur $\overleftarrow{k} = (i\,\omega/c, k_x, k_y, k_z) = (i\,\omega/c, \overrightarrow{k})$ qu'on appellera quadrivecteur d'onde. Cette présentation est compatible avec la philosophie de la démarche quadrivectorielle et suffit à convaincre que $\overleftarrow{k}$ est bien un quadrivecteur.

Prenons le cas d'une onde lumineuse se propageant, dans le référentiel relatif dans le plan $O'x'y'$ avec l'angle θ' par rapport à $O'x'$. On sait que pour laquelle $\|k'\| = \omega'/c$ ou $\omega' = k'\,c$. Dans le référentiel relatif, on a donc :

$$\overleftarrow{k'} = (i\,k', k'\,\cos\theta', k'\,sin\theta', 0)$$

et donc dans le référentiel absolu, on a :

19. La démonstration est aisée : on a $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2 + 2\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2$ d'où

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = [(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 - \overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2]/2$$

le produit scalaire est une combinaison linéaire de carrés de normes, si celles-ci se conservent, lui aussi.

$$\begin{pmatrix} i\,k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-i\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,k' \\ k'\,\cos\theta' \\ k'\,\sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix}$$

En développant et en simplifiant, on tire

$$\begin{cases} k = k'\,\frac{1+\frac{v\,cos\theta'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ k_x = k'\,\frac{cos\theta'+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ k_y = k'\,\sin\theta' \\ k_z = 0 \end{cases}$$

Que peut-on en déduire ?

D'abord que la fréquence de l'onde a changé, en effet :

$$f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{k\,c}{2\,\pi} = \frac{k'\,c}{2\,\pi}\,\frac{1+\frac{v\,cos\theta'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = f'\,\frac{1+\frac{v\,cos\theta'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

formule qui n'est rien d'autre que la version relativiste de l'effet Doppler. La formule classique est, là aussi, obtenue en faisant tendre formellement c vers l'infini.

Ensuite, après avoir constaté que $\overleftarrow{k'}^2 = 0$ (qui n'est pas surprenant puisqu'il s'agit d'un déplacement à la vitesse de la lumière sur l'hyper-cône du temps) donc par conservation de la pseudo-norme que c'est aussi vrai pour $\overleftarrow{k}$, on déduit que la direction de propagation de l'onde a changé. La nullité de la pseudo-norme permet en effet d'écrire $k_x = k\,\cos\theta$ et $k_y = k\,\sin\theta$, d'où :

$$\cos\theta = \frac{k_x}{k} = \frac{cos\theta' + \frac{v}{c}}{1+\frac{v\,cos\theta'}{c}}$$

$$\sin\theta = \frac{k_y}{k} = \frac{\sin\theta'\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v\,cos\theta'}{c}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{cos\theta' + \frac{v}{c}}$$

Ce phénomène est connu sous le nom d'*aberration*, il existe en mécanique classique ; on obtiendrait la formule classique en ajoutant vectoriellement la vitesse v et la vitesse c avec un angle θ' entre leurs deux directions et on la retrouve à partir de la formule relativiste non pas en faisant tendre formellement c vers l'infini (piège ! on trouverait $\theta' = \theta$, signe que l'approximation a été trop violente) mais en négligeant les termes d'ordre 2 en v/c.

Le phénomène d'aberration fait que, lorsqu'on regarde une étoile, on la voit dans une direction différente de celle où elle est réellement, à cause du mouvement de la Terre sur son orbite ; lorsque l'on veut calculer la distance d'une étoile proche par triangulation (mesure de *parallaxe*), il faudra en tenir compte.