Chapitre B-XIV

Eléments de mécanique des fluides.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Un cours théorique de mécanique de fluides traite de cas idéaux qu'on n'observe rarement. Il propose toutefois tantôt des approximations raisonnables, tantôt des grilles de lecture de la réalité expérimentale.

Après le rappel des équations d'Euler et de Navier-Stokes, on en déduit le théorème de Bernoulli généralisé dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible et le théorème de Bernoulli simple dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire et incompressible et on en montre diverses conséquences et applications. On démontre le théorème de Kelvin et l'on applique les lois de la thermodynamique ; on montre ainsi que les théorèmes de Bernoulli sont très souvent une bonne approximation pour un écoulement parfait et stationnaire, sous des conditions simples à appréhender.

On donne différentes méthodes pour trouver les champs de vitesse et de pression dans un écoulement autour d'un obstacle, limitées à de rares situations de géométrie simple, pourtant essentielles pour la confrontation entre théorie et expérience.

Un bilan de quantité de mouvement appliqué à un volume de contrôle donne accès à la force qu'exerce un écoulement sur un solide avec lequel il est en contact ; on démontre ainsi la formule d'Euler et l'on en donne quelques applications.

On étudie ensuite, au travers d'exemples, l'influence de différentes complications : écoulements rotationnels, écoulements non stationnaires, fluides compressibles, influence des forces de Coriolis, interaction magnéto-hydrodynamique et, plus en détail, le comportement des fluides visqueux, y compris quelques considérations sur la couche limite.

Table des matières

B-XIV Eléments de mécanique des fluides. **1**

1 Modestie des objectifs. 5

2 Les équations d'Euler et de Navier-Stokes. 5

2.a Équation d'Euler pour les fluides parfaits. 5

2.b Équation de Navier-Stokes pour les fluides visqueux. 6

3 Ecoulement parfait, irrotationnel et stationnaire de fluide incompressible. 7

3.a Théorème de Bernoulli généralisé. 7

3.b Quelques conséquences et applications (formule de Torricelli, clepsydre, effet Venturi, sonde de Pitot, cavitation) 8

3.c Application aux cours d'eau (fleuves et torrents). Nombre de Froude. 13

3.d Le théorème de Kelvin et ses conséquences (et théorème de Lagrange). 16

4 Ecoulements parfaits, incompressibles et stationnaires. 20

4.a Théorème de Bernoulli simple et applications. 20

4.b Conditions d'incompressibilité d'un écoulement. 22

4.c Découplage entre mécanique macroscopique et thermodynamique. 24

5 Recherche d'écoulements irrotationnels et incompressibles 26

5.a Analogies électrostatiques (et paradoxe de d'Alembert). 26

5.b Approche mathématique directe (et l'effet Magnus). 29

5.c Approche mathématique en deux dimensions par les fonctions holomorphes. 34

5.d Et le nombre de Reynolds ? 36

5.e Analogie rhéographique. 36

6 Bilans de quantité de mouvement et d'énergie. 37

6.a Formule d'Euler. 37

6.b Hélices motrices et réceptrices. 40

6.c Théorème de Kutta-Joukovski. 43

7 Autres types d'écoulements. 50

7.a Ecoulements rotationnels. Tourbillons et cyclones. Evolution du vecteur-tourbillon 50

7.b Ecoulements non permanents. Coup de bélier. Implosion d'une bulle. 54

7.c Fluides compressibles. Tuyère convengente-divergente. Nombre de Mach. Formule de Rankine-Hugoniot. 58

7.d Ecoulements avec forces de Coriolis. Dépressions et anticyclones. Courants marins et thermocline. El Niño. 67

7.e Ecoulements avec forces de Laplace. Magnéto-hydrodynamique. . 73

8 Ecoulement d'un fluide visqueux. 77

8.a Fluides newtoniens. 77

8.b Exemples de fluides non-newtoniens. 77

8.c Considérations préalables. 78

8.d Ecoulement de Couette unidirectionnel. 78

8.e Ecoulement de Poiseuille. 80

8.f Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné. 83

8.g Formule de Stokes. 86

9 Indications sur la couche limite. 91

9.a Estimation de l'épaisseur de la couche limite. Couche limite turbulente. 91

9.b Croissance de la couche limite. 92

1 Modestie des objectifs.

La mécanique des fluides est un sujet très vaste, régi par des équations non linéaires pour lesquelles les mathématiciens sont assez désarmés et qui nécessite donc, outre une nécessaire approche théorique, un énorme travail expérimental avec un investissement lourd et, en vue d'une résolution numérique, un traitement algorithmique sur des ordinateurs monstrueux.

Les contraintes d'un cours en ligne d'une part, mes connaissances autodidactiques sur le sujet d'autre part vont limiter le contenu de ce chapitre à quelques aspects du problème et son ambition à donner au lecteur un marchepied pour aborder par lui-même, s'il le désire, des ouvrages plus « pointus ».

Le lecteur est supposé avoir lu le chapitre précédent (B-XIII) qui introduit les outils conceptuels indispensables pour aborder la mécanique des fluides ; ils seront donc utilisés ici comme de vieux amis.

2 Les équations d'Euler et de Navier-Stokes.

Etablissons les deux « équations-pilotes » qui gèrent toute la mécanique des fluides selon que le fluide est parfait ou non.

2.a Équation d'Euler pour les fluides parfaits.

Rappelons qu'un fluide est dit parfait si les forces surfaciques qu'il subit se résument aux seules forces de pression. Rigoureusement parlant c'est un fluide non-visqueux, en pratique c'est un fluide dans des conditions telles que les forces de viscosité soient négligeables, c'est à dire un fluide en régime laminaire et en dehors de la couche limite (voir chapitre B-XIII). Un fluide n'est pas parfait en soi ; il l'est sous certaines conditions vérifiées dans certaines zones d'un écoulement.

Soit une quasi-particule de masse $\mathrm{d}m$, occupant le volume $\mathrm{d}V$, soumise à la force de pesanteur $\mathrm{d}m\,\overrightarrow{g}$ et aux forces de pression dont le bilan volumique[1] est $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\,\mathrm{d}V$. Il n'y a pas de forces de viscosité puisque l'écoulement est parfait. Le principe fondamental de la dynamique relie ces forces à l'accélération particulaire $\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}$:

$$\mathrm{d}m\,\overrightarrow{a} = \mathrm{d}m\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\,\mathrm{d}V$$

En divisant par $\mathrm{d}m$, en introduisant la masse volumique $\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ et en rappelant les différentes expressions de l'accélération particulaire[2] on obtient l'équation d'Euler qui est ici fondamentale :

1. Voir au chapitre B-XIII.
2. Voir aussi au chapitre B-XIII.

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p}$$

Elle est non linéaire à cause de la présence du terme $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v}$ et aussi, pour un fluide compressible, du terme en $\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$.

On ajoutera éventuellement la force de Coriolis pour les phénomènes à l'échelle terrestre (voir le paragraphe 7.d p. 67) et, le cas échéant, les forces magnétiques (voir le paragraphe 7.e p. 73) en reprenant le raisonnement au début.

2.b Équation de Navier-Stokes pour les fluides visqueux.

En fait tous les fluides sont visqueux, même faiblement, mais sous certaines conditions vérifiées dans certaines zones d'un écoulement (cf supra), ils se comportent comme des fluides parfaits ; on se place ici en dehors de ces cas.

Pour étudier le mouvement d'une quasi-particule de fluide visqueux, il suffit d'ajouter l'équivalent volumique [3] des forces de viscosité, d'où :

$$\mathrm{d}m\,\overrightarrow{a} = \mathrm{d}m\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\,\mathrm{d}V + \eta\,\Delta\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}V$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \frac{\eta}{\mu}\,\Delta\overrightarrow{v}$$

où l'on peut, bien sûr, introduire la viscosité cinématique $\nu = \eta/\mu$.

Cette équation porte les noms de Navier-Stokes.

Remarque : Lorsque la viscosité prédomine on a $\dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \dfrac{\eta}{\mu}\,\Delta\overrightarrow{v}$. En ordre de grandeur (voir chapitre A-IV si nécessaire) et en introduisant une longueur caractéristique R et un temps caractéristique de diffusion [4] T_d, on tire : $v/T_d = (\eta/\mu)(v/R^2)$ soit $T_d = \mu\,R^2/\eta$.

Par contre pour un phénomène convectif, c'est à dire de transport par le fluide, la distance caractéristique est le produit de la vitesse par le temps caractéristique de convection T_c, soit $R = v\,T_c$ et $T_c = R/v$.

Formons le rapport T_d/T_c, on y retrouve le nombre de Reynolds (voir chapitre B-XIII) :

$$\frac{T_d}{T_c} = \frac{\mu\,R\,v}{\eta} = \mathcal{R}$$

3. On a vu, en note, dans le chapitre B-XIII que ce n'est rigoureusement $\eta\,\Delta\overrightarrow{v}$ que pour un fluide incompressible ou un fluide compressible en écoulement incompressible ; en dehors de ces cas, c'est, en général, une excellente approximation.

4. On voit dans l'équation une dérivée première par rapport au temps et seconde par rapport à l'espace ; ce qui est caractéristique d'un phénomène de diffusion (voir le chapitre E-X).

Aux petits nombres de Reynolds, la diffusion est plus rapide (T_d est plus petit que T_c) et les échanges se font majoritairement par diffusion dans la couche limite laminaire ; aux grands nombres de Reynolds, la convection est plus rapide et les échanges se font majoritairement par convection dans les tourbillons qui apparaissent en aval des obstacles.

3 Ecoulement parfait, irrotationnel et stationnaire de fluide incompressible.

Commençons par des choses simples : un fluide incompressible (un liquide en pratique, c'est aisé à trouver), dans un écoulement stationnaire (on conçoit en ce sens l'alimentation du dispositif en liquide, c'est aisé à faire), parfait (il suffit d'un liquide peu visqueux, c'est aisé à trouver, et de se placer en dehors de la mince couche limite, comme elle est mince, c'est facile) et irrotationnel (là, on ne voit pas trop si c'est courant ou exceptionnel ; le théorème de Kelvin que nous montrerons au paragraphe 3.d p. 16 quand nous serons aguerris, montrera que c'est courant).

3.a Théorème de Bernoulli généralisé.

La dérivée temporelle de la vitesse est nulle (écoulement stationnaire), son rotationnel aussi (écoulement irrotationnel) ainsi que le terme de viscosité (écoulement parfait donc on part de l'équation d'Euler). La masse volumique μ est constante (fluide incompressible). Par ailleurs, le champ de pesanteur uniforme [5] dérive du potentiel $g\,z$. Donc l'équation d'Euler devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\mu}\right) = \overrightarrow{0}$$

La quantité entre parenthèses ne dépend donc ni de x, ni de y, ni de z et, puisqu'on est en régime stationnaire, ni de t. Elle est donc constante dans tout l'écoulement. Retenons donc :

Pour un écoulement parfait, irrotationnel et stationnaire de fluide incompressible,

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\mu} = Cte \text{ dans tout l'écoulement}$$

Il s'agit du théorème de Bernoulli [6] généralisé [7].

5. Pour le lecteur curieux qui voudrait se placer dans le champ de pesanteur sphérique de la terre, il suffira de changer l'expression du potentiel. Cette remarque a une validité permanent sur tout ce chapitre.

6. Il s'agit de Daniel, mathématicien et physicien, fils de Jean I et neveu de Jacques I et aussi cousin de Nicolas I, frère de Nicolas II et de Jean II, oncle de Jean III et Jacques II, tous mathématiciens (les numéros ont été ajoutés par les historiens). Attention pas de « i » avant les deux « l ».

7. Le théorème de Bernoulli simple viendra plus loin. C'est peut-être surprenant, mais ça donne une meilleure dynamique au chapitre.

3.b Quelques conséquences et applications (formule de Torricelli, clepsydre, effet Venturi, sonde de Pitot, cavitation)

La plupart des exemples qui suivent utilisent l'uniformité du débit dans un écoulement permanent. Le chapitre est trop lourd pour qu'on y revienne et le lecteur est supposé maîtriser cette notion (voir chapitre A-VI relatif aux bilans dans un volume de contrôle).

Les conclusions, exposées dans le cadre d'un écoulement de fluide incompressible (un liquide en pratique), restent valables en bonne approximation pour des écoulements de fluides compressibles (des gaz en pratique) sous réserve de conditions qui seront précisées au paragraphe 4.b p. 22. Procéder ainsi me permet de donner de la fluidité à l'exposé.

• L'hydrostatique retrouvée.

Pour un fluide incompressible au repos (donc irrotationnel et stationnaire et la viscosité ne joue aucun rôle) on retrouve la loi de l'hydrostatique $p(z) = p(0) - \mu\, g\, z$

• Formule de Torricelli.

◦ ***La formule.***

Considérons un récipient qui se vide de son liquide par le bas grâce à un orifice de surface petite devant la surface libre du récipient.

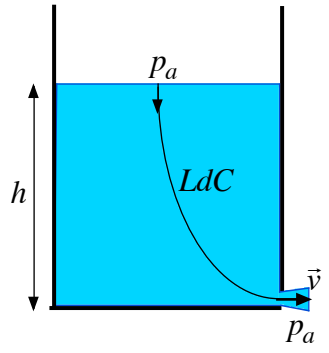

FIGURE 1 – Formule de Torricelli.

A la surface où règne la pression atmosphérique p_a, la vitesse est négligeable, car la surface grande[8] et notons h l'altitude par rapport au trou. Au niveau du jet qui sort du trou, la pression est aussi p_a, la vitesse v et l'altitude nulle. Le régime est quasiment

8. La masse qui passe par le trou de petite surface pendant dt est compensée par la baisse de niveau qui se fait à la vitesse des quasi-particules en surface ; la conservation de la masse via l'uniformité du débit justifie l'affirmation ci-dessus.

permanent si le trou est petit. Le théorème de BERNOULLI donne :

$$\frac{0^2}{2} + g\,h + \frac{p_a}{\mu} = \frac{v^2}{2} + g.0 = \frac{p_a}{\mu}$$

soit

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

appelée formule de TORRICELLI ; on retrouve la loi relative à la chute libre. La figure 1 p. 8 où l'on a dessiné une ligne de courant (LdC) résume la situation.

◦ ***Application à la clepsydre.***

Le débit sortant par le trou n'est pas constant car la hauteur h diminue lentement. La solution la plus simple a été inventée par CTÉSIBIOS à Alexandrie vers 270 avant notre ère et consiste à alimenter par le haut le récipient avec un débit légèrement supérieur à celui de sa vidange et à prévoir un système de trop-plein. L'intérêt est que le débit sortant par le trou, si on le recueille dans un récipient cylindrique, fait monter le niveau d'eau dans celui-ci en fonction linéaire du temps dont il permet une mesure assez précise. Ce dispositif est une *clepsydre*[9]

◦ ***Remarque sur les jets rectilignes à l'air libre.***

Si la hauteur de chute est grande donc la vitesse de sortie élevée, le jet à l'air libre a une trajectoire quasiment rectiligne ; la trajectoire d'une quasi-particule l'est aussi et la direction de l'accélération particulaire a la direction du jet.

En projection sur un plan perpendiculaire au jet, cette accélération est nulle et l'équation d'EULER est formellement celle de l'hydrostatique ; la pression est donc de la forme $Cte - \mu\,g\,z$ dans le liquide. A l'extérieur, elle est égale à la pression atmosphérique quelle que soit l'altitude z ; le raccordement par continuité en tous les points de la surface est donc impossible.

Comment se tirer de cette difficulté ? En invoquant la capillarité ! La forme de la section du jet a une courbure qui dépend de l'altitude et n'est donc pas tout à fait circulaire (voir le chapitre B-XII qui traite, entre autres, de la capillarité).

Le paradoxe est résolu mais l'affirmation, utilisée ci-dessus, que, dans le jet, la pression est celle de l'air est mise à mal. Elle reste toutefois une bonne approximation à la double condition que :

- le terme $\mu\,g\,z$ reste négligeable devant la pression atmosphérique p_0 dans tout le jet, soit, en appelant R son rayon moyen, quand $R \ll \frac{p_0}{\mu\,g} \sim 10$ m, disons $R \leqslant 0,1$ m
- la discontinuité de capillarité $\frac{A}{R}$ (pour l'interface eau-air, on a $A \approx 7 \cdot 10^{-2}$ N $\cdot$ m^{-1}) reste négligeable devant la pression atmosphérique p_0, soit quand $R \gg \frac{A}{p_0} \sim 10^{-6}$ m, disons $R \geqslant 0,1$ mm

9. étymologiquement, l'eau volée ; des fontaines portaient ce nom en divers endroits de Grèce et certaines alimentaient des clepsydres. Les hellénistes ne s'accordent pas sur le sens de « volée », s'agissait-il de fontaines intermittentes ou d'une description de l'appareil où l'eau coule d'un récipient à un autre qui la vole au premier ?

• **Effet Venturi.**

◦ ***L'effet.***

Considérons un écoulement horizontal qui présente localement un étranglement forcé soit par une canalisation, soit par un obstacle. Au niveau de l'étranglement la section du tube de courant diminue, donc la vitesse augmente pour assurer la conservation du débit et donc, puisque $\overrightarrow{v}^2/2+p/\mu = Cte$, la pression *diminue* : il s'agit de l'effet VENTURI. Cet effet explique : l'arrachement des toits par fort coup de vent [10], le gonflement de la capote d'un 2 CV Citroën, l'aspiration d'un liquide (ou d'un gaz [11]) au niveau de l'étranglement et son entraînement sous forme de goutelettes par le fluide (vaporisateur à parfum, carburateur, trompe à vide, voir figure 2 p. 10).

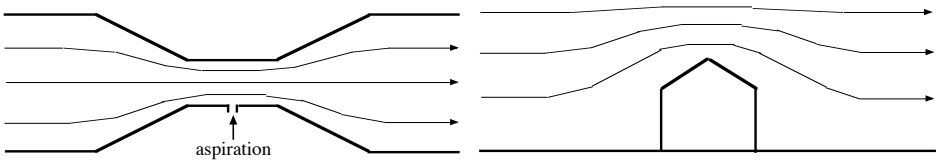

FIGURE 2 – Effet Venturi (deux exemples).

◦ ***Débimètre Venturi.***

La figure 3 p. 11 montre une tubulure horizontale parcourue par un écoulement permanent de liquide non visqueux réputé irrotationnel. Un étranglement fait passer l'aire de la section de la tubulure de S à S' et par conservation du débit la vitesse d'écoulement de v à v' avec $S\,v = S'\,v'$ et la pression de p à p'. L'application du théorème de BERNOULLI, à altitude constante, conduit à :

$$p - p' = \frac{\mu}{2}\,(v'^2 - v^2) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{S}{S'}\right)^2 - 1\right] v^2$$

La mesure de $p-p'$ par un manomètre différentiel, par exemple à mercure, donne accès à v donc au débit.

Cette démonstration suppose que la vitesse soit uniforme dans une section droite de la tubulure ; c'est une bonne approximation si son rayon est grand devant l'épaisseur de la couche limite. De toute façon, ce genre d'instrument se calibre par une expérimentation préalable. Si l'écoulement est gazeux, les choses sont possiblement plus compliquées mais si l'étranglement est minime ce résultat reste une bonne approximation et, sous réserve d'un étalonnage préalable, ce type de débimètre VENTURI est performant.

10. Rappel : nous verrons un peu plus loin que le théorème démontré pour un liquide reste valable en bonne approximation pour un gaz.
11. Même remarque.

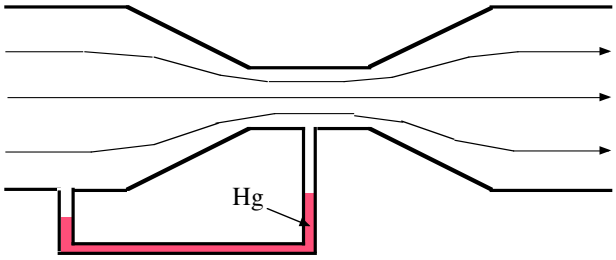

FIGURE 3 – Débitmètre Venturi.

• **Sonde de Pitot.**

La figure 4 p. 11 représente une *sonde de* PITOT[12] placé dans un écoulement de liquide, dont la vitesse $\overrightarrow{V}$ est uniforme loin en avant et parallèle à l'axe du tube. Au niveau du trou B, placé assez loin en arrière, l'écoulement est peu perturbé et la vitesse est quasiment égale à V. Mais la ligne de courant qui arrive au point A, *nez* de la sonde, réunie à un cul-de-sac est forcément nulle. Pour une sonde horizontale, le théorème de BERNOULLI conduit alors à :

$$p_A - p_B = \frac{\mu V^2}{2}$$

et la mesure de $p_A - p_B$ par un manomètre différentiel, par exemple à mercure, donne accès à V, vitesse relative de la sonde et du liquide.

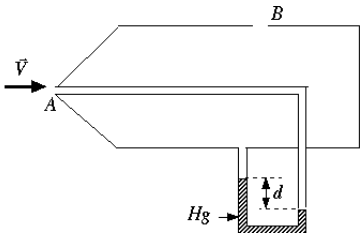

FIGURE 4 – Sonde de Pitot.

Encore une fois, avec un gaz et après étalonnage, on réalise un dispositif de mesure de vitesse et une sonde de PITOT est censée donner des indications correctes de vitesse sur un vol d'avion long-courrier. Une tragédie récente impose une certaine prudence à ce sujet.

12. dispositif de mesure des eaux courantes et de la vitesse des bateaux, proposé en 1732 par le physicien français Henri Pitot.

• **Phénomène de cavitation.**

Considérons (voir figure 5 p. 12) une conduite forcée de section S qui réunit un lac dont la surface se trouve à une altitude H de l'ordre de 100 m (à la pression atmosphérique p_a) et un injecteur, c'est-à-dire, à l'altitude nulle, une fin de canalisation conique amenant la section de la valeur S à une valeur s environ dix fois plus faible. La conservation du débit entraîne que la vitesse dans la conduite est dix fois plus faible que dans le jet et que son carré est cent fois plus faible que celui dans le jet, donc négligeable dans le théorème de Bernoulli, donc (cf supra), on retrouve les lois de l'hydrostatique dans le lac et la conduite et en particulier la pression dans la conduite juste avant l'injecteur est $p_a + \mu\, g\, H$

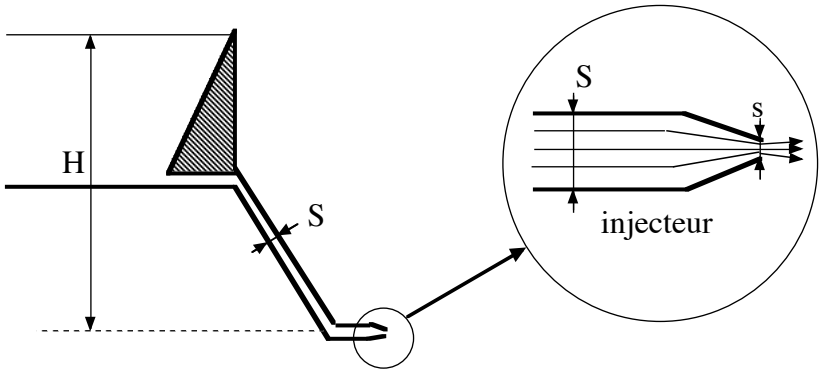

Figure 5 – Conduite forcée.

En l'absence d'injecteur (formellement $s = S$), la conservation du débit conduirait à une vitesse uniforme dans le jet et la conduite (mais toujours négligeable dans le lac), amenerait une simplification dans le théorème de Bernoulli dans le jet (en contact avec l'atmosphère donc à la pression atmosphérique) et la conduite dans laquelle la pression serait, en fonction de l'altitude, égale à $p(z) = p_a - \mu\, g\, z$, ce qui donnerait des valeurs négatives dès que l'altitude dépasse dix mètres et se traduirait par la formation de bulles qui envahiraient la conduite et la désamorceraient : l'écoulement cesserait alors.

Il faut « lire » l'injecteur à rebrousse-poil, non dans le sens de l'écoulement où l'aire de la section semble diminuer donc, à altitude égale, le débit diminuer mais dans le sens inverse où l'aire de la section augmente pour rendre la vitesse négligeable. Ce n'est pas s qui est volontairement petit mais S volontairement énorme (repérez les conduites forcées en montagne, vous le constaterez aisément).

• **Pour conclure.**

Ce paragraphe est volontairement rédigé a minima pour obliger le lecteur à sortir de sa passivité : l'accumulation d'exemples, certes tous intéressants, risque d'induire un ronron assoupissant ; je préfère un lecteur éveillé.

3.c Application aux cours d'eau (fleuves et torrents). Nombre de Froude.

• Régime fluvial, régime torrentiel.

De l'eau s'ecoule dans un canal à fond horizontal de direction Ox, de largeur constante L, et pour un débit volumique D, en amont d'une bosse au fond ou d'un étranglement en largeur limité dans le sens de l'écoulement, la vitesse v_0, supposée horizontale et uniforme, et la hauteur d'eau h_0 sont connues ; en aval la vitesse v, supposée horizontale et uniforme, et la hauteur h sont inconnues ; elles sont solutions d'un système de deux équations, l'une traduisant la conservation du débit, l'autre le théorème de Bernoulli appliqué à deux points en surface, où la pression est la pression atmosphérique p_a, l'un en amont de la bosse, l'autre en aval, soit :

$$\begin{cases} D = S_0\, v_0 = S\, v = L\, h_0\, v_0 = L\, h\, v \\ \frac{v_0^2}{2} + g\, h_0 + \frac{p_a}{\mu} = \frac{v^2}{2} + g\, h + \frac{p_a}{\mu} \end{cases}$$

soit après simplification :

$$\begin{cases} h_0\, v_0 = h\, v \\ \frac{v_0^2}{2} + g\, h_0 = \frac{v^2}{2} + g\, h \end{cases}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues (v et h) a bien sûr une solution évidente ($v = v_0$ et $h = h_0$) mais nous allons montrer que ce n'est pas la seule.

L'élimination de h (tiré de la première équation et reporté dans la seconde) donne :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{g\, h_0\, v_0}{v} - \frac{v_0^2}{2} - g\, h_0 = 0$$

soit encore

$$\frac{v^3}{2} - \left(\frac{v_0^2}{2} + g\, h_0\right) v + g\, h_0\, v_0 = 0$$

Cette équation du troisième degré a, comme toutes ses petites camarades, trois racines réelles ou une réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Au vu des coefficients le produit des trois racines est négatif (coefficients extrêmes de même signe et degré de l'équation impair) et l'on sait qu'il existe une racine positive (v_0) ; comme le produit de deux imaginaires conjugués est forcément positif, le seul cas possible est qu'elle ait une racine négative (physiquement impossible) et deux positives (exceptionnellement confondues, ce que nous escamotons) dont une est v_0 associée à h_0.

Compte tenu de $h_0\, v_0 = h\, v$, ce système a deux solutions : une solution « petite hauteur et grande vitesse », c'est le régime *torrentiel* et une solution « grande hauteur et petite vitesse », c'est le régime *fluvial*.

• **Nombre de Froude.**

Reprenons l'étude en regardant ce qui se passe au niveau de la bosse ou de l'étranglement.

◦ ***Cas de l'étranglement.***

De l'eau s'ecoule dans un canal à fond horizontal de direction Ox, de largeur variable $L(x)$. On note $h(x)$ la hauteur d'eau et $v(x)$ sa vitesse. Comme ci-dessus, on peut affirmer, en régime permanent :

$$\begin{cases} L(x)\,h(x)\,v(x) = D \\ \frac{v(x)^2}{2} + g\,h(x) + \frac{p_a}{\mu} = Cte \end{cases}$$

On prend la différentielle logarithmique[13] de la première équation et la différentielle de la seconde pour arriver à :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}L}{L} + \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}h}{h} = 0 \\ v\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}h = 0 \end{cases}$$

On tire $\mathrm{d}h$ de la seconde et l'on reporte dans la première ; on arrive ainsi successivement, en introduisant le *nombre de* FROUDE $\mathcal{F}(x) = \frac{v}{\sqrt{g\,h}}$, à :

$$\frac{\mathrm{d}L}{L} + \frac{\mathrm{d}v}{v} - \frac{v\,\mathrm{d}v}{g\,h}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{L} + \frac{\mathrm{d}v}{v}\left(1 - \frac{v^2}{g\,h}\right)$$

$$(\mathcal{F}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{d}L}{L}$$

Selon que le nombre de FROUDE est inférieur ou supérieur à l'unité, un étranglement ($\mathrm{d}L < 0$) conduit à une accélération ($\mathrm{d}v > 0$) ou une décélération.

Remarque : si l'on avait éliminé $\mathrm{d}v$ au lieu de $\mathrm{d}h$, la même démarche eût conduit à :

$$\left(\frac{1}{\mathcal{F}^2} - 1\right)\frac{\mathrm{d}h}{h} = \frac{\mathrm{d}L}{L}$$

et selon que le nombre de FROUDE est inférieur ou supérieur à l'unité, un étranglement ($\mathrm{d}L < 0$) conduit à une baisse de niveau ($\mathrm{d}h < 0$) ou une hausse.

◦ ***Cas de la bosse au fond de l'eau.***

Au fond du même canal, qui a désormais une largeur L constante, existe une bosse (une grosse pierre par exemple) entre x_1 et x_2 de hauteur $y(x)$. On note $h(x)$ la hauteur d'eau au dessus de la bosse et $z(x) = h(x) + y(x)$ sa hauteur absolue (voir figure 6 p. 15).

13. On passe au logarithme avant de prendre la différentielle.

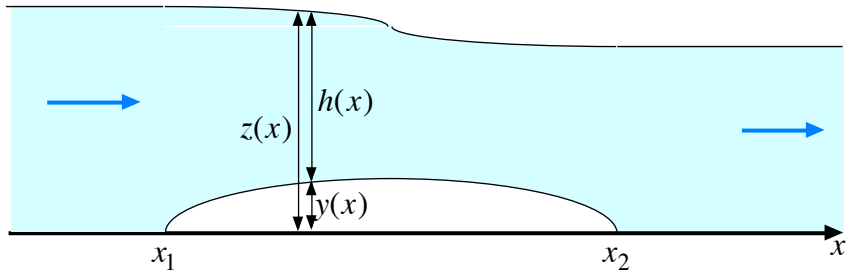

FIGURE 6 – Ecoulement sur une pierre.

La conservation du débit et le théorème de BERNOULLI, appliqué aux points de la surface, s'expriment ici ainsi :

$$\begin{cases} L\,h(x)\,v(x) = D \\ \frac{v(x)^2}{2} + g\,z(x) + \frac{p_a}{\mu} = Cte \end{cases}$$

On prend la différentielle logarithmique de la première équation et la différentielle de la seconde pour arriver, avec $z = h + y$, à :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}h}{h} = 0 \\ v\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}z = v\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}y + g\,\mathrm{d}h = 0 \end{cases}$$

On tire $\mathrm{d}v$ de la première et l'on reporte dans la seconde ; on arrive ainsi successivement, en introduisant le nombre de FROUDE, à

$$-\frac{v^2}{h}\,\mathrm{d}h + g\,\mathrm{d}y + g\,\mathrm{d}h = 0$$

$$\left(\frac{v^2}{g\,h} - 1\right)\,\mathrm{d}h = \mathrm{d}y$$

$$(\mathcal{F}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

d'où l'on déduit aussi avec $h = z - y$ que :

$$(\mathcal{F}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathcal{F}^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Ces deux dernières relations permettent de dire beaucoup de choses intéressantes.

Si lors du passage de la bosse, le nombre de FROUDE reste soit supérieur à l'unité, soit inférieur, de sorte de $\mathcal{F}^2 - 1$ ne s'annule pas et reste de signe constant, alors au passage du sommet de la bosse ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$), la hauteur totale $z(x)$ est extrémale, et, en comparant les

signes de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, minimale si $\mathcal{F} < 1$ (écoulement fluvial) et maximale $\mathcal{F} > 1$ (écoulement torrentiel). Désormais mes lecteurs sauront, à la simple vue de la surface de l'eau à l'aplomb d'une pierre immergée, que l'écoulement est fluvial si la surface forme un creux et torrentiel si elle forme une bosse et pourront ainsi briller aux yeux de leurs compagnes et compagnons de randonnée.

Si lors du passage de la bosse, $\mathcal{F}$ prend la valeur unité et passe de l'autre côté, donc si $\mathcal{F}^2 - 1$ s'annule et change de signe, ce ne peut se faire que si $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ s'annule, donc à l'aplomb du sommet de la bosse. Admettons qu'en amont du sommet de la bosse l'écoulement soit fluvial ($\mathcal{F} < 1$ et $\mathcal{F}^2 - 1 < 0$) donc torrentiel ($\mathcal{F} > 1$ et $\mathcal{F}^2 - 1 > 0$) en aval ; alors avant le sommet $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$ et $\mathcal{F}^2 - 1 < 0$ donc $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} < 0$ et après le sommet $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$ et $\mathcal{F}^2 - 1 > 0$ donc $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} < 0$ et finalement $z(x)$ est monotone décroissant comme sur la figure. C'est la situation classique du déversoir d'une retenue d'eau.

La non-linéarité complique singulièrement l'étude permettant de savoir si $\mathcal{F}$ atteint ou non la valeur unité. Ce chapitre ouvre beaucoup de portes mais ne laisse pas le temps d'aller voir systématiquement ce qu'il y a de l'autre côté.

3.d Le théorème de Kelvin et ses conséquences (et théorème de Lagrange).

Tout ce qui précède suppose que l'écoulement soit irrotationnel, la seule des quatre hypothèses du théorème de Bernoulli généralisé dont la vérification ne saute pas aux yeux (cf supra). Le théorème de Kelvin est la réponse à cette problématique.

• Le théorème.

Considérons une courbe fermée orientée $\Gamma(t)$, mobile et « entraînée » par un fluide parfait incompressible, c'est à dire qu'à tout point A de la courbe $\Gamma(t)$ à l'instant t (notée Γ sur la figure 7 p. 17) correspond un point B de la courbe $\Gamma(t+\mathrm{d}t)$ à l'instant infiniment proche $t + \mathrm{d}t$ (notée Γ' sur la figure) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}(A,t)\,\mathrm{d}t$ où $\overrightarrow{v}(A,t)$ est la vitesse de la quasi-particule de fluide qui se trouve en A à l'instant t.

La circulation du champ de vitesse du fluide le long de $\Gamma(t)$ à l'instant t est par définition :

$$\mathcal{C}(t) = \oint_{\Gamma(t)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_{\Gamma(t)} \overrightarrow{v}(A,t) \cdot \overrightarrow{AA'}$$

où, pour une meilleure lisibilité de la démonstration qui suit, l'élément $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ de Γ est rebaptisé $\overrightarrow{AA'}$ avec A' infiniment proche de A.

Nous nous proposons de monter que, pour un fluide parfait incompressible, $\mathcal{C}(t)$ est indépendant du temps ; pour cela il suffit de montrer que, pour $\mathrm{d}t$ infiniment petit, on a $\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}(t + \mathrm{d}t)$.

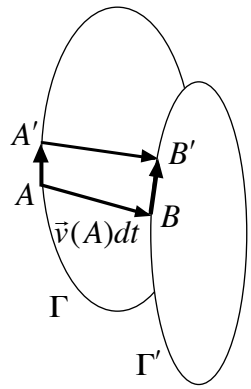

FIGURE 7 – Théorème de Kelvin.

Nous calculerons $\mathcal{C}(t+\mathrm{d}t)-\mathcal{C}(t)$ par intégration de la différence entre les deux termes $\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{v}(A,t)\cdot\overrightarrow{AA'}$ qui se correspondent dans l'entraînement par le fluide. Remarquons au préalable que :

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{v}(A,t)\,\mathrm{d}t+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{v}(A',t)\,\mathrm{d}t$$

par construction. On a donc successivement :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{v}(A,t)\cdot\overrightarrow{AA'}=\cdots\\
&\qquad\cdots=\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\Big(-\overrightarrow{v}(A,t)\,\mathrm{d}t+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{v}(A',t)\,\mathrm{d}t\Big)-\overrightarrow{v}(A,t)\cdot\overrightarrow{AA'}=\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots=\left[\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)-\overrightarrow{v}(A,t)\right]\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\left[\overrightarrow{v}(A',t)-\overrightarrow{v}(A,t)\right]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Si l'on divise par $\mathrm{d}t$, on reconnaîtra dans $\dfrac{\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)-\overrightarrow{v}(A,t)}{\mathrm{d}t}$ la définition (par passage à la limite) de la dérivée particulaire du fluide notée $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}$, donc le premier terme du résultat qui précède est :

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot\overrightarrow{AA'}\,\mathrm{d}t$$

Dans le second, remplacer $\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)$ par $\overrightarrow{v}(A,t)$ conduit à l'erreur $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\,\mathrm{d}t$ du premier ordre sur la vitesse mais du second sur le terme qui contient déjà un facteur $\mathrm{d}t$. Résumons, au premier ordre :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{v}(A,t)\cdot\overrightarrow{AA'}=\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots=\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot\overrightarrow{AA'}\,\mathrm{d}t+\overrightarrow{v}(A,t)\cdot\left[\overrightarrow{v}(A',t)-\overrightarrow{v}(A,t)\right]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit en revenant à la notation classique $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{AA'}$ et en notant dans le même esprit $\mathrm{d}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(A',t) - \overrightarrow{v}(A,t)$

$$\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{v}(A,t)\cdot\overrightarrow{AA'} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}\,\mathrm{d}t + \overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t$$

Remarque : On a de la sorte explicité la différentielle du produit $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, classiquement $\mathrm{d}(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}) = \mathrm{d}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} + \overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}(\overrightarrow{\mathrm{d}l})$, mais si l'on avait commencé ainsi le raisonnement, comment comprendre que $\mathrm{d}\overrightarrow{v}$ cache l'accélération particulaire et non le $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ eulérien et quel sens donner à $\mathrm{d}(\overrightarrow{\mathrm{d}l})$?

Par intégration sur le circuit fermé $\Gamma(t)$ puisqu'au premier ordre, on a tout ramené à celui-ci, on a, au passage à la limite :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{C}(t+\mathrm{d}t)-\mathcal{C}(t)}{\mathrm{d}t} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{1}{\mathrm{d}t}\oint\left[\overrightarrow{v}(B,t+\mathrm{d}t)\cdot\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{v}(A,t)\cdot\overrightarrow{AA'}\right] = \oint_{\Gamma(t)}\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} + \oint_{\Gamma(t)}\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{v}$$

Si l'on intègre sur la courbe fermée d'un point O au même point O après un tour de piste, la seconde intégrale est :

$$\oint_{\Gamma(t)}\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{v} = \left[\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right]_O^O = 0$$

Pour un fluide parfait incompressible, l'équation d'Euler sous la forme la moins développée $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{g} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p}{\mu}$ permet d'écrire, pour le premier terme, avec une propriété classique du gradient :

$$\oint_{\Gamma(t)}\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_{\Gamma(t)}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(g\,z - \frac{p}{\mu}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_{\Gamma(t)}\mathrm{d}\left(g\,z - \frac{p}{\mu}\right) = \left[g\,z - \frac{p}{\mu}\right]_O^O = 0$$

Ce qui démontre le théorème de Kelvin : pour un fluide parfait incompressible, la circulation du champ de vitesse le long d'une courbe fermée entraînée par le fluide ne varie pas dans le temps.

Un exemple simple en est une version domestiquée de *Maelstrom*[14] qu'est la vidange d'un évier. Si Γ est un cercle tracé à la surface de l'eau de même axe que la bonde, son entraînement par le fluide lui procure un rayon de plus en plus petit. Si loin de la bonde, au niveau de ce cercle, de grand rayon à cette distance, s'amorce une légère rotation[15],

14. On pense à la nouvelle d'Edgar Allan Poe.
15. On invoque souvent la force de Coriolis pour expliquer la mise en rotation avec pour conséquence que le sens de rotation diffère d'un hémisphère à l'autre mais ça ne résiste pas à l'analyse ni théorique (ordre de grandeur bien trop faible), ni expérimentale.

alors dans son mouvement centripète, le cercle de rayon et de circonférence de plus en plus petits pour une circulation de la vitesse inchangée, voit celle-ci augmenter de plus en plus, ce qui génère un fort tourbillon à l'entrée de la bonde.

Cet exemple montre du reste que le théorème de Kelvin est une façon d'adapter la conservation du moment cinétique.

Remarque 1 : le lien avec la notion d'écoulement rotationnel ou irrotationnel est clair dès que l'on pense au théorème de Stokes ; en effet si Σ est une surface ouverte orientée de contour orienté Γ (en respectant la règle du tire-bouchon), on a :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

c'est-à dire que la circulation de la vitesse le long de Γ est égale au flux de son rotationnel à travers Σ.

Remarque 2 : Le théorème de Kelvin n'utilise pas l'hypothèse de l'écoulement permanent ce qui permet d'en déduire un corollaire parfois appelé théorème de Lagange : si à un instant initial, l'écoulement est partout irrotationnel, alors à tout moment, il reste partout irrotationnel. La démonstration en est simple : plaçons à l'instant t dans un voisinage d'un point M suffisamment petit pour que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v}$ y soit quasiment constant, à l'instant t et pour toute surface Σ, contenue dans ce voisinage, de contour Γ, on a :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \approx \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \cdot \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{S}$$

en introduisant le vecteur surface $\overrightarrow{S}$ de Σ. Or, en remontant le temps jusque l'instant initial, Γ est la position à l'instant t d'un contour fermé Γ_0, contour d'une surface Σ_0 qui a été entraîné par le fluide et à qui l'on peut appliquer le théorème d'Kelvin avec une position initiale où le rotationnel de la vitesse est partout nul, d'où :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_{\Gamma_0} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\Sigma_0} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma_0} \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \overrightarrow{0}$$

La synthèse des deux précédents résultats prouve qu'à l'instant quelconque t, qu'en un point M quelconque et quelque soit $\overrightarrow{S}$ dans un voisinage de M, on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{S} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ pour tout M et tout t, CQFD.

Remarque 3 : Un théorème, dont nous exploiterons plus en détail les conséquences au paragraphe 7.a p. 50, permet de démontrer le théorème de Lagrange indépendamment du théorème de Kelvin. Pour un fluide parfait incompressible (hors forces non courantes et en régime a priori non permanent), le théorème d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g\, z - \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{p}{\mu} \right)$$

En en prenant le rotationnel (qui commute avec la dérivée temporelle) et sachant qu'un gradient a un rotationnel nul, on en déduit que :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}\right)$$

Si à $t = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}$ est partout nul, alors en $t = 0$, $\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}}{\partial t}$ est partout nul et donc à l'instant infiniment voisin, $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}$ est encore partout nul et ainsi de suite de proche en proche. En fait mathématiquement, il est délicat de le montrer de façon propre mais l'explication se niche là-dedans.

• Un situation classique garantissant un écoulement irrotationnel.

Revenons à la situation de l'écoulement parfait et stationnaire de fluide incompressible. Il est fréquent d'étudier un écoulement autour d'un obstacle tel que, loin en amont de celui-ci, la vitesse soit uniforme. La plupart des exemples qui précèdent sont dans ce contexte. Dans une vaste région de l'espace, on a donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{Cte}$ et donc $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

En raisonnant comme dans la deuxième remarque ci-dessus, on montre alors que l'écoulement est partout irrotationnel. Voilà pourquoi un écoulement parfait et stationnaire de fluide incompressible est en pratique aussi irrotationnel.

Remarque : signalons quand même le paradoxe suivant : le seul phénomène qui puisse avoir rendu la vitesse uniforme en amont de l'obstacle est la viscosité or le fluide est parfait. C'est qu'un fluide parfait n'est qu'une approximation d'un fluide très légèrement visqueux ; les forces de viscosité sont bien négligeables mais non nulles et sur un très long trajet (on vient de moins l'infini !), elles ont eu le temps de jouer leur rôle.

4 Ecoulements parfaits, incompressibles et stationnaires.

Le lecteur est censé avoir lu le chapitre B-XIII et maîtriser la différence entre fluide incompressible et écoulement incompressible.

On se place cette fois dans le cas d'un fluide compressible (un gaz en pratique) dans un écoulement stationnaire (on conçoit en ce sens l'alimentation du dispositif en liquide, c'est aisé à faire), parfait (un gaz l'est toujours en dehors de la mince couche limite) et incompressible (là, on ne voit pas trop si c'est courant ou exceptionnel ; nous montrerons au paragraphe 4.b p. 22, quand nous serons aguerris, dans quelles conditions c'est le cas).

4.a Théorème de Bernoulli simple et applications.

Considérons un écoulement parfait, stationnaire et incompressible. L'équation d'Euler est valable puisque l'écoulement est parfait. La dérivée temporelle de la vitesse est nulle

puisque l'écoulement est stationnaire. Le champ de pesanteur uniforme dérive du potentiel $g\,z$. Donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz) - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\text{grad}}p$$

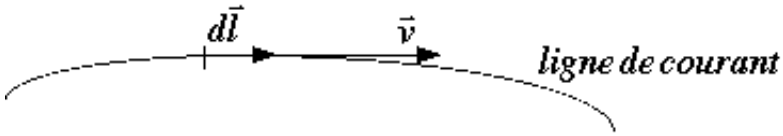

FIGURE 8 – Théorème de Bernoulli simple.

Multiplions scalairement par un segment élémentaire $\overrightarrow{\text{d}l}$ d'une ligne de courant, donc parallèle à la vitesse ; le produit mixte qui apparaît est donc nul et grâce à la formule (cf analyse vectorielle) $\overrightarrow{\text{grad}}X.\overrightarrow{\text{d}l} = \text{d}X$, on tire, puisque μ est constant sur la trajectoire (écoulement incompressible) :

$$\text{d}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\mu}\right) = 0$$

soit, puisqu'en régime permanent, rien ne dépend du temps :

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\mu} = Cte \textit{ sur une même ligne de courant}$$

car $\overrightarrow{\text{d}l}$ avait été choisi parallèle à la ligne de courant.

La démonstration est éclairée par la figure 8 p. 21.

Attention à bien comprendre que chaque trajectoire ou ligne de courant a une constante différente. Retenons donc :

Pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, $\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\mu} = Cte$ sur une même ligne de courant

La plupart des exemples d'application du théorème de BERNOULLI généralisé, établi pour un liquide, sont transposables ici. Certes il semble que l'on doive trouver la constante pour chaque ligne de courant, mais dans la situation fréquente d'une vitesse uniforme en amont de l'obstacle, donc au début de toutes les lignes de courant, la vitesse est connue et puisque une vitesse uniforme, à un changement de référentiel galiléen près, c'est le repos, le champ de pression en fonction de l'altitude est connu, rigoureusement au travers d'un

modèle (isotherme, adiabatique sec ou humide, voir chapitre sur l'hydrostatique), mais en pratique pour des obstacles de quelques mètres de hauteur au plus, on peut, en très bonne approximation, considérer cette pression en amont de l'obstacle comme uniforme pour un gaz.

4.b Conditions d'incompressibilité d'un écoulement.

Si nous appliquons à une quasi-particule de masse de $\mathrm{d}m$, constante et de volume $\mathrm{d}V$ éventuellement variable (donc de masse volumique $\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ éventuellement variable) un théorème énergétique, ce ne sera pas celui de l'énergie cinétique, toujours suspect pour un système déformable à cause des forces intérieures, mais le premier principe [16] de la thermodynamique (en tenant compte de l'énergie cinétique macroscopique qui fait intervenir, par définition de celle-ci, la vitesse de la quasi-particule) d'où, en notant u l'énergie interne massique, $\mathcal{P}_m$ la puissance mécanique totale et $\mathcal{P}_{th}$ la puissance thermique totale et en utilisant la notion de dérivée particulaire :

$$\mathrm{d}m\,\frac{D}{Dt}\left(u+\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right)=\mathrm{d}m\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(u+\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right)+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(u+\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right)\right]=\mathcal{P}_m+\mathcal{P}_{th}$$

Plaçons-nous dans le cadre d'un écoulement parfait qui suppose des gradients de vitesses suffisamment petits pour négliger les forces de viscosité (on est en dehors de la couche limite) ; dans ce cas et sauf conditions très particulières, les autres paramètres ont aussi des gradients faibles, en particulier la température et l'on peut alors négliger la conduction thermique et la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$. La puissance mécanique est la somme de la puissance des forces de pesanteur soit $\mathrm{d}m\,\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v}$ et de celles des forces de pression, soit, avec le théorème de Green-Ostragadski [17] :

$$\oiint -p\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}\cdot\overrightarrow{v}=-\oiint p\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=-\iiint \mathrm{div}(p\,\overrightarrow{v})\,\mathrm{d}_3V=-\mathrm{div}(p\,\overrightarrow{v})\iiint \mathrm{d}_3V=-\mathrm{div}(p\,\overrightarrow{v})\,\mathrm{d}V$$

(ne pas faire l'erreur de multiplier l'équivalent volumique de la force par la vitesse ; on revient aux vraies forces et aux vraies puissances).

Plaçons-nous en régime stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t}\left(u+\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right)=0$) et utilisons une formule classique d'analyse vectorielle au produit $p\,\overrightarrow{v}$, réécrit comme produit $\frac{p}{\mu}\cdot\mu\,\overrightarrow{v}$ puis la formule de conservation de la masse ($\frac{\partial\mu}{\partial t}+\mathrm{div}(\mu\,\overrightarrow{v})=0$) avec, en régime stationnaire $\frac{\partial\mu}{\partial t}=0$; après report et division par μ, on arrive successivement à :

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(u+\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right)=\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v}-\frac{1}{\mu}\,\mathrm{div}(p\,\overrightarrow{v})=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g\,z)\cdot\overrightarrow{v}-\frac{p}{\mu^2}\,\mathrm{div}(\mu\,\overrightarrow{v})-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{p}{\mu}\right)$$

16. Voir chapitre E-III.
17. On découpe $\mathrm{d}V$ en éléments infiniment petits d_3V puis on utilise le fait que $\mathrm{d}V$ est suffisamment petit pour que la fonction à intégrer soit quasiment constante.

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(u + \frac{p}{\mu} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z \right) = -\frac{p}{\mu^2}\,\text{div}(\mu\,\overrightarrow{v}) = \frac{p}{\mu^2}\,\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

en multipliant par dt, la facteur $\overrightarrow{v}\,\text{d}t$ est un déplacement $\overrightarrow{\text{d}l}$ parallèle à la ligne de courant, donc (cf démonstration du théorème de Bernoulli simple), le long d'une ligne de courant, on a :

$$\overrightarrow{\text{d}l} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(u + \frac{p}{\mu} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z \right) = \text{d}\left(u + \frac{p}{\mu} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z \right) = 0$$

et en conséquence la gandeur $\left(u + \frac{p}{\mu} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z \right)$ est constante sur une ligne de courant ; on reconnaît enfin l'enthalpie massique h dans $h = u + \frac{p}{\mu}$.

Concluons : pour un écoulement parfait (ce qui permet de négliger la conduction thermique) et stationnaire, la grandeur $h + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,z$ est constante sur une ligne de courant.

Donnons maintenant quelques ordres de grandeur pour un gaz, parfait en bonne première approximation. Prenons l'exemple de l'air autour des conditions ordinaires ; grosso modo $h = \frac{C_{P,mol}\,T}{M} \approx \frac{7}{2}\,\frac{RT}{M}$ où $R = 8,32\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante de gaz parfaits, $M = 29 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire et $T \sim 300$ K la température absolue, d'où $h \sim 3 \cdot 10^5\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Nous admettrons que les variations du terme $g\,z$ sont parfaitement négligeables si elles sont inférieures au millième du terme h, ce qui correspond avec $g = 9,8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ à des variations d'altitude de la ligne de courant inférieures à 30 mètres, ce qui est le cas pour les obstacles les plus courants que l'on ait à traiter. Donc pour un gaz en écoulement stationnaire, parfait (avec comme conséquence des échanges thermiques négligeables sauf cas particulier), on a donc en pratique $h + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2}$ qui est constant sur une ligne de courant.

Poursuivons en écrivant pour l'air $h = \frac{C_{P,mol}\,T}{M} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{RT}{M}$ avec $\gamma = 1,4$; on y reconnaît (voir le chapitre B-XV où l'on traite des ondes sonores) la vitesse du son, que nous noterons ici c par commodité, égale à $c = \sqrt{\frac{\gamma\,RT}{M}}$ donc $h = \frac{c^2}{\gamma-1}$. Nous en déduirons, en nous donnant une marche de manœuvre un peu plus grande, que le terme $\frac{v^2}{2}$ est négligeable devant h s'il est inférieur au centième, soit avec $\gamma = 1,4$ si :

$$v^2 < 2 \cdot \frac{1}{100}\,\frac{c^2}{\gamma - 1} = 2 \cdot \frac{1}{100}\,\frac{c^2}{0,4} = 0,05\,c^2$$

soit avec, pour $T \sim 300\ K$, $c \sim 3,5 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v < 0,22\,c \sim 80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \sim 300\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

La conclusion en est que pour pour un gaz en écoulement stationnaire, parfait (avec comme conséquence des échanges thermiques négligeables sauf cas particulier), si les dénivelés des lignes de courants ne dépassent pas une trentaine de mètres et si (plus finement

que ce qui vient d'être dit) les variations de vitesse le long d'une ligne de courant restent inférieure au cinquième de la vitesse du son (soit à 300 km $\cdot$ h^{-1} pour l'air aux conditions ordinaires), alors h est une constante donc T aussi dans le modèle du gaz parfait. Comme de plus les gradients sont faibles, il y a peu d'échanges thermiques et peu de causes d'irréversibilité, on est dans un cadre quasiment adiabatique réversible ou isentropique d'où puisque T est constant et que l'entropie est fonction uniquement de deux paramètres d'état, p et T par exemple, p est lui aussi constant d'où finalement μ aussi. Un tel écoulement est donc automatiquement incompressible si les deux critères ci-dessus sont vérifiés.

Les remarques finales de deux derniers paragraphes montrent qu'en bonne approximation, si le champ de vitesses est uniforme et pas trop proche de la vitesse du son (jusque 20%) loin d'un obstacle de taille raisonnable (quelques dizaines de mètres au plus dans le sens vertical), un écoulement parfait et stationnaire est aussi irrotationnel et incompressible et on peut lui applique le théorème de Bernoulli généralisé, même si le fluide est compressible... mais pas rigoureusement.

4.c Découplage entre mécanique macroscopique et thermodynamique.

Profitons, pendant qu'elle est encore chaude, de la démarche utilisée dans le paragraphe précédent pour montrer une propriété intéressante même si ce n'est pas tout à fait sa place [18].

Nous avons montré dans le dernier paragraphe que, sans aucune hypothèse, pour un écoulement parfait, on a :

$$\mathrm{d}m\,\frac{Du}{Dt} + \mathrm{d}m\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{th} = \mathrm{d}m\,\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v} - \mathrm{div}(p\,\overrightarrow{v})\,\mathrm{d}V + \mathcal{P}_{th}$$

où (voir le premier principe de la thermodynamique au chapitre E-III) l'énergie interne massique u intègre l'énergie potentielle des forces intérieures (à la quasi-particule, bien entendu). En divisant par dm, en calculant la dérivée particulaire d'un carré comme toute dérivée de carré et en calculant, cette fois sans artifice, la divergence de $p\,\overrightarrow{v}$:

$$\frac{Du}{Dt} + \overrightarrow{v}\cdot\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v} - \frac{1}{\mu}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\cdot\overrightarrow{v} + p\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{v}) + \mathcal{P}_{th,mass}$$

où $\mathcal{P}_{th,mass}$ est la puissance thermique reçue par unité de masse.

Or l'équation d'Euler, multipliée scalairement par la vitesse donne :

$$\overrightarrow{v}\cdot\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) = \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\cdot\overrightarrow{v}$$

d'où par différence :

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{p}{\mu}\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{v} + \mathcal{P}_{th,mass}$$

18. De toute façon, je ne savais pas trop où la placer harmonieusement.

dont le premier terme du second membre va être interprété comme une puissance mécanique par unité de masse, reçue de la part des forces de pression.

On assiste ainsi à un découplage entre une relation purement mécanique et une relation purement thermodynamique :

$$\begin{cases} \dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) = \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{v} - \dfrac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p \cdot \overrightarrow{v} \\ \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{p}{\mu}\,\text{div}\,\overrightarrow{v} + \mathcal{P}_{th,mass} \end{cases}$$

Remarque : pour un écoulement non parfait, on peut reprendre cette étude mais il faudra auparavant déterminer l'équivalent volumique des forces de viscosité, ce qui n'est pas simple dans le cas général.

Attention ! On trouve souvent dans la littérature le raisonnement FAUTIF qui consiste à appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la quasi-patricule et qui conduit à :

$$\overrightarrow{v} \cdot \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{v} - \frac{1}{\mu}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,p \cdot \overrightarrow{v} + p\,\text{div}\,\overrightarrow{v}\right) + \mathcal{P}_{int,mass}$$

en introduisant la puissance des forces intérieures par unité de masse notée $\mathcal{P}_{int,mass}$. Cette fois, la différence avec l'équation d'Euler, multipliée scalairement par la vitesse conduit à :

$$0 = -\frac{p}{\mu}\,\text{div}\,\overrightarrow{v} + \mathcal{P}_{int,mass}$$

d'où l'on déduit, tout aussi FAUTIVEMENT, que la puissance des interactions intérieure est nulle pour un fluide un écoulement incompressible. C'est faux tout simplement parce, pour un système déformable, l'énergie cinétique ne peut pas se calculer à partir des vitesses macroscopiques ; on oublie en effet la vitesse d'agitation thermique (voir le chapitre E-III sur le premier principe de la thermodynamique).

Toutefois si l'on remplace, par la pensée, le fluide par un ensemble de particules indéformables (les quasi-particules dont on figerait l'intérieur), alors, formellement, le raisonnement fautif et sa conséquence fautive deviennent valables [19] dans ce modèle. Mais pour cela, il faudrait quand même commencer par dire que l'on utilise ce modèle ! Et de toute façon, le fait que la puissance des forces intérieures est nulle pour un fluide incompressible ou un écoulement incompressible ne sert en fait à rien en soi. Par souci de conciliation, je veux bien parler d'un théorème de l'énergie cinétique macroscopique et de puissance apparente des forces intérieures, notions à utiliser avec prudence et modération.

Une dernière remarque : L'équation d'Euler, vectorielle et comptant donc pour trois scalaires et la formulation de la conservation de la masse ($\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}\,(\mu\,\overrightarrow{v}) = 0$), formule scalaire, donc en tout quatre équations scalaires pour les variables $\overrightarrow{v}$ (vectorielle comptant pour trois scalaires), p (scalaire) et μ (scalaire) soit cinq inconnues scalaires, c'est

19. Et encore, il faudrait ajouter à ce modèle que les énergies cinétiques de rotation des quasi-particules restent négligeables devant leurs énergies de translation.

insuffisant ; voilà pourquoi il a fallu passer ci-dessus par l'aspect énergétique au travers de la thermodynamique. Toutefois dans le cas d'un fluide incompressible, μ cesse d'être une inconnue et devient un paramètre et l'on n'a plus besoin dans ce cas de thermodynamique.

5 Recherche d'écoulements irrotationnels et incompressibles

Tout ce qui précède montre qu'un écoulement parfait et stationnaire (ce qui en général se devine aisément à partir du protocole expérimental) est très souvent aussi irrotationnel et incompressible (ce qui en général ne saute pas aux yeux). C'est une grande avancée car cela nous offre sur un plateau un formidable outil d'investigation théorique, voire expérimental. En effet, l'analyse vectorielle nous permet d'affirmer que si l'écoulement est irrotationel ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$), alors le champ des vitesses dérive d'un *potentiel des vitesses* que nous noterons ici Φ, c'est à dire que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$. Si de plus l'écoulement est incompressible, donc si le champ des vitesses a une divergence nulle, on peut affirmer que :

$$0 = \mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi\right) = \Delta\Phi$$

Le potentiel des vitesses a un laplacien nul et l'équation $\Delta\Phi = 0$ avec des conditions aux limites (la vitesse est tangente à la paroi des obstacles et, en général, elle est connue très loin d'eux) est l'équation aux dérivées partielles qui a été la plus étudiée. Voici quelques pistes que l'on peut explorer.

5.a Analogies électrostatiques (et paradoxe de d'Alembert).

• La méthode.

On sait que le potentiel électrique V entre des conducteurs à l'équilibre ou entre des charges ponctuelles immobiles vérifie $\Delta V = 0$, ce qui fournit, en exploitant des situations électrostatiques de même géométrie qu'un problème de mécanique des fluides, quelques solutions tentantes comme solutions à $\Delta\Phi = 0$ et toute combinaison linéaire de ces solutions en sera une autre. Avec un peu de chance, on pourra adapter les coefficients de la combinaison linéaire de façon à vérifier les conditions aux limites du problème mécanique. Expliquons tout cela avec un exemple, ce sera plus clair.

• Un exemple à symétrie sphérique.

Considérons une sphère de centre O, de rayon R, placé dans un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel de fluide incompressible dont la vitesse loin en amont est uniforme dans une direction choisie comme axe Ox et que l'on note $v_\infty\,\overrightarrow{e_x}$. A quelle situations électrostatiques peut-on penser ? Trois viennent aisément à l'esprit :

– Celle d'un champ uniforme $E_0\,\overrightarrow{e_x}$ correspondant au potentiel $V = -E_0\,x$. Retenons donc des solutions de la forme $\Phi_1 = A\,x$ dont le gradient (calcul en coordonnées cartésiennes) est $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_1 = A\,\overrightarrow{e_x}$
– Celui du potentiel créé par une charge ponctuelle en O en $\frac{1}{r}$ où r est la distance à O. Retenons donc des solutions de la forme $\Phi_2 = \frac{B}{r}$ dont le gradient (calcul en coordonnées sphériques) est $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_2 = -\frac{B}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$
– Celui d'un dipôle électrique de moment parallèle à l'axe Ox noté $p\,\overrightarrow{e_x}$ et qui donne en coordonnées sphèriques un potentiel en $\frac{\cos\theta}{r^2}$. Retenons donc des solutions de la forme $\Phi_3 = \frac{C\,\cos\theta}{r^2}$ dont le gradient est $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_3 = -\frac{2\,C\,\cos\theta}{r^3}\,\overrightarrow{e_r} - \frac{C\,\sin\theta}{r^3}\,\overrightarrow{e_\theta}$

Cherchons donc un potentiel des vitesses de la forme :

$$\Phi = A\,x + \frac{B}{r} + \frac{C\,\cos\theta}{r^2}$$

correspondant à un champ de vitesses [20] :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi = A\,\overrightarrow{e_x} - \frac{B}{r^2}\,\overrightarrow{e_r} - \frac{2\,C\,\cos\theta}{r^3}\,\overrightarrow{e_r} - \frac{C\,\sin\theta}{r^3}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

où on laisse provisoirement un mélange d'approches cartésiennes et sphériques. On s'aidera de la figure 9 p. 27 où l'on a tracé (maladroitement) la ligne de courant passant par un point M donné.

Loin ($r \to \infty$) en amont ($\theta > \frac{\pi}{2}$ qui se révélera sans effet sur le résultat) on doit avoir $\overrightarrow{v} = v_\infty\,\overrightarrow{e_x}$; faisons donc tendre r vers l'infini dans l'expression de la vitesse et égalons au résultat escompté ; on arrive à $A\,\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{0} = v_\infty\,\overrightarrow{e_x}$ soit $A = v_\infty$.

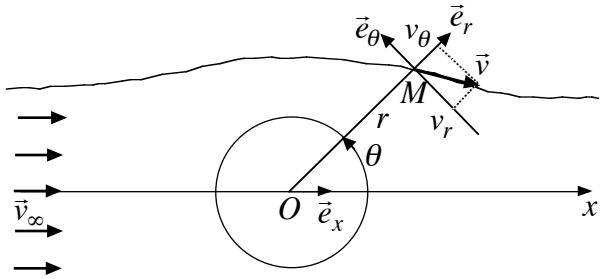

FIGURE 9 – Ecoulement autour d'une sphère.

Pour aller plus loin, calculons les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse dans le plan méridien où elle est contenue par symétrie, on doit alors remarquer que l'on a

20. En mécanique des fluides on choisit le potentiel de façon que $\overrightarrow{v} = +\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$ avec un signe différent de celui que l'on trouve en électrostatique ($\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$).

$\overrightarrow{e_x} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$ et les composantes sont :

$$\begin{cases} v_r = A\,\cos\theta - \dfrac{B}{r^2} - \dfrac{2\,C\,\cos\theta}{r^3} = \left(A - \dfrac{2\,C}{r^3}\right)\,\cos\theta - \dfrac{B}{r^2} \\ v_\theta = -A\,\sin\theta - \dfrac{C\,\sin\theta}{r^3} = -\left(A + \dfrac{C}{r^3}\right)\,\sin\theta \end{cases}$$

A la surface de la sphère ($r = R$), en chacun de ses points ($\forall\,\theta$), la vitesse est tangente à la sphère ($v_r = 0$), d'où :

$$\forall\,\theta \quad \left(A - \frac{2\,C}{R^3}\right)\,\cos\theta - \frac{B}{R^2} = 0$$

d'où l'on tire $B = 0$ et $C = \frac{1}{2}\,A\,R^3 = \frac{1}{2}\,v_\infty\,R^3$; et l'on en déduit l'expression du potentiel des vitesses (non explicité ici car il est devenu inutile) et celle du champ des vitesses, au travers de ses composantes :

$$\begin{cases} v_r = v_\infty\,\left(1 - \dfrac{R^3}{r^3}\right)\,\cos\theta \\ v_\theta = -v_\infty\,\left(1 + \dfrac{R^3}{2\,r^3}\right)\,\sin\theta \end{cases}$$

• **Calcul de la pression et paradoxe de d'Alembert.**

∘ ***Pression en tout point.***

Puisque l'on est dans le cadre de la validité du théorème de Bernoulli généralisé, on sait que $\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\mu}$ est une constante. Loin en amont de la sphère, la vitesse est connue et uniforme ; dès lors la pression est hydrostatique (il suffit de se placer dans le référentiel galiléen en translation à $\overrightarrow{v}_\infty$ pour s'en convaincre) donc que $p + \mu\,g\,Z$ est une constante notée ici p_∞ ; on a donc successivement, en reportant l'expression de la vitesse trouvée ci-dessus :

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\mu} = \frac{\overrightarrow{v}^2_\infty}{2} + \frac{p_\infty}{\mu}$$

$$p = p_\infty + \frac{\mu}{2}\,\left(\overrightarrow{v}^2_\infty - \overrightarrow{v}^2\right) - \mu\,g\,Z$$

$$p = p_\infty + \frac{\mu}{2}\,\left(v^2_\infty - \overrightarrow{v}^2_r - v^2_\theta\right) - \mu\,g\,Z$$

$$p = p_\infty + \frac{\mu\,v^2_\infty}{2}\,\left[1 - \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)^2\,\cos^2\theta - \left(1 + \frac{R^3}{2\,r^3}\right)^2\,\sin^2\theta\right] - \mu\,g\,Z$$

Remarque : on a noté l'altitude Z car on ne préjuge rien de la direction de l'accélération $\overrightarrow{g}$ de la pesanteur par rapport à $\overrightarrow{v}_\infty$

◦ ***Force exercée sur la sphère. Paradoxe de d'Alembert.***

En particulier, au niveau de la sphère ($r = R$), l'expression de la pression est plus simple :

$$p = p_\infty + \frac{\mu\, v_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right) - \mu\, g\, Z$$

On se place dans un premier temps dans le cas où $\mu\, g\, R$ valeur maximale de $\mu\, g\, Z$ sur la sphère est négligeable devant p_∞, alors on constate que pour deux points diamétralement opposés, les valeurs de θ sont supplémentaires (somme égale à π) donc les pressions égales ; les forces de pression s'annulent deux à deux et leur bilan est nul ; ce qui est manifestement contradictoire avec l'expérience ce qui constitue le paradoxe de d'Alembert.

Le modèle néglige deux choses, le première est l'existence possible de tourbillons en arrière de la sphère, ce qui n'explique pas tout car le paradoxe persiste aux faibles nombres de Reynolds où les tourbillons n'existent pas ; la seconde est la viscosité η qui se manifeste dans la couche limite. J'aime expliquer ainsi : si un phénomène X dépend de la viscosité η et que celle-ci est très faible (pour l'eau par exemple), on peut se contenter d'un développement de Taylor au premier ordre non nul, soit $X(0)$ si celui-ci est non nul, soit $\eta\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\eta}(0)$ si $X(0)$ est nul ; le résultat de notre calcul montre que l'on est dans ce second cas. Il faut trouver une autre méthode pour trouver la force de traînée. Par contre, les résultats antérieurs (vitesse et pression en un point) sont non nuls donc acceptables.

Remarque 1 : si l'on veut ajouter à ce résultat paradoxal, le terme dû au $\mu\, g\, Z$ négligé, on ne se lance surtout pas dans une intégration et l'on se convainc qu'il s'agit de la poussée d'Archimède que l'on sait calculer facilement.

Remarque 2 : les situations géométriques où l'on peut résoudre un problème électrostatique sont rares ; donc cette méthode est elle aussi rarement exploitable. Mais ces situations sont primordiales en physique car ce sont les seules où l'on puisse confronter la théorie et l'expérience ; il ne faut donc pas les dénigrer sous le mauvais prétexte que leur résolution est plus mathématique que physique, ce serait mal comprendre ce qu'est la physique.

5.b Approche mathématique directe (et l'effet Magnus).

• La méthode. Un exemple à symétrie cylindrique.

Lorsque la symétrie s'y prête, on résout directement $\Delta\Phi = 0$ à partir de l'expression du laplacien, ce qui limite en pratique la méthode aux symétries sphérique ou cylindrique (voir plus haut l'importance de ces rares cas). Pour changer, prenons une symétrie cylindrique.

Prenons le cas d'un écoulement parfait stationnaire irrotationnel de fluide incompressible autour d'un cylindre infini (en pratique de longueur finie grande devant son rayon R) d'axe Oz et dont la vitesse loin en amont du cylindre est uniforme dans une direction orthogonale à l'axe du cylindre et choisie comme axe Ox et que l'on note $v_\infty\,\overrightarrow{e_x}$.

L'invariance par translation selon Oz, axe du cylindre, conduit à chercher des solutions

pour Φ indépendantes de z soit $\Phi(r,\theta)$ en coordonnées cylindriques. L'angle θ est défini à $2\,\pi$ près ce qui conduit à rechercher des solutions $2\,\pi$-périodiques en θ décomposable en série de FOURIER ; les harmoniques de rang 2, 3, 4, etc. supposent une invariance « de répétition » par rotation autour de Oz d'angle 180°, 120°, 90°, etc. qui n'est pas conforme avec les conditions aux limites (en particulier à l'infini) et le terme constant suppose un invariance par rotation à rejeter pour les mêmes raisons. Enfin la symétrie par rapport au plan xOz amène à rechercher des solutions paires en θ ; bref, nous sommes acculés à chercher un potentiel de la forme $\Phi(r,\theta) = f(r)\,\cos\theta$.

En coordonnées cylindriques l'expression du laplacien est :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

soit avec l'expression proposée pour Φ :

$$\Delta\Phi = f''(r)\,\cos\theta + \frac{f'(r)}{r}\,\cos\theta - \frac{f(r)}{r^2}\,\cos\theta$$

et après simplification par $\cos\theta$, l'équation $\Delta\Phi = 0$ est vérifiée si $f(r)$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients non constants :

$$f'' + \frac{1}{r}\,f' - \frac{1}{r^2}\,f = 0$$

Pour ce genre d'équation, il n'y a pas de méthode générale, le premier qui trouve en fait profiter [21] le reste de l'humanité. L'astuce consiste ici à rechercher des solutions en r^n, astuce que l'on trouve aisément avec un minimum d'expérience au vu des coefficients ; on arrive à :

$$n(n-1)\,r^{(n-2)} + \frac{n}{r}\,r^{(n-1)} - \frac{1}{r^2}\,r^n = 0$$

d'où après simplification par $r^{(n-2)}$, l'équation en n suivante : $n\,(n-1) + n = 1$ soit $n^2 = 1$ et $n = \pm 1$ et puisque l'on sait que l'ensemble des solutions de ce type d'équation forme un espace vectoriel de dimension deux, l'ensemble des solutions est généré par :

$$\Phi = \left(A\,r + \frac{B}{r}\right)\,\cos\theta$$

ce qui correspond à un champ de vitesses de coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = \left(A - \dfrac{B}{r^2}\right)\,\cos\theta \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\left(A + \dfrac{B}{r^2}\right)\,\sin\theta \\ v_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

21. La science échappe encore un peu au néolibéralisme ; ce cours gratuit en ligne en est la preuve.

A l'infini ($r \to \infty$), on doit avoir $\overrightarrow{v} = v_\infty \, \overrightarrow{e_x} = v_\infty \, (\cos\theta \, \overrightarrow{e_x} - \sin\theta \, \overrightarrow{e_\theta})$, ce qui conduit, comme pour la sphère plus haut, à $A = v_\infty$.

Au contact du cylindre ($r = R$), la vitesse doit être nulle, ce qui conduit à $B = R^2 \, v_\infty$ et l'on poursuit comme dans le cas de la sphère ; la vitesse en tout point (on ne mentionne plus v_z nul) est :

$$\begin{cases} v_r = v_\infty \left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right) \cos\theta \\ v_\theta - = -v_\infty \left(1 + \dfrac{R^2}{r^2}\right) \sin\theta \end{cases}$$

Avec le théorème de Bernoulli et en négligeant l'effet de la pesanteur (on rajoutera la poussée d'Archimède in fine comme ci-dessus), la pression en tout point est :

$$p = p_\infty + \frac{\mu \, v_\infty^2}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^2 \cos^2\theta - \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^2 \sin^2\theta\right]$$

et au niveau de la sphère ($r = R$), elle est :

$$p = p_\infty + \frac{\mu \, v_\infty^2}{2} \left[1 - 4 \, \sin^2\theta\right]$$

où l'on retrouve le paradoxe de d'Alembert avec les mêmes remarques que pour la sphère.

• L'effet Magnus.

Une possibilité supplémentaire de solutions provient de ce que θ est défini à $2 \, k \, \pi$ près (k entier), ce qui permet de sortir d'une approche pure de Fourier. Soit donc un potentiel en $\Phi = f(r) \, \theta$, son laplacien (voir l'expression en coordonnées cylindriques plus haut) est nul si :

$$\left(f''(r) + \frac{1}{r} \, f'(r)\right) \theta + 0 + 0 = 0$$

soit en notant $g(r) = f'(r)$ et après simplification par θ :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} + \frac{g}{r} = 0$$

qui donne par séparation des variables (on abrège) et en notant C et D les deux constantes d'intégration qui apparaissent successivement, $f'(r) = g(r) = \frac{C}{r}$ et $f(r) = C \, \ln r + D$. Avec ce potentiel $\Phi = (C \, \ln r + D) \, \theta$, la vitesse a pour composantes cylindriques (v_z nul non mentionné, cf supra) :

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = \dfrac{C}{r} \, \theta \\ \\ v_\theta = \dfrac{1}{r} \, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \dfrac{C \, \ln r + D}{r} \end{cases}$$

L'expression de v_r ne peut pas être $2\,\pi$ périodique à $2\,k\,\pi$ près quelque soit r ; il faut donc exclure ce type de solutions en prenant $C = 0$ mais l'autre type de solution avec un potentiel $D\,\theta$, $v_r = 0$ et $v_\theta = \frac{D}{r}$ convient parfaitement. Il correspond à un mouvement de rotation (irrotationnel, donc pas une rotation de type solide tournant) du fluide autour de l'axe Oz qui ne peut être engendré que par la rotation de cylindre relayé dans la couche limite par les forces de viscosité. Le lien entre la vitesse de rotation du cylindre et la constante C ne peut être établie dans ce modèle et relève plutôt de l'expérimentation.

Que le lecteur ne croie pas que j'ai eu une subite illumination pour exhiber ce type de solution ; j'ai en fait utilisé une analogie magnétostatique. En régime stationnaire ($\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = 0$) et là où il n'y a pas de courant ($\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$), l'équation de Maxwell-Ampère nous apprend que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ donc que $\overrightarrow{B}$ dérive dans ces conditions d'un potentiel scalaire[22] U et la première équation deMaxwell ($\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$) entraîne que $\Delta U = 0$. Il ne reste plus qu'à penser au champ hyper-classique créé par un fil rectiligne infini parcouru par l'intensité I, soit $B_z = B_r = 0$ et $B_\theta = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_\theta}$ pour recevoir l'illumination. Trop facile !

Rajouter ce potentiel à celui du paragraphe précédent ne modifie pas la vitesse radiale et ajoute à la vitesse orthoradiale le terme $\frac{D}{r}$ et modifie l'expression de la pression d'autant ; en particulier en surface, on arrive à :

$$p = p_\infty + \frac{\mu}{2}\left[v_\infty^2 - \left(\frac{D}{R} - 2\,v_\infty\,\sin\theta\right)^2\right] = p_\infty + \frac{\mu}{2}\left[v_\infty^2\left(1 - 4\,\sin^2\theta\right) + 4\,\frac{D}{R}\,v_\infty\,\sin\theta - \frac{D^2}{R^2}\right]$$

Cette fois les forces exercées sur deux éléments de surface diamétralement opposés ne sont plus opposées et le bilan des forces de pression non nul. La force $\overrightarrow{F_l}$ par unité de hauteur le long de Oz est obtenue par intégration soit $\overrightarrow{F_l} = -\int_{-\pi}^{\pi} p\,R\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_r}$, d'où par projection sur les axes les composantes :

$$\begin{cases} F_{lx} = -R\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \\ F_{ly} = -R\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

On intègre les différents termes provenant de p un à un, le calcul est de routine et un seul terme a une intégrale non nulle d'où :

$$\begin{cases} F_{lx} = 0 \\ \\ F_{ly} = -R\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu}{2}\left[4\,\frac{D}{R}\,v_\infty\,\sin\theta\right]\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

22. Il fut longtemps utilisé mais a été abandonné car inutilisable dans le cas général. C'est un pseudo-scalaire : il change de signe dans une symétrie par rapport à un plan. Autre particularité : sur une courbe fermée enlaçant une intensité I partant d'un point M et y revenant $U(M)_{\text{fin}} - U(M)_{\text{début}} = [U]_M^M = \oint \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0\,I$ en pensant au théorème d'Ampère ; donc après un tour U a augmenté de $\mu_0\,I$ et, comme θ, U est défini à $k\,\mu_0\,I$ près !

soit avec $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \pi$:

$$\begin{cases} F_{lx} = 0 \\ \\ F_{ly} = -2\,\pi\,D\,\mu\,v_\infty = -\mu\,\mathcal{C}\,v_\infty \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \oint v_\theta\, r\,\mathrm{d}\theta = \cdots = \oint \frac{D}{r}\, r\,\mathrm{d}\theta = 2\,\pi\,D$ (l'intégrale a deux termes dont un seul donne un résultat non nul) est la circulation de la vitesse sur tout cercle d'axe Oz, ce qui a plus de sens que la constante D. On remarque que la force lineïque est orthogonale à la vitesse à l'infini et à l'axe du cylindre (donc au vecteur rotation de celui-ci) et que son sens dépend du signe de la circulation (donc du sens de rotation du cylindre qui en est la cause). Il s'agit de l'*effet* MAGNUS[23] (voir au paragraphe 6.c p. 43 le théorème de KUTTA-JOUKOVSKI qui le généralise).

Un simple changement de point de vue par changement de référentiel galiléen montre que ce résultat, établi pour un obstacle fixe dans un fluide en écoulement uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v}_\infty$ loin de l'obstacle, est valable pour un projectile se déplaçant à la vitesse $-\overrightarrow{v}_\infty$ dans un fluide immobile loin de l'obstacle.

Le raisonnement a été effectué pour un obstacle ou projectile cylindrique ; on peut l'adapter à un obstacle ou projectile sphérique (plus courant) ; toutefois les calculs sont un peu plus complexes.

Une rotation autour d'un axe horizontal produit une force verticale qui, selon son sens lié à celui de la rotation, permet au projectile d'aller plus ou moins loin (balles liftées ou slicées au tennis) ; une rotation autour d'un axe vertical produit une force horizontale qui, selon son sens lié à celui de la rotation, permet au projectile de virer vers la gauche ou la droite et de contourner ainsi un obstacle (ballon brossé au football quand on tire un coup franc).

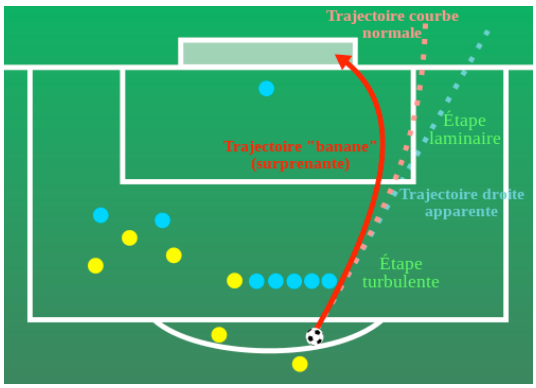

FIGURE 10 – Effet Magnus.

23. Heinrich Gustav Magnus, physicien, chimiste et vulgarisateur allemand 1802–1870.

La figure 10 p. 33 est le schéma du coup franc tiré par Roberto Carlos lors d'un match France-Brésil en 1997 qui trompa la défense et le gardien Fabien Barthez (les amateurs [24] trouveront aisément des vidéos de cet exploit).

5.c Approche mathématique en deux dimensions par les fonctions holomorphes.

• Un petit minimum de mathématique.

Une fonction f d'une variable complexe z et à valeurs complexes est dite holomorphe si elle est dérivable sur $\mathbb{C}$ donc si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ a une limite unique si $\mathrm{d}z$ tend vers 0 (ce qu'il peut faire de multiples façons dans le plan complexe, ce qui fait la différence avec $\mathbb{R}$ où $\mathrm{d}x$ ne peut tendre vers 0 que de deux façons, par valeurs inférieures ou supérieures).

Si l'on sépare en parties réelles et imaginaires la variable z ($z = x + i\,y$) et la fonction $f(z) = \Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\Phi + i\,\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y} = \frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}$$

La limite est indépendante de la façon dont $\mathrm{d}z$ tend vers 0 si le numérateur et le dénominateur sont des expressions en $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ proportionnelles soit si

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{i}$$

d'où en multipliant par i et égalant parties réelles et imaginaires :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Première conséquence pour la mécanique des fluides : Calculons le laplacien de Φ en utilisant le théorème de Schwartz pour les dérivées secondes [25] :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} = 0$$

et il en est de même pour le laplacien de Ψ. Toute fonction holomorphe fournit ainsi deux potentiels des vitesses possibles. Reste à connaître quelques fonctions holomorphes pour tenter notre chance : les polynomes en z le sont, les fractions rationnelles en z le sont, sauf aux points éventuels où le dénominateur s'annule, les séries entières convergentes en z donc, entre autres, les exponentielles, fonctions trigonométriques et hyperboliques de z.

24. Déduire du choix de cet exemple que je suis amateur de football serait une grave erreur.
25. Les mathématiciens démontrent qu'une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable.

Seconde conséquence pour la mécanique des fluides : Calculons le produit scalaire des gradients de Φ et Ψ :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

Or les gradients sont les champs de vitesses ; on vient donc de montrer que les deux champs de vitesses ont des lignes de champ (de courant) orthogonales et, puisque les lignes de champ sont orthogonales aux lignes[26] équipotentielles associées, les deux familles de lignes équipotentielles sont orthogonales et surtout les lignes de champ de l'un sont les équipotentielles de l'autre, ce qui est un grand cadeau car il est immédiat d'obtenir l'équation d'une équipotentielle alors qu'il faut une intégration (délicate avec deux variables) pour trouver des lignes de champ.

• Quelques exemples simples.

Remarque initiale : bien que la méthode ne convienne qu'en deux dimensions et que notre monde en ait trois, elle est utilisable pour les problèmes à invariance par translation le long d'un axe Oz donc pour des écoulements autour d'un cylindre de révolution ou non.

Premier exemple : la fonction $f(z) = A\,z$ est holomorphe car c'est un polynome. Dans ce cas, $\Phi + i\,\Psi = A\,(x + i\,y)$ donne $\Phi = A\,x$ et $\Psi = A\,y$. Le potentiel $\Phi = A\,x$ donne un champ de vitesse uniforme (que nous avons déjà rencontré plus haut) $\overrightarrow{v} = A\,\overrightarrow{e_x}$.

Deuxième exemple : la fonction $f(z) = z + \frac{R^2}{z}$ avec R réel est holomorphe sauf en 0 (fraction rationnelle). En posant $z = r\,e^{i\,\theta}$ (module et argument), on a $f(z) = r\,e^{i\,\theta} + \frac{R^2}{r}\,e^{-i\,\theta}$, d'où, en prenant les parties réelles et imaginaires :

$$\Phi = \left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \Psi = \left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta$$

On reconnaît dans ce Φ, à une constante multiplicative près, le potentiel des vitesses de l'écoulement autour d'un cylindre étudié plus haut. L'équation d'une ligne de courant est celle d'une équipotentielle de Ψ soit $\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta = Cte$. Remarquons que que cette méthode donne aussi des lignes de courant à l'intérieur du cercle de rayon R (le cylindre en fait) et c'est à nous de ne pas en tenir compte.

Remarque : cet exemple mène à la réflexion, déjà utilisée en électrostatique des conducteurs à l'équilibre, que toute ligne de courant fermée de Φ donc toute équipotentielle de Ψ permet de trouver la forme d'un écoulement autour d'un obstacle qui aurait cette forme ; en effet, la condition aux limites (vitesse tangentielle) sur l'obstacle est alors automatiquement vérifiée.

Troisième exemple : la fonction $f(z) = A\,z^n$ est holomorphe que n soit entier, rationnel, voire réel (on admet). En posant $z = r\,e^{i\,\theta}$, on a $f(z) = A\,r^n\,e^{i\,n\,\theta}$, d'où, en prenant les

26. On est à deux dimensions.

parties réelles et imaginaires :

$$\Phi = A\, r^n \cos(n\,\theta) \qquad \text{et} \qquad \Psi = A\, r^n \sin(n\,\theta)$$

Le champ de vitesses relatif à Φ a pour vitesse orthoradiale :

$$v_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -n\, A\, r^{n-1} \sin(n\,\theta)$$

qui s'annule en 0 et $\frac{\pi}{n}$ ce qui est conforme aux conditions aux limites (vitesse tangente à l'obstacle) un écoulement dans un dièdre plan d'arête Oz et d'angle $\frac{\pi}{n}$. Les lignes de courant ont pour équation (cf supra) $r^n \sin(n\,\theta) = Cte$. Quand r tend vers 0 (l'arête du dièdre), la vitesse en r^{n-1} tend vers zéro si $n > 1$ soit $\frac{\pi}{n} < \pi$ (dièdre concave ou en creux) et c'est sans danger mais elle tend vers l'infini si $n < 1$ soit $\frac{\pi}{n} > \pi$ (dièdre convexe ou en bosse) et c'est dangereux pour l'arête qui s'abîmera.

5.d Et le nombre de Reynolds ?

Bercé par les succès des méthodes ci-dessus, ne nous laissons toutefois pas endormir. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le régime laminaire n'a lieu qu'aux faibles nombres de Reynolds ; pour des valeurs moyennes ou grandes de ce nombre, apparaissent à l'arrière des obstacles des tourbillons dans lesquels le champ de vitesses est franchement rotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$), ce qui invalide ces méthodes. Les résultats qui précèdent ne sont donc valables qu'aux faibles nombres de Reynolds, sinon, ce peut être au mieux une approximation raisonnable de ce qui se passe du côté de l'obstacle qui fait face à l'écoulement qui vient vers lui et à condition de ne pas être trop près de la zone où la couche limite décolle de la surface de l'obstacle (voir chapitre B-XIII).

5.e Analogie rhéographique.

Dans leur domaine de validité (faible nombre de Reynolds donc), les méthodes ci-dessus ne donnent que des solutions de grande symétrie et nous avons expliqué que c'est néanmoins précieux pour la vérification expérimentale des approches théoriques. Toutefois, dès qu'il s'agit d'en tirer des applications technologiques (écoulement autour d'un véhicule terrestre, marin, sous-marin, aérien, voire extra-terrestre), elles s'avèrent impuissantes.

Il existe heureusement une dernière piste à explorer, alternative à une expérimentation encombrante et coûteuse. Un effet, en électrocinétique stationnaire (et aussi quasi-stationnaire mais c'est ici hors de propos), le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ est de divergence nulle ; en y adjoignant la loi d'Ohm locale liant $\overrightarrow{j}$ au champ électrique $\overrightarrow{E}$ ($\overrightarrow{j} = \gamma\,\overrightarrow{E}$) et la relation liant $\overrightarrow{E}$ au potentiel électrique V ($\overrightarrow{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$), on a :

$$0 = \text{div}\,\overrightarrow{j} = \gamma\ \text{div}\,\overrightarrow{E} = -\gamma\ \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right) = -\gamma\,\Delta V$$

Le potentiel électrique, de laplacien nul, est donc un bon candidat d'une analogie avec le potentiel des vitesses. On place une maquette (un modèle réduit, c'est moins cher) construite avec un matériau isolant (le courant ne peut y entrer donc $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont tangentiels à sa surface) dans une cuve *rhéographique* de grandes dimensions par rapport à celles de la maquette, emplie d'un liquide conducteur (solution saline) et dont deux faces en vis-à-vis sont conductrices et portées à deux potentiels différents (la maquette perturbe donc un courant qui, sans elle, aurait des lignes de courants parallèles avec une densité de courant uniforme ; on retrouve ainsi l'obstacle placé dans un écoulement uniforme loin de lui).

Un capteur (un simple fil isolé sauf son bout) permet de mesurer le potentiel en tout point, d'établir ainsi la forme des équipotentielles et d'en déduire le champ électrique, analogue du champ des vitesses.

6 Bilans de quantité de mouvement et d'énergie.

6.a Formule d'Euler.

Pour éviter au lecteur de jongler entre deux chapitres, commençons par un copié-collé allégé d'un paragraphe du chapitre A-VI traitant des bilans pour un système ouvert, chapitre supposé maîtrisé.

• La situation

Soit une canalisation dans laquelle s'écoule un fluide selon un régime stationnaire (on dit aussi permanent) ; la section est suffisamment petite par rapport à la longueur pour que les vitesses soient canalisées par les parois ; on suppose en outre qu'à travers une section donnée, le module de la vitesse est uniforme (c'est-à-dire qu'on néglige ainsi l'influence de la viscosité). On privilégie deux sections appelées section d'entrée (indice e) et section de sortie (indice s). On suppose qu'entre ces deux sections, la canalisation change de direction et que l'aire de sa section varie. La figure 11 p. 38 résume la situation. Il est souvent judicieux d'inclure la canalisation dans le système.

La conservation du débit massique se traduit par $\mu_e\, S_e\, v_e = \mu_s\, S_s\, v_s$. On note D_m sans indice la valeur commune des deux débits.

• Bilan mécanique

On considère la canalisation et le fluide qu'elle contient entre les sections d'entrée et de sortie comme un volume de contrôle (VdC). Sa quantité de mouvement $\overrightarrow{P}_{VdC}$ ne dépend pas du temps en régime permanent.

On considère un système constitué du contenu du volume de contrôle à l'instant t et

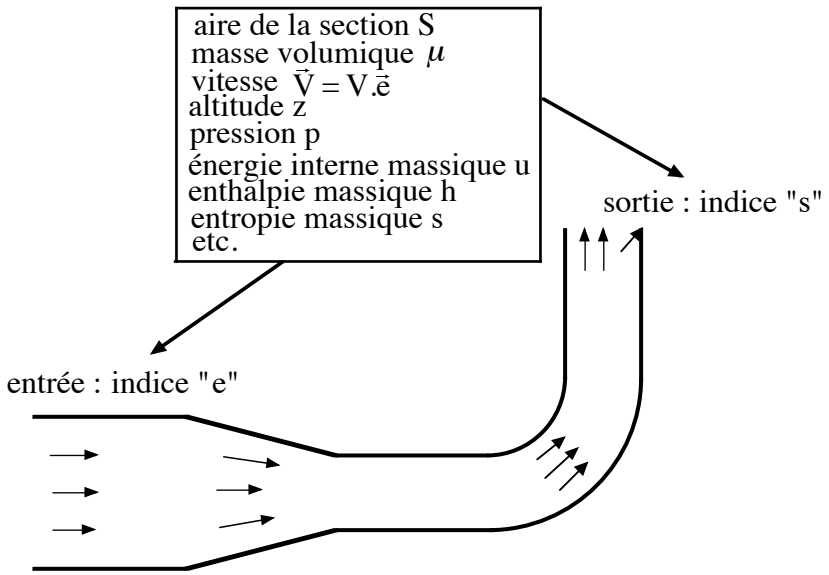

FIGURE 11 – Ecoulement permanent dans une canalisation.

de ce qui y entrera entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$; par construction, ce système à l'instant $t + \mathrm{d}t$ est constitué du volume de contrôle à l'instant $t + \mathrm{d}t$ et de ce qui en est sorti entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Les quantités de mouvement du système aux instants t et $t + \mathrm{d}t$ sont respectivement :

$$\overrightarrow{P}(t) = \overrightarrow{P}_{VdC} + D_m \,\mathrm{d}t\, \overrightarrow{V}_e$$

$$\overrightarrow{P}(t + \mathrm{d}t) = \overrightarrow{P}_{VdC} + D_m \,\mathrm{d}t\, \overrightarrow{V}_s$$

On en déduit que la force subie par le système est :

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \frac{\overrightarrow{P}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{P}(t)}{\mathrm{d}t} = D_m \left(\overrightarrow{V}_s - \overrightarrow{V}_e\right)$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule d'EULER*. Gardons-nous toutefois d'une interprétation hâtive : si l'on a considéré que la canalisation fait partie du système, $\overrightarrow{F}_{ext}$ se compose de plusieurs termes :

- La force $\overrightarrow{f}$ exercée par le système d'ancrage de la canalisation sur son support, ou par le pompier musclé qui maintient la lance d'incendie.
- La force $\overrightarrow{f}_{al}$ exercée par la pression atmosphérique p_a sur les parois latérales de la canalisation.
- La force de pression $p_e\, S_e\, \overrightarrow{e}_e$ sur la section d'entrée, qu'on décompose astucieusement en $\overrightarrow{f}_{ae} = p_a\, S_e\, \overrightarrow{e}_e$ et $(p_e - p_a)\, S_e\, \overrightarrow{e}_e$.
- La force de pression $-p_s\, S_s\, \overrightarrow{e}_s$ sur la section de sortie, qu'on décompose en $\overrightarrow{f}_{as} = -p_a\, S_s\, \overrightarrow{e}_s$ et $-(p_s - p_a)\, S_s\, \overrightarrow{e}_s$.

L'astuce est que $\overrightarrow{f}_{al} + \overrightarrow{f}_{ae} + \overrightarrow{f}_{as} = \overrightarrow{0}$ qu'on justifie soit en disant que la pression atmosphérique est uniforme et alors le théorème du gradient assure que le bilan de forces de pression atmosphérique sur une surface fermée est nulle, soit, plus finement que ce bilan est la poussée d'Archimède due à l'air, négligeable car la masse d'air « déplacé » l'est.

De tout cela on déduit que :

$$\overrightarrow{f} + (p_e - p_a)\, S_e\, \overrightarrow{e}_e - (p_s - p_a)\, S_s\, \overrightarrow{e}_s = D_m\, (\overrightarrow{V}_s - \overrightarrow{V}_e)$$

Comme le théorème de Bernoulli permet le calcul des pressions dans ce type d'écoulement, cette formule permettra de calculer $\overrightarrow{f}$.

• Bilans énergétiques

En utilisant ce qui, au paragraphe 4.c p. 24, a été appelé théorème de l'énergie cinétique macroscopique (sans puissance intérieure dans un contexte incompressible) et en lui adjoignant l'énergie de potentielle de pesanteur, le même type de raisonnement permet de calculer la puissance mécanique extérieure reçue par le système (hormis celles des forces de pesanteur puisqu'on en a tenu compte avec l'énergie potentielle), soit :

$$\mathcal{P}_{ext} = D_m\, \left[(V_s^2/2 + \mathrm{g}\, z_s) - (V_e^2/2 + \mathrm{g}\, z_e)\right]$$

Hormis les forces de pesanteur et sauf contexte particulier, les seules forces extérieures sont les forces de pression

- La force $\overrightarrow{f}_{al}$, définie plus haut, ne travaille pas car la canalisation est immobile.
- La puissance de $p_e\, S_e\, \overrightarrow{e}_e$ est $p_e\, S_e\, \overrightarrow{e}_e.\overrightarrow{V}_e = p_e\, S_e\, V_e = D_m\, p_e/\mu_e$
- La puissance de $-p_s\, S_s\, \overrightarrow{e}_s$ est $-p_s\, S_s\, \overrightarrow{e}_s.\overrightarrow{V}_s = -p_s\, S_s\, V_s = -D_m\, p_s/\mu_s$

On en déduit :

$$D_m\, [(V_s^2/2 + \mathrm{g}\, z_s + p_s/\mu_s) - (V_e^2/2 + \mathrm{g}\, z_e + p_e/\mu_e)] = 0$$

et l'on retrouve le théorème de Bernoulli en lui donnant ainsi une interprétation énergétique. Il faut toutefois préférer les autres démonstrations, car l'utilisation d'un théorème énergétique purement mécanique pour un système déformable est toujours délicate à justifier rigoureusement (voir encore le paragraphe 4.c p. 24).

Le premier principe de la thermodynamique, dans le même contexte et avec la même méthode donnera ici, en reconnaissant dans $u + p/\mu$, l'enthalpie massique h :

$$\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = D_m\, \left[(h_s + V_s^2/2 + \mathrm{g}\, z_s) - (h_e + V_e^2/2 + \mathrm{g}\, z_e)\right]$$

Une étude (ou une modélisation) de la puissance thermique et la donnée de la fonction u permettront de déduire bien des choses. Par exemple, pour une détente de Joule-Thomson (adiabatique et à vitesse négligeable, on le rappelle) dans un tuyau horizontal, on en tire $h_s = h_e$ et si, de plus, le fluide est un gaz parfait (h n'est fonction que de T), alors $T_s = T_e$.

6.b Hélices motrices et réceptrices.

Comme première application, l'on étudie ici indifféremment un ventilateur, une éolienne, une hélice d'avion ou d'hélicoptère en régime permanent. On a visualisé sur le haut de la figure 12 p. 40 (où l'on a accentué, pour la lisibilité, la pente, en réalité très faible, des lignes de courant par rapport à l'axe et où leur forme ne vise pas le réalisme expérimental) le tube de courant qui, dans le référentiel lié au « rotor », s'appuie sur sa périphérie. La pression, la vitesse quasi-colinéaire à l'axe (et supposée quasiment uniforme dans une section du tube) et l'aire de la section valent respectivement p_0, v_0, S_0 loin en avant, p, v, S juste devant les pales, p', v', $S' = S$ juste derrière et $p_1 = p_0$ (cf infra), v_1, S_1 loin derrière et l'on admettra qu'en dehors de ce tube, la pression est uniforme et a la même valeur p_0 qu'à l'entrée du tube de courant. L'écoulement se fait avec des vitesses suffisamment faibles devant celle du son pour que la masse volumique μ soit quasiment constante (voir plus haut). Le modèle est simpliste mais donne de résultats en bon accord avec l'expérience.

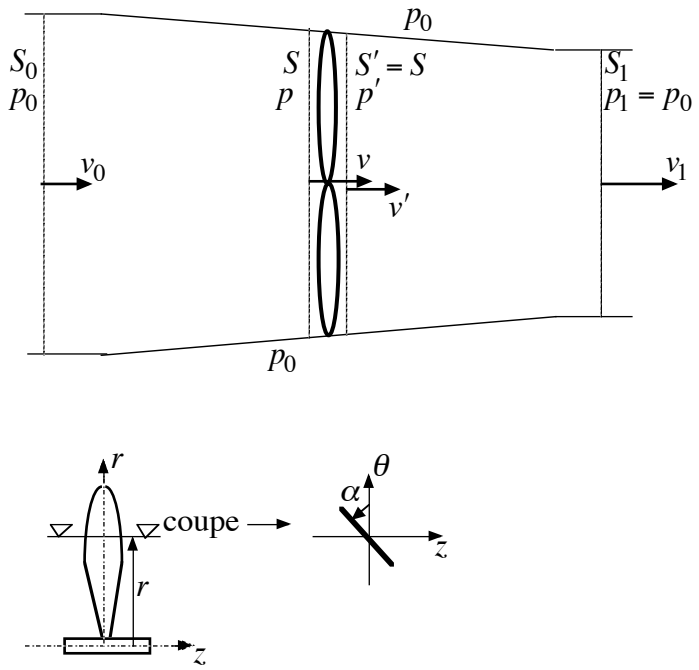

FIGURE 12 – Ecoulement au travers d'une hélice.

L'air qui sort du rotor est en déséquilibre de pression et de vitesse avec l'air extérieur. La mise en équilibre mécanique se fait assez vite, c'est pourquoi, assez loin en aval, la pression redevient p_0 ; par contre la mise en équilibre des vitesses ne se fait qu'au travers de forces de viscosité, extrêmement faibles pour l'eau ou l'air, et ce n'est que très loin qu'il se fait. On n'étudie pas ici ce qui ce passe entre « assez loin » et « très loin », car nous sommes dans l'hypothèse d'un écoulement parfait.

La conservation du débit en régime permanent donne, après simplification par la masse volumique :

$$S_0\, v_0 = S\, v = S'\, v' = S_1\, v_1$$

d'où, puisque $S' = S$, $v' = v$ que l'on utilisera systématiquement par la suite.

En considérant ici l'écoulement comme horizontal (l'altitude z est constante), le théorème de Bernoulli entre les sections du tube loin devant et juste devant les pales puis entre les sections juste derrière et loin derrière (mais pas entre juste avant et juste après, car la viscosité joue un rôle important dans le contact entre le fluide et les pales du rotor : c'est elle qui assure les transferts de quantité de mouvement entre eux ; dans cette zone, l'écoulement n'est pas parfait) donne :

$$\frac{p_0}{\mu} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{p_0}{\mu} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p'}{\mu} + \frac{v^2}{2}$$

dont une conséquence simple s'obtient par soustraction membre à membre :

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \frac{p' - p}{\mu}$$

Appliquons, en projection sur l'axe, la formule d'Euler entre les sections du tube juste devant et juste derrière les pales, en y ajoutant la force F exercée par l'hélice sur le fluide et en remarquant que la pression extérieure est p_0 ; on tire :

$$F + (p - p_0)\, S - (p' - p_0)\, S = D_m\, (v - v) = 0$$

car $v' = v$ et $S' = S$, d'où encore :

$$F + (p - p')\, S = 0$$

Appliquons à nouveau la formule d'Euler entre les sections du tube loin devant et loin derrière ; on tire cette fois :

$$F + (p_0 - p_0)\, S_0 - (p_0 - p_0)\, S_1 = D_m\, (v_1 - v_0)$$

car $p_1 = p_0$, d'où, en choisissant $\mu\, S\, v$ comme expression de D_m :

$$F = \mu\, S\, v\, (v_1 - v_0)$$

En confrontant les deux conclusions des deux applications de la formule d'Euler, on montre que :

$$p - p' = \mu\, v\, (v_1 - v_0)$$

Or a montré plus haut que :

$$p - p' = \mu\, \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \mu\, \frac{v_1 + v_0}{2}\, (v_1 - v_0)$$

On en déduit finalement que $v_0 + v_1 = 2\,v$, ce qui permet de terminer l'étude, à condition de bien identifier les données et inconnues. Les grandeurs p_0, v_0 (pression et vitesse d'écoulement relative, loin en amont du rotor donc non perturbées), S sont bien évidemment des données et les grandeurs p, p', v, v_1, S_0 et S_1, des inconnues ; la force F est connue soit technologiquement (au travers en fait de la puissance du moteur) soit par une condition d'équilibre (un hélicoptère est en vol stationnaire si son poids, connu, équilibre la réaction de l'air sur le rotor). J'ai donc six inconnues et j'ai aussi six équations, deux par conservation du débit, deux grâce au théorème de Bernoulli et deux grâce à la formule d'Euler ; je me sens donc autorisé à poursuivre les calculs. Plaçons nous dans le cas le plus simple, celui où v_0 est nul ou quasiment nul (c'est le cas du ventilateur ou de l'hélicoptère en vol stationnaire). Il faut tirer les ficelles dans le bon sens ; comme j'ai traité cet exemple plusieurs fois devant des élèves, c'est facile ; on commence par exprimer cinq des inconnues en fonction de la sixième v.

Avec $v_0 = 0$, de $v_0 + v_1 = 2\,v$, on tire $v_1 = 2\,v$.

La conservation du débit donne alors $S_0 = \infty$ (comprendre très grand) et $S_1 = \frac{S}{2}$ Le théorème de Bernoulli donne, avec les deux applications qu'on en a faites, $p = p_0 - \frac{\mu\,v^2}{2}$ et $p' = p_0 + \frac{3\,\mu\,v^2}{2}$.

Enfin, l'une ou l'autre des relations tirée de la formule d'Euler conduit à $F = 2\,\mu\,S\,v^2$ d'où on tire v et en cascade toutes les autres inconnues.

Exemple numérique : soit un hélicoptère de masse M de l'ordre de la tonne, de poids $M\,g$ de l'ordre de 10 kilonewtons équilibré par la force F, avec des pales de l'ordre du mètre donc une surface S de l'ordre de 3 mètres carrés et dans de l'air qui, dans les conditions normales, a une masse volumique de l'ordre de 1,3 kilogramme par mètre cube ; on en tire (toujours avec $v_0 = 0$) $v = \sqrt{\frac{F}{2\,\mu\,S}} \sim 35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, d'où $v_1 = 2\,v \sim 70\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et plutôt que p et p', la dépression et la surpression $p - p_0 = -\frac{\mu\,v^2}{2} = -\frac{F}{4\,S} \sim -0,8$ kPa et $p' - p_0 = \frac{3\,\mu\,v^2}{2} = \frac{3\,F}{4\,S} \sim 2,4$ kPa (à comparer avec $p_0 \sim 100$ kPa) et bien sûr S_0 très grand et $S_1 = \frac{S}{2}$.

Un bilan énergétique (voir formule du paragraphe 6.a p. 37) entre la section juste avant le rotor et celle juste après, en ajoutant ici la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'hélice donne ici (toujours avec z constant et $v' = v$) :

$$\mathcal{P} = D_m\,[(v'^2/2 + p'/\mu) - (v^2/2 + p/\mu)] = S\,v\,(p' - p) = 2\,\mu\,S\,v^3$$

et l'on remarque [27] , sans surprise, que $\mathcal{P} = F\,v$. Dans le même exemple numérique, le vol stationnaire demande une puissance de 350 kW, ce qui est beaucoup pour faire du sur place ; l'hélicoptère, ça n'est pas très écologique.

Remarque 1 : avec v_0 non nul (comme avec une éolienne), on démontre de la même façon [28] que la puissance reçue par l'éolienne est $-\mathcal{P} = 2\,\mu\,S\,v^2\,(v_0 - v)$ qui passe par

27. Ça se remarque plus vite avec la formulation $\mathcal{P} = S\,v\,(p' - p)$ car on a montré plus haut que $F = (p' - p)\,S$

28. On invite le lecteur à le faire à titre d'exercice.

un maximum pour $v = \frac{2}{3}\, v_0$. Il y a donc lieu de concevoir un dispositif de régulation qui permette de faire fonctionner l'éolienne à ce maximum de puissance.

Remarque 2 : il peut sembler paradoxal qu'un écoulement qui traverse un dispositif en rotation puisse en ressortir rectiligne et parallèle à l'axe de rotation, pourtant il n'y a rien d'étrange. En notant $\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ les vecteurs unitaires axial et orthoradial, à une distance r de l'axe au moment de la traversée du dispositif, les vitesses absolues de l'écoulement et de la pale du rotor sont respectivement, en notant ω la vitesse angulaire de rotation, $v\,\overrightarrow{e_z}$ et $r\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}$ et la vitesse relative de l'écoulement par rapport à la pale est donc $v\,\overrightarrow{e_z} - r\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}$, ce qui respecte la condition aux limites (vitesse tangentielle à la surface de la pale) si le plan tangent à la pale fait avec le plan méridien (celui qui contient l'axe) un angle α tel que $\tan\alpha = \frac{r\,\omega}{v}$ (voir le bas de la figure 12 p. 40). Toutefois, cet angle α dépend de r : il faudra donner, pour un bon fonctionnement une forme vrillée aux pales (voir la figure 13 p. 43 trouvée sur Internet).

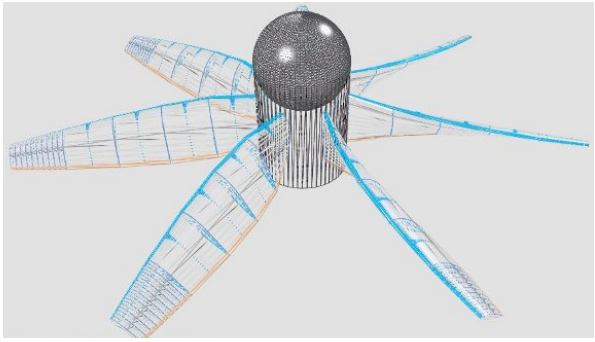

FIGURE 13 – Forme des pales d'un rotor.

6.c Théorème de Kutta-Joukovski.

On se place dans le cas d'un obstacle de forme invariante par translation parallèlement à un axe choisi comme axe Oz (il s'agit donc d'un cylindre au sens large, donc par forcément à base circulaire) placé dans un écoulement qui, loin de lui, a une vitesse relative (le cylindre peut se déplacer) uniforme, dans une direction orthogonale à Oz et choisie comme axe Ox, notée $\overrightarrow{V}_0 = V_0\,\overrightarrow{e_x}$. On raisonne dans le référentiel de l'obstacle. Dans la pratique le résultat obtenu sera valable pour un cylindre de longueur finie pourvu que sa longueur selon Oz soit grande devant ses dimensions dans le plan xOy et il sera qualitativement correct pour tout obstacle non cylindrique, d'allure rectiligne selon Oz et de longueur selon Oz grande devant les autres. L'écoulement est parfait et stationnaire et l'on se place dans les conditions où il peut être considéré comme irrotationnel et le fluide comme incompressible (voir les paragraphes 3.d p. 16 et 4.b p. 22 : V_0 vaut moins de 20% de la vitesse du son et l'obstacle fait moins de quelques dizaines de mètres dans le sens vertical, celui de $\overrightarrow{g}$) ; dans ces conditions, on peut négliger les effets de la pesanteur et la pression est uniforme loin

de l'obstacle, on l'y note P_0. Il peut s'agir d'une aile d'avion ou de l'aileron stabilisateur d'une voiture de course qui se déplace à la vitesse $-\overrightarrow{V}_0$ dans un fluide au repos loin de lui.

La force du théorème qui va suivre est qu'il n'utilise, dans sa démonstration, que des points éloignés de l'obstacle, là où on est sûr que la viscosité ne joue aucun rôle, là aussi où l'on peut espérer être en dehors de la zone en aval de l'obstacle qui est siège de tourbillons, espoir qu'il est facile de combler avec de faibles nombres de Reynolds ou des moyens car les tourbillons restent alors « accrochés » à l'obstacle dans un zone bornée, mais pas aux grands nombres de Reynolds où les tourbillons se détachent et forment une allée de von Karman [29] (dans ce cas toutefois, le théorème donne des résultats acceptables en ordre de grandeur).

• Paramétrage du problème.

L'invariance par translation selon Oz et la symétrie par rapport au plan xOy des conditions à l'infini incite à chercher des solutions qui ne dépendent (rappel : on est en régime permanent) que de x et y et dont les vecteurs sont orthogonaux à Oz. En tout point M de coordonnées x, y et z, la vitesse et la pression sont exprimées comme sommes de ces grandeurs à l'infini et d'un terme correctif, c'est-à-dire ainsi : $P(x,y) = P_0 + p(x,y)$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \overrightarrow{V}_0 + \overrightarrow{v}(x,y)$ de projections sur les axes notées $V_x = V_0 + v(x,y)$, $V_y = u(x,y)$ et bien sûr $V_z = 0$. On se place assez loin de l'obstacle (plus que sur la figure 14 p. 45 qui reprend ces notations), là où l'écoulement est peu perturbé de sorte qu'en valeur absolue, u et v soient négligeables devant V_0 et p devant P_0.

• Travail de routine.

L'écoulement est irrotationnel ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$) et le calcul de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}$ conduit par projection sur Oz (les autres composantes sont automatiquement nulles par symétrie d'un pseudo-vecteur) à la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

qu'on n'utilisera pas en fait sous cette forme.

L'écoulement est incompressible ($\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$) et le calcul de $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}$ conduit à la relation :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

qu'on n'utilisera pas en fait.

L'équation d'Euler en régime parfait (Euler et non Navier-Stokes), stationnaire

29. Voir chapitre B-XIII.

($\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$) et irrotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$) et en négligeant la pesanteur conduit à :

$$\mu\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

où d'une part $P = P_0 + p$ avec P_0 uniforme donc de gradient nul et d'autre part :

$$\vec{V}^2 = (\vec{V}_0 + \vec{v})^2 = \vec{V}_0^2 + 2\,\vec{V_0}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

avec $\vec{V}_0^2$ uniforme donc de gradient nul, $\vec{v}^2$ d'ordre deux, donc négligeable et, en explicitant le produit, $\vec{V_0}\cdot\vec{v} = V_0\,v$, d'où, au premier ordre :

$$\mu\,V_0\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

et par intégration, compte tenu qu'à l'infini $v = 0$ et $p = 0$ par construction :

$$p = -\mu\,V_0\,v$$

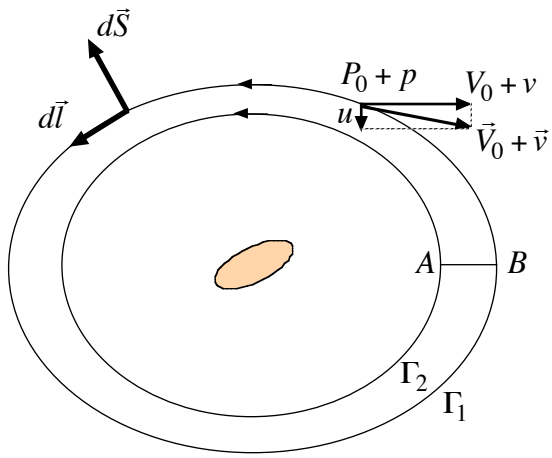

FIGURE 14 – Théorème de Kutta-Joukovski.

• **Vecteur circulation.**

Considérons dans un plan $z = Cte$ deux courbes fermées Γ_1 et Γ_2, orientées dans le sens trigonométriques et faisant le tour de l'obstacle et appelons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ la circulation de la vitesse le lond de ces deux courbes, soit :

$$\mathcal{C}_1 = \oint_{\Gamma_1} \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2 = \oint_{\Gamma_2} \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

On ne peut pas appliquer le théorème de STOKES ni à $\mathcal{C}_1$ ni à $\mathcal{C}_2$ car le rotationnel de la vitesse n'est pas défini à l'intérieur de l'obstacle cylindrique. Construisons plutôt une courbe fermée n'entourant pas l'obstacle et construite comme suit : on parcourt Γ_1 dans le sens trigonométrique d'un point A au même point A, puis par un chemin arbitraire, on va de A à B, point de Γ_2, on parcourt ensuite Γ_2 dans le sens trigonométrique inverse (on note $\tilde{\Gamma}_2$) de B à B et enfin on revient de B à A par le même chemin qu'à l'aller (voir la même figure 14 p. 45). Sur la couronne qui a pour contour ce chemin, l'écoulement est irrotationnel et le théorème de Stokes nous apprend que la circulation de la vitesse y est alors nulle, soit :

$$0 = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_A^B \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \oint_{\tilde{\Gamma}_2} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_B^A \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \cdots$$

$$\cdots = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_A^B \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} - \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} - \int_A^B \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$$

On en déduit que la circulation de la vitesse est identique sur toutes les courbes qui entourent l'obstacle et on la note désormais $\mathcal{C}$ sans indice ; il est d'usage (la suite le justifiera) de définir un vecteur circulation qui est $\overrightarrow{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\,\overrightarrow{e_z}$.

• Adaptation du théorème d'Euler.

On adapte ici la démonstration du théorème d'EULER établie plus haut dans un contexte simple où le fluide entrait dans le volume de contrôle et en sortait par deux régions suffisamment petites pour que les paramètres y soient uniformes. En renommant $\overrightarrow{Q}$ la quantité de mouvement (afin d'éviter la confusion avec la pression P), on avait montré, en reformulant à peine les choses, que la force subie par le fluide lié au volume de contrôle est

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{Q}}{\mathrm{d}t} = D_m \overrightarrow{V}_s - D_m \overrightarrow{V}_e$$

Prenons comme volume de contrôle un cylindre de longueur unité le long de Oz dont la section par un plan parallèle à xOy soit la courbe fermée Γ_1 et que l'on ferme par la surface intérieure à Γ_1 dans les deux plans parallèles à xOy distants de cette longueur unité. Cette fois, le fluide entre et sort de partout ; à travers une surface élémentaire de vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ orthogonal et orienté vers l'extérieur, le débit massique élémentaire sortant est, algébriquement (positif s'il sort effectivement, négatif s'il entre), $\delta D_m = \mu\,\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et le débit algébrique de quantité de mouvement $\delta\overrightarrow{Q} = \delta D_m\,\overrightarrow{V}$. Il faut donc remplacer $D_m \overrightarrow{V}_s - D_m \overrightarrow{V}_e$ par $\oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{V}$ (voir aussi la formule de REYNOLDS dans le chapitre A-VI).

La force extérieure subie par le fluide est la somme des forces de pression en surface $-\oiint_{VdC} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et de la réaction $-\overrightarrow{F}_l$ à la force linéïque $\overrightarrow{F}_l$ que le fluide exerce sur l'obstacle,

d'où finalement et successivement :

$$-\overrightarrow{F}_l - \oiint_{VdC} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{F}_l = -\oiint_{VdC} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} - \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{V}$$

Sur le « fond » et le « couvercle » du volume de contrôle, d'une part $\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est nul et d'autre part les forces de pression, opposées, s'éliminent ; les intégrales sur la surface totale se résument à l'intégrale sur la surface latérale $\mathcal{L}$ du cylindre, d'où :

$$\overrightarrow{F}_l = -\iint_{\mathcal{L}} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} - \iint_{\mathcal{L}} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{V}$$

Dans la suite de la démonstration, on jonglera , selon les besoins, entre $\oiint_{VdC}$ et $\iint_{\mathcal{L}}$.

• **Démonstration du théorème de Kutta-Joukovski.**

Avec $P = P_0 + p$ où P_0 est uniforme, on a :

$$\oiint_{VdC} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = P_0 \oiint_{VdC} \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \oiint_{VdC} p\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint_{VdC} p\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\mathcal{L}} p\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

car $\oiint_{VdC} \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$ (on s'en convainc, par exemple, en appliquant le théorème du gradient à la fonction $f(M) = 1$). Poursuivons : en utilisant (cf supra) $p = -\mu\,V_0\,v$ ou mieux $p = -\mu\,\overrightarrow{V_0}\cdot\overrightarrow{v}$

$$\oiint_{VdC} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\mu \iint_{\mathcal{L}} (\overrightarrow{V_0}\cdot\overrightarrow{v}\,)\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Avec $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_0 + \overrightarrow{v}$, utilisé une seule fois et au bon endroit, on a :

$$\oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{V} = \left(\oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\right)\overrightarrow{V}_0 + \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v} = \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v}$$

car $D_m = \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})$ est le débit algébrique total sortant du volume de contrôle, nul en régime permanent. Avec $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_0 + \overrightarrow{v}$, utilisé une seconde fois :

$$\oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{V} = \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v} = \cdots$$

$$\cdots = \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v} + \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v} \approx \oiint_{VdC} \mu\,(\overrightarrow{V_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v} = \mu \iint_{\mathcal{L}} (\overrightarrow{V_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S})\,\overrightarrow{v}$$

en négligeant le terme d'ordre 2 en v (la surface du volume de contrôle est loin de l'obstacle).

En reportant ces deux résultats, on arrive à :

$$\overrightarrow{F}_l = \mu \iint_{\mathcal{L}} (\overrightarrow{V_0} \cdot \overrightarrow{v}) \, \overrightarrow{\mathrm{d}S} - \mu \iint_{\mathcal{L}} (\overrightarrow{V_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}) \, \overrightarrow{v}$$

où l'on reconnaît un double produit vectoriel (dont une des diverses formulations est $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \overrightarrow{c}$), ce qui conduit, compte tenu de l'antisymétrie du produit vectoriel à :

$$\overrightarrow{F}_l = \mu \iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{V_0} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{d}S} \wedge \overrightarrow{v}) = -\mu \iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{V_0} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S}) = -\mu \, \overrightarrow{V_0} \wedge \iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mu \left(\iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right) \wedge \overrightarrow{V_0}$$

Pour calculer $\iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ regroupons, pour les sommer, toutes les surfaces élémentaires formant une mince bande rectangulaire de longueur unité parallèlement à Oz et de longueur $\mathrm{d}l$ le long de la courbe fermée Γ_1, de surface $\mathrm{d}S = 1 \cdot \mathrm{d}l$ donc de vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 1 \cdot \mathrm{d}l \, \overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à $\mathcal{L}$ dans l'espace donc à Γ_1 dans le plan et dirigé vers l'extérieur. L'élément de courbe orientée est $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}l \, \overrightarrow{\tau}$ où $\overrightarrow{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à Γ_1, orienté dans le sens trigonométrique. Ceci est résumé dans la figure 14 p. 45 ($\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\tau}$ n'y ont pas été dessinés pour ne pas surcharger). Puisque $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{\tau}$ et $\overrightarrow{e_z}$ forment un trièdre orthonormé directe, on a $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{e_z}$, d'où successivement (avec la formule du double produit vectoriel) :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 1 \cdot \mathrm{d}l \, \overrightarrow{n} = 1 \cdot \mathrm{d}l \, \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{e_z} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{e_z}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_z}) \, \overrightarrow{\mathrm{d}l} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}) \, \overrightarrow{e_z} = -(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}) \, \overrightarrow{e_z}$$

où $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_z}$ est nul var la vitesse est orthogonale à Oz. On en déduit, en intégrant sur les $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ qui reconstruisent Γ_1 orienté et en reconnaissant le vecteur circulation défini plus haut :

$$\iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\oint_{\Gamma_1} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}) \, \overrightarrow{e_z} = -\left(\oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \right) \overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{\mathcal{C}}$$

et finalement

$$\overrightarrow{F}_l = \mu \left(\iint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right) \wedge \overrightarrow{V_0} = -\mu \, \overrightarrow{\mathcal{C}} \wedge \overrightarrow{V_0} = \mu \, \overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{\mathcal{C}}$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de* KUTTA[30]-JOUKOVSKI[31]. La formule change de signe (par permutation des deux termes) si V_0 désigne la vitesse de l'obstacle mobile (l'aile d'avion) par rapport à l'air supposé immobile loin de lui.

Cette formule généralise, quelque soit la forme de l'obstacle, la formule que nous avions trouvé dans l'exemple simpliste qui illustrait l'effet MAGNUS au paragraphe 5.b p.29.

30. Martin Kutta, mathématicien allemand, 1867–1944.
31. Nikolai Joukovski, physicien russe, 1847–1921, père de l'aviation russe.

• **Comment créer une circulation non nulle ?**

La figure 15 p. 49 montre la section droite d'un aile cylindrique certes très naïve mais qui permet de raisonner simplement. La face inférieure est parallèle à V_0 et ne perturbe quasiment pas l'écoulement qui reste pratiquement rectiligne de vitesse uniforme. La face supérieure est bombée et détourne les lignes de courant vers le haut, beaucoup pour celles qui sont très proches, un peu moins pour celles qui sont assez proches et très peu pour celles qui sont moins proches encore ; la veine d'air qui passe au dessus de l'aile se trouve donc comprimée, ce qui provoque, par conservation du débit, une augmentation de la vitesse et, par la formule de Bernoulli, provoque une baisse de pression et un effet Venturi d'aspiration vers le haut, phénomène que la formule de Kutta-Joukovski chiffre.

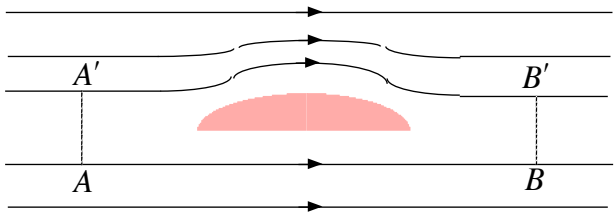

Figure 15 – Principe d'une aile.

Considérons deux lignes de courant, l'une passant sous l'aile et l'autre au-dessus et sur ces lignes, deux points A et A' en amont de l'aile et deux points B et B' en aval, choisis de sorte que les segments AA' et BB soient orthogonaux aux lignes de courant (on a pris les points assez loin en amont et en aval pour être dans la zone non perturbée où la vitesse est uniforme). Comparons les circulations $\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ et $\mathcal{C}_{A'B'} = \int_{A'}^{B'} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$; la seconde est manifestement plus grande que la première car la courbe qui va de A' à B' est plus longue que le segment de droite AB et que, sur cette courbe, les vitesses sont plus grandes que sur le segment (cf supra) ; donc $\mathcal{C}_{A'B'} > \mathcal{C}_{AB}$.

Considérons la courbe fermée Γ, entourant l'aile dans le sens trigonométrique direct, formé de AB sur la première ligne de courant, de BB', de $B'A'$ sur la seconde, parcourue à l'envers et enfin de $A'A$; puisque sur AA' et BB' la vitesse et le déplacement sont orthogonaux, on a :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_B^{B'} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{B'}^{A'} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{A'}^{A} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \cdots$$
$$\cdots = \int_A^B \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + 0 - \int_{A'}^{B'} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + 0 = \mathcal{C}_{AB} - \mathcal{C}_{A'B'} < 0$$

Le vecteur circulation va donc du lecteur au texte et la force linéïque est bien vers le haut, ce qui assure la sustentation.

Remarque 1 : la formule de Kutta-Joukovski ne résout pas le paradoxe de d'Alembert ;

si elle explique et calcule correctement la « portance » de l'aile, elle est incapable de prédire l'existence de la traînée.

Remarque 2 : les vraies ailes sont très effilées vers l'arrière de façon à réduire au minimum les tourbillons en aval.

Remarque 3 : si V_0 augmente loin de l'obstacle, la vitesse aux autres points va croître en proportion et la circulation sur toute courbe fermée aussi ; le vecteur circulation est donc proportionnel à V_0 et la force linéïque est en μV_0^2, donc de la même allure que la force de traînée aux grands nombres de Reynolds, ce qui permet de définir un coefficient C_z analogue au C_x introduit dans la formule donnant la traînée.

7 Autres types d'écoulements.

On vient d'étudier en détail, les écoulements les plus simples, ceux qui sont parfaits, stationnaires, irrotationnels et incompressibles, avec comme seules forces celle de gravité et de pression, donc sans force de Coriolis et sans force de Laplace. Nous allons maintenant étudier systématiquement ce qui se passe lorsque l'une de ces six hypothèses n'est pas réalisée dans cinq paragraphes et une partie (les fluides visqueux méritent d'être développés).

Bien évidement, ce domaine où les choses se compliquent relève essentiellement de l'expérimentation et de la résolution numérique assistée par ordinateur. Ce qui suit ne prétend pas donner des modes de résolution mais des points de vue pertinents qui sous-tendront les pistes expérimentales et numériques.

7.a Ecoulements rotationnels. Tourbillons et cyclones. Evolution du vecteur-tourbillon

Nous étudions ici un mouvement de tourbillon au sens non scientifique de ce terme, un mouvement où le fluide tourne en rond. Le cas extrême est celui d'un écoulement orthoradial dans une symétrie cylindrique ; les lignes de courant sont des cercles axés sur l'axe de symétrie et le théorème de Bernoulli simple ne nous apprend rien de plus que ce que nous sachions déjà par symétrie. L'astuce consiste à se souvenir que le théorème de Bernoulli est un corollaire de la formule d'Euler, établi dans des conditions particulières ; si le premier n'apprend rien au remonte à la seconde, toujours valable (pour un fluide parfait). Voyons cela avec deux exemples classiques.

• Tourbillon à la surface de l'eau.

A moitié réveillé au petit matin blême, je tourne longuement mon café et finis par me demander quelle est la forme de la surface.

Je considère comme une hypothèse de travail raisonnable que, vu l'application que

je mets à touiller, le café tourne en bloc comme un solide avec une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical Oz ; dans ce cas que le rotationnel du champ de vitesses est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\,\overrightarrow{\omega}$ (voir chapitre précédent). Une quasi-particule à une distance r de l'axe a un mouvement circulaire uniforme d'accélération $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -r\,\omega^2\,\overrightarrow{e_r}$ où $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire radial. La forme la plus pertinente de l'équation d'Euler est ici :

$$\mu\,\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\mu\,r\,\omega^2\overrightarrow{e_r} = \mu\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = -\mu\,g\,\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

d'où par projection sur les axes radial, orthoradial et axial :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu\,r\,\omega^2 \\ \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu\,g \end{cases}$$

qui s'intègre en $p(r,\theta,z) = p(0,0,0) + \mu\,\left(\frac{r^2\,\omega^2}{2} - g\,z\right)$. La surface libre où la pression est la pression atmosphérique p_a est de révolution et a pour équation dans tout plan méridien (disons xOz dans lequel $r = x$) :

$$z = \frac{r^2\,\omega^2}{2} + \frac{p(0,0,0) - p_a}{\mu\,g}$$

qui est l'équation d'un paraboloïde de révolution.

Remarque : Le raisonnement juste qui vient d'être fait conduit au même résultat que l'application, en dehors de ses conditions de validité, du théorème de Bernoulli généralisé. Pourquoi ? Parce que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\,\omega\,\overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{v} = r\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}$ et, sur la ligne de courant, $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$, ce qui annule le terme $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ et tout se passe donc comme si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$ était nul (hypothèse irrotationnelle) puisque dans le démonstration qui précède le terme qui le contient est nul. Il s'agit donc d'une coïncidence.

• Modélisation d'une tornade ou d'un cyclone.

On modélise ici une tornade ou un cyclone par un écoulement à symétrie cylindrique d'axe Oz, à vitesse partout orthoradiale $\overrightarrow{v}(M) = v(r)\,\overrightarrow{e_\theta}$. A l'extérieur d'un cylindre de rayon a l'écoulement est irrotationnel, à l'intérieur il est à rotationnel axial uniforme et stationnaire et l'on note $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\,\Omega_0\,\overrightarrow{e_z}$. Dans la réalité, on aurait plutôt $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\,\Omega(r)\,\overrightarrow{e_z}$ où $\Omega(r)$ décroît de $r = 0$ à $r \to \infty$ avec une concavité vers le bas jusqu'à un point d'inflexion puis une concavité vers le haut et l'on a remplacé ce type de décroissance par un créneau plus aisé à traiter avec les mêmes résultats qualitatifs.

Plutôt qu'utiliser l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques pour trouver $v(r)$, ce qui amènerait à résoudre :

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\,v(r)] = 2\,\Omega(r)$$

certes sans difficulté, utilisons plus élégamment le théorème de STOKES (c'est le théorème d'AMPÈRE de l'électro-magnétisme qui nous y fait penser) à un cercle C d'axe Oz de rayon r formant la frontière d'un disque D ; on a donc :

$$\oint_C \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 2\,\pi\,r\,v(r) = \iint_D \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_D 2\,\Omega(r)\,\mathrm{d}S$$

Si $r < a$, $\Omega(r) = \Omega_0$ sur tout le disque D, d'où $2\,\pi\,r\,v(r) = 2\,\Omega_0\,\pi\,r^2$ et $v(r) = r\,\Omega_0$ (on retrouve bien sûr le résultat du sous-paragraphe précédent. Si $r > a$, alors $\Omega(r) = \Omega_0$ sur un disque de rayon a et nul sur la couronne de rayons a et r, d'où $2\,\pi\,r\,v(r) = 2\,\Omega_0\,\pi\,a^2$ et $v(r) = \frac{a^2\,\Omega_0}{r}$.

Remarque 1 : La vitesse est nulle sur l'axe ($r = 0$, c'est l'œil du cyclone) croît jusque $r = a$ puis décroît ensuite pour s'annuler à l'infini ; la vitesse est maximale en périphérie de la zone tourbillonnaire où elle vaut $v_{max} = a\,\Omega_0$.

Remarque 2 : On vérifierait aisément, avec la formule de la divergence en coordonnées cylindriques que cet écoulement est incompressible.

Dans l'approximation d'un *fluide* incompressible (voir plus haut), la pression pour $r > a$ se calcule à partir du théorème de BERNOULLI généralisé ; en se limitant à la pression au niveau du sol et en notant p_∞ la pression loin du cylindre au niveau du sol, on a donc successivement :

$$\frac{p_\infty}{\mu} + \frac{0^2}{2} = \frac{p(r)}{\mu} + \frac{v(r)^2}{2} = \frac{p(r)}{\mu} + \frac{a^4\,\Omega_0^2}{2\,r^2}$$

$$p_e(r) = p_\infty - \frac{\mu\,a^4\,\Omega_0^2}{2\,r^2}$$

Pour $r < a$, on raisonne comme dans le sous paragraphe précédent (utilisation de la formule d'EULER) pour aboutir au même résultat (ici au niveau du sol) :

$$p_i(r) = p(0) + \frac{\mu\,r^2\,\Omega_0^2}{2}$$

Par continuité de la pression en $r = a$, la dépression totale $\Delta p = p_\infty - p_0$ qu'on peut lier à la vitesse maximale s'obtient ainsi :

$$p_e(a) = p_\infty - \frac{\mu\,a^4\,\Omega_0^2}{2\,a^2} = p_i(a) = p(0) + \frac{\mu\,a^2\,\Omega_0^2}{2}$$

$$\Delta p = p_\infty - p_0 = \mu\,a^2\,\Omega_0^2 = \mu\,v_{max}^2$$

Par exemple, pour un cyclone d'une rare violence pour lequel v_{max} vaudrait 216 km/h soit 60 m/s (juste à la limite de 20 % de la vitesse du son pour admettre que l'air est incompressible) et avec une masse volumique de l'air de 1,3 kilogramme par mètres cube, la dépression totale est légèrement inférieure à 5 kilopascals soit 5 % de la pression normale. Comprenez que c'est ce qui explique que la pression atmosphérique varie très peu autour

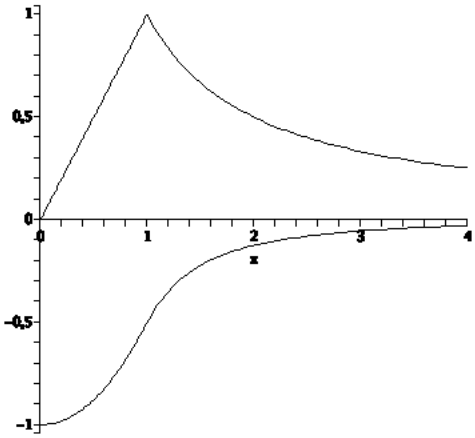

FIGURE 16 – Modèle d'une tornade.

de la pression normale : une variation faible provoque des événements paroxystiques qui, à terme, ramènent la pression à sa valeur initiale.

La figure 16 p. 53 consigne ces résultats sous forme d'un graphe en coordonnées réduites (unité de longueur pour l'abscisse : a, unité d'ordonnée pour la vitesse en ordonnée : v_{max}, unité d'ordonnée pour la pression en ordonnée : Δp) donnant la vitesse $v(r)$ (au-dessus de l'axe) et la différence de pression $p(r) - p_\infty$ (au-dessous) en fonction de la distance r à l'axe.

• Evolution du rotationnel avec le temps.

Reprenons ici une remarque sur le théorème de LAGRANGE que nous avions faite dans le paragraphe 3.d p. 16. Pour un fluide parfait incompressible (hors forces non courantes et en régime a priori non permanent), le théorème d'EULER s'écrit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g\,z) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{p}{\mu}\right)$$

En en prenant le rotationnel (qui commute avec la dérivée temporelle) et sachant qu'un gradient a un rotationnel nul, on en déduit que :

$$\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}\right)$$

Dans le modèle de cyclone qui vient d'être étudié, pour $r > a$, on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ d'où $\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$. Pour $r < a$, on a $\overrightarrow{v} = r\,\Omega_0\,\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\,\Omega_0\,\overrightarrow{e_z}$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = -2\,r\,\Omega_0^2\,\overrightarrow{e_r}$

et la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques rappelée ci-dessous :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\,\overrightarrow{e_\theta}\right] + \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}$$

donne ici aussi :

$$\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$$

qui traduit la permanence du phénomène. La réalité est bien sûr plus complexe (forces de Coriolis, courants ascendants dans la zone rotationnelle [32], échanges thermiques intenses) mais la tendance de fond est l'immobilisme. Un cyclone tropical peut perdurer plusieurs semaines de sa naissance à sa mort et se déplace lentement ; il en est de même pour une situation dépressionnaire capable de pourrir le temps qu'il fait pendant une bonne semaine avant, non de disparaître mais de se décaler chez nos voisins. La grande tache rouge de Jupiter (voir figure 17 p. 54) est un gigantesque anticyclone à la surface de Jupiter, gros comme trois fois la Terre, il est stable depuis trois cent cinquante ans (depuis 1665, découverte de Cassini) qu'on le connaît (il évolue toutefois : il est passé du brun au rouge autour de 1878 et continue de changer lentement de couleur ; il se déplace aussi lentement).

Figure 17 – Grande tache rouge de Jupiter.

7.b Ecoulements non permanents. Coup de bélier. Implosion d'une bulle.

Nous donnerons ici deux exemples qui suffiront à donner la méthode à exploiter.

• Coup de bélier dans une canalisation.

Une canalisation horizontale de section S constante, de longueur L permet la vidange d'un réservoir empli d'un fluide incompressible et non visqueux (de l'eau !) dont le niveau H au dessus de la canalisation varie suffisamment lentement pour qu'on puisse le considérer comme constant. L'extrémité de la canalisation est ouverte de sorte qu'un jet d'eau s'en

32. qui aspirent l'air en engendrant la rotation (voir plus haut la vidange d'un évier).

échappe dans l'atmosphère qui fixe donc la pression de l'eau à cet endroit (on note p_a). L'abscisse x d'un point M de la canalisation est comptée avec une origine au niveau où elle se raccorde au réservoir. Tout ceci est résumé par la figure 18 p. 55.

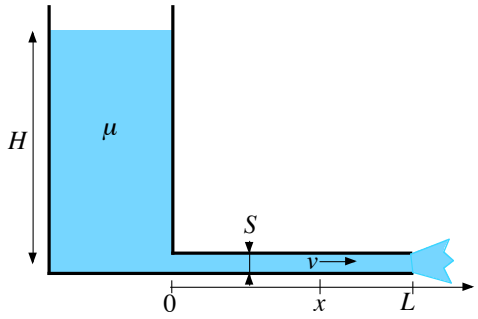

FIGURE 18 – Coup de belier.

A toute abscisse, le débit massique qui parcourt la canalisation est $\mu\, S\, v$ où v est la vitesse d'écoulement. La masse d'eau contenue entre deux abscisses fixes de la canalisation est constante, que le régime d'écoulement soit stationnaire ou non, par le simple fait que le volume concerné est constant et le fluide incompressible ; il en résulte que le débit volumique donc aussi la vitesse v est uniforme (mais pas forcément stationnaire, on note $v(t)$), avec comme corollaire que l'écoulement est irrotationnel. Le théorème de BERNOULLI s'applique donc et il en résulte que, dans la canalisation, la pression est uniforme, égale donc à celle p_a à son extrémité. Accessoirement, la formule de TORRICELLI (voir le paragraphe 3.b p. 8) donne une vitesse $v_0 = \sqrt{2\, g\, H}$ et donc un débit massique $D_0 = \mu\, S\, v_0$.

Si nous considérons maintenant ce qui se passe quand l'extrémité de la canalisation est fermée, disons par un robinet ; on tombe alors dans le champ de l'hydrostatique et la pression dans la canalisation est classiquement $p = p_a + \mu\, g\, H$.

Venons-en à l'objet de ce sous-paragraphe : la phase de fermeture. Plaçons-nous par exemple dans le cas où le robinet est fermé progressivement pendant un temps T de sorte que le débit décroît linéairement avec le temps selon la loi $D(t) = \mu\, S\, v_0\, \left(1 - \frac{t}{T}\right)$; la vitesse, uniforme et non stationnaire est donnée par $D(t) = \mu\, S\, v(t)$; d'où, vectoriellement :

$$\overrightarrow{v}(t) = v_0\, \left(1 - \frac{t}{T}\right)\, \overrightarrow{e_x}$$

Une quasi-particule dans la canalisation a une vitesse $v(t)$ quelque soit sa position ; son accéleration (particulaire) est donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v(t)]$, soit $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\frac{v_0}{T}\, \overrightarrow{e_x}$ et l'équation d'EULER s'écrit :

$$\mu\, \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu\, \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$$

soit en projection sur l'horizontale et après un changement de signe général :

$$\frac{\mu\, v_0}{T} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

En intégrant enfin entre une abscisse x quelconque et l'abscisse L où la pression est p_a tant que le robinet n'est pas fermé car l'eau y est en contact avec l'air, on arrive successivement à :

$$\frac{\mu\, v_0}{T}\,(L-x) = p_a - p(x)$$
$$p(x) = p_a - \frac{\mu\, v_0}{T}\,(L-x)$$

et dans une phase d'ouverture durant le même temps, on aurait $p(x) = p_a + \frac{\mu\, v_0}{T}\,(L-x)$. Pendant les phases de fermeture ou d'ouverture, la pression n'est plus uniforme dans la canalisation.

Le plus important l'est pas là. Plaçons nous là où le phénomène est le plus marqué, en $x = 0$. Si le robinet est grand ouvert pour $t < 0$, $p(0) = p_a$ à tout instant, s'il est fermé pour $t > T$, $p(0) = p_a + \mu\, g\, H$ à tout instant, si le robinet se ferme linéairement pour $0 < t < T$, $p(0) = p_a - \frac{\mu\, v_0\, L}{T}$ à tout instant. On remarque que la pression est une fonction discontinue du temps en $t = 0$ et en $t = T$, ce qui revient à un choc sur la canalisation (appelé *coup de bélier*), au mieux sonore, au pire destructeur si l'on interrompt un débit important en un temps très court, peut-être pas pour la canalisation mais pour les soudures ou brasures qu'elle comporte.

• Implosion d'une bulle.

Etudions un autre exemple, un peu plus compliqué, et utilisons le potentiel des vitesses.

Au voisinage d'une hélice, de brutales chutes de pression par effet VENTURI provoquent l'évaporation de l'eau et la formation de bulles ; ce phénomène s'appelle la cavitation. Ultérieurement, au retour d'une pression normale, les bulles implosent et c'est ce phénomène que nous étudions.

On considère une bulle sphérique de centre O fixe, de rayon $R(t)$ de valeur initiale $R(0) = R_0$, sa pression intérieure est négligée, elle est donc nulle. L'eau extérieure est un fluide incompressible, non visqueux, de masse volumique μ. On néglige l'effet de la pesanteur et par symétrie, le champ de vitesse dans le fluide est $v(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ et le champ de pression $p(r,t)$; on connaît $p(\infty,t) = p_\infty = Cte$.

Le débit massique à l'instant t au travers de la sphère de centre O et de rayon r est $\mu\, S\, v = 4\,\pi\,\mu\, r^2\, v(r,t)$. La masse de fluide incompressible contenue dans le volume constant entre deux de ces sphères de rayons constants est constante et il en résulte l'uniformité du débit ; la grandeur $r^2\, v(r,t)$ est donc indépendante de r ; sa valeur est déterminée par sa limite quand r tend vers $R(t)$ (la surface de la bulle) où, bien évidemment la vitesse est $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ que l'on va noter classiquement $\dot{R}$ avec un point sur le R. On a donc :

$$v(r,t) = \frac{R^2\,\dot{R}}{r^2}$$

Il est intéressant ici (on voit pourquoi dans quelques secondes) d'introduire le potentiel des vitesses tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$ soit en projection sur la direction radiale $v(r,t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$,

d'où :

$$\Phi(r,t) = -\frac{R^2\,\dot{R}}{r}$$

où avoir trouvé un potentiel suffit à prouver que l'écoulement est irrotationnel car le rotationnel d'un gradient est nul.

Projetons sur la direction radiale, l'équation d'Euler écrite sous la forme (le terme en $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}$ disparaît et on néglige la pesanteur) :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) = -\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

on arrive, avec l'incompressibilité et le théorème de Schwartz à :

$$0 = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \frac{1}{\mu}\right)$$

Par intégration vis à vis de r (la constante d'intégration l'est vis-à-vis de r mais peut dépendre de t), on arrive successivement à :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \frac{p}{\mu} = f(t)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}(R^2\,\dot{R}) + \frac{R^4\,\dot{R}^2}{2\,r^4} + \frac{p}{\mu} = f(t)$$

$$-\frac{R^2\,\ddot{R} + 2\,R\,\dot{R}^2}{r} + \frac{R^4\,\dot{R}^2}{2\,r^4} + \frac{p}{\mu} = f(t)$$

or pour $r \to \infty$, on a $p = p_\infty$ quelque soit t, ce qui permet le calcul de $f(t)$, on a donc

$$-\frac{R^2\,\ddot{R} + 2\,R\,\dot{R}^2}{r} + \frac{R^4\,\dot{R}^2}{2\,r^4} + \frac{p}{\mu} = \frac{p_\infty}{\mu}$$

Appliquons ce résultat en $r = R$ où la pression est réputée nulle, on arrive à l'équation différentielle, brute de décoffrage puis mise en forme

$$-(R\,\ddot{R} + 2\,\dot{R}^2) + \frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{p_\infty}{\mu}$$

$$R\,\ddot{R} + \frac{3}{2}\,\dot{R}^2 + \frac{p_\infty}{\mu} = 0$$

Avant de tenter d'intégrer et/ou de jeter l'éponge, effectuons les changements de variable $R = R_0\, x$ et $t = R_0 \sqrt{\dfrac{\mu}{p_\infty}}\, \tau$; l'équation devient :

$$\frac{p_\infty}{R_0^2\, \mu}\, R_0^2 \left[x\, \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 \right] + \frac{p_\infty}{\mu} = 0$$

soit après simplification :

$$x\, \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 + 1 = 0$$

et les conditions initiales ($R(0) = R_0$ et de façon tacite $\dot{R}(0) = 0$) deviennent $x(0) = 1$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0$. L'équation différentielle en $x(\tau)$ et ses conditions initiales ne font plus intervenir que des constantes mathématiques bien déterminées : $\frac{3}{2}$, 1, 0 et sa solution ne dépend donc d'aucun paramètre physique, c'est une fonction bien précise même si on n'arrive pas à l'expliciter et le temps réduit τ_0 pour passer de $x = 1$ à $x = 0$ soit de $R = R_0$ à $R = 0$ doit être considéré comme une constante mathématique bien précise ; en revenant aux vraies variables, le temps d'implosion de la bulle est donc :

$$t_0 = R_0 \sqrt{\frac{\mu}{p_\infty}}\, \tau_0$$

ce qui permet, sans avoir résolu l'équation ni pleuré amèrement de n'avoir pas su le faire, d'affirmer que le temps d'implosion est proportionnel au rayon initial, à la racine carrée de la masse volumique du liquide et inversement proportionnel à la racine carrée de la pression à l'infini ; ne manque que la valeur numérique de τ_0 qui peut être déterminé par résolution numérique et algorithmique.

7.c Fluides compressibles. Tuyère convengente-divergente. Nombre de Mach. Formule de Rankine-Hugoniot.

• Etude d'une tuyère.

Un gaz parfait s'écoule (l'écoulement est permanent) de façon adiabatique réversible (on tentera de justifier plus loin) dans une tuyère à symétrie de révolution, d'axe Ox, de section $S(x)$ lentement variable, de sorte que, d'une part, la vitesse soit partout colinéaire à l'axe Ox et, d'autre part, le problème puisse être considéré comme unidirectionnel en ce sens que les paramètres physiques, masse volumique ρ, pression p, température T et vitesse v, ne dépendent que de l'abscisse x (on néglige la couche limite et la viscosité). Ceci est consigné sur la figure 19 p. 59. Là encore la réalité est un peu plus compliqué mais la modélisation simplificatrice sert au moins à dégager l'essentiel.

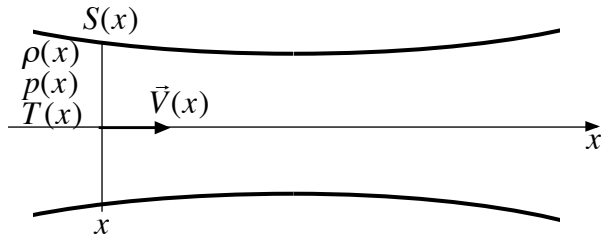

FIGURE 19 – Tuyère convergente-divergente.

Entre l'abscisse à l'entrée de la tuyère ($x = 0$) et une abscisse x quelconque, la masse est constante car on est en régime permanent. Le débit massique à l'entrée (indice 0) et celui à l'abscisse x sont donc égaux, soit avec l'expression du débit massique :

$$D = \rho_0 \, S_0 \, v_0 = \rho(x) \, S(x) \, v(x)$$

Par la suite on supposera S_0 très grand ($S_0 \to \infty$), le débit D fini donc la vitesse v_0 négligeable. Les conditions à l'entrée de la tuyère se résument à la donnée du débit massique. Retenons :

$$D = \rho(x) \, S(x) \, v(x) \qquad \text{(équation 1)}$$

Effectuons un bilan de quantité de mouvement entre deux abscisses voisines et sans oublier les forces sur les parois latérales. On se choisit comme volume de contrôle (son contenu est un système ouvert) le gaz entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. On se choisit comme système (fermé) le contenu du volume de contrôle plus la masse δm_e qui va y entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$, ce qui décrit le système à l'instant t. A l'instant $t + \mathrm{d}t$, il est manifeste que le système se compose du contenu du volume de contrôle et de la masse δm_s qui en est sortie entre t et $t + \mathrm{d}t$. On a bien sûr (cf la question précédente) $\delta m_e = \delta m_s = D \, \mathrm{d}t$.

Intéressons nous à la projection sur Ox de la quantité de mouvement (nous la noterons q) du système. A l'instant t, c'est celle du volume de contrôle (« VdC ») plus celle de δm_e dont la vitesse est $v(x)$, soit

$$q(t) = q_{VdC}(t) + \delta m_e \, v(x) = q_{VdC}(t) + D \, \mathrm{d}t \, v(x)$$

A l'instant $t + \mathrm{d}t$, c'est celle du volume de contrôle plus celle de δm_s dont la vitesse est $v(x + \mathrm{d}x)$, soit

$$q(t) = q_{VdC}(t + \mathrm{d}t) + \delta m_s \, v(x + \mathrm{d}x) = q_{VdC}(t + \mathrm{d}t) + D \, \mathrm{d}t \, v(x + \mathrm{d}x)$$

Puisqu'on est en régime permanent, $q_{VdC}(t + \mathrm{d}t) = q_{VdC}(t)$ et le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en terminant par un développement de Taylor a l'ordre 1 en x :

$$\Sigma F_x = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{q(t + \mathrm{d}t) - q(t)}{\mathrm{d}t} = D \left(v(x + \mathrm{d}x) - v(x) \right) = D \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x$$

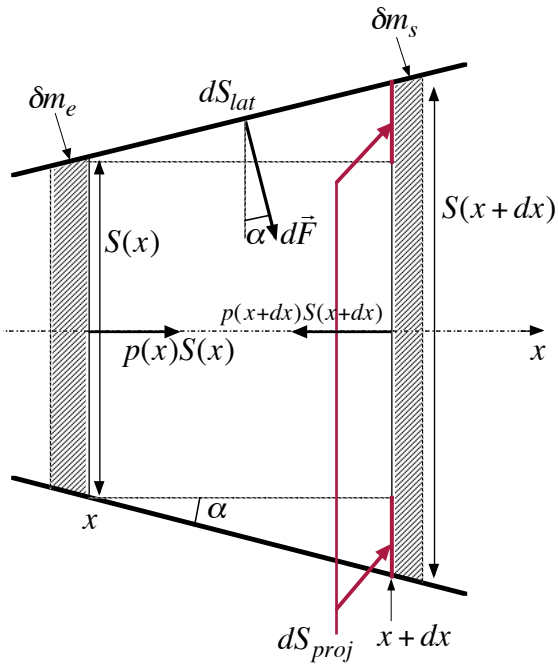

FIGURE 20 – Tuyère (détail).

Puisque l'on a affaire à un gaz, on peut négliger les forces de pesanteur devant les forces de pression. En projection sur Ox la force de pression sur la face d'entrée a pour expression $F(x) = p(x)\,S(x)$ et celle sur la face de sortie $-F(x+\mathrm{d}x) = -p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x)$. Le bilan de ces deux premières forces est

$$F(x) - F(x+\mathrm{d}x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\,S(x)]\,\mathrm{d}x$$

Pour la force de pression $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ (composante $\mathrm{d}F_x$ sur Ox) sur la face latérale de surface $\mathrm{d}S_{lat}$ à laquelle on affectera une pression moyenne p_m intermédiaire entre $p(x)$ et $p(x+\mathrm{d}x)$, en appelant α l'angle entre la normale à cette surface et Ox, on a (voir figure 20 p. 60) :

$$\mathrm{d}F_x = \|\overrightarrow{\mathrm{d}F}\|\,\cos\alpha = p_m\,\mathrm{d}S_{lat}\,\cos\alpha$$

Or $\mathrm{d}S_{lat}\,\cos\alpha$ est l'aire de la projection [33] $\mathrm{d}S_{proj}$ de $\mathrm{d}S_{lat}$ sur un plan orthogonal à Ox, c'est à dire la différence entre les aires de la projection de la face de sortie et celle d'entrée

33. On calcule une aire fondamentalement en additionnant les aires de rectangles élémentaires. Imaginons que l'on projette sur un plan horizontal l'un de ces rectangles élémentaires d'une surface contenue dans un plan incliné d'un angle α en ayant pris soit que sa largeur ℓ soit horizontale et sa longueur L selon la ligne de plus grande pente. Son aire est $S = L\,\ell$. Dans la projection la largeur ℓ, horizontale, se projette en une largeur ℓ' égale à ℓ et la longueur L inclinée de α se projette en $L' = L\,\cos\alpha$. L'aire de la projection est donc $S' = \ell'\,L' = \ell\,\cos\alpha = S\,\cos\alpha$

(cf figure), donc

$$\mathrm{d}F_x = p_m\,\mathrm{d}S_{proj} = p_m\,[S(x+\mathrm{d}x) - S(x)] = p_m\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Puisqu'on cherche la force totale à l'ordre 1 en $\mathrm{d}x$ et que l'expression de $\mathrm{d}F_x$ contient déjà un $\mathrm{d}x$ en facteur, on peut remplacer ici p_m par son expression à l'ordre 0 soit $p(x)$. D'où

$$\mathrm{d}F_x = p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

La dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des trois forces de pression (pour un gaz les forces de pesanteur sont négligeables), donc

$$D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\,S(x)]\,\mathrm{d}x + p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

$$D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\,S(x)] + p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$$

$$D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} - S(x)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -S(x)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

soit en reportant l'expression de D (équation 1) et en simplifiant par $S(x)$

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(équation 2)}$$

Effectuons sur le même principe un bilan énergétique sous la forme la plus adaptée entre deux abscisses voisines. On reprend le même système qu'à la question précédente et en appelant δE_e et δE_s les énergies de δm_e et δm_s, on a

$$E(t) = E_{VdC} + \delta E_e \qquad \text{et} \qquad E(t+\mathrm{d}t) = E_{VdC} + \delta E_s$$

Le système est gazeux, une approche thermodynamique est plus prudente, l'énergie est somme de l'énergie cinétique mésoscopique (c'est-à-dire calculée avec les vitesses observées après « moyennage » de l'agitation thermique, soit $v(x)$ définie dans l'énoncé) et de l'énergie interne, soit en prenant le modèle du gaz parfait à C_v constant (alors $U = n\,C_v\,T$ avec $C_v = R/(\gamma-1)$) et de masse molaire M

$$\delta E_e = \frac{1}{2}\,\delta m_e\,v(x)^2 + \delta n_e\,C_v\,T(x) = \frac{1}{2}\,\delta m_e\,v(x)^2 + \frac{\delta m_e}{M}\,\frac{R}{\gamma-1}\,T(x)$$

et une expression identique pour δE_s, on en déduit aisément avec $\delta m_e = \delta m_s = D\,\mathrm{d}t$ que

$$\frac{E(t+\mathrm{d}t) - E(t)}{\mathrm{d}t} = D\,\left[\frac{1}{2}\,v(x+\mathrm{d}x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x+\mathrm{d}x) - \frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = D\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

Nous allons maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique sous la forme

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_{cin} + \mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{méca}} + \mathcal{P}_{\text{therm}}$$

La puissance mécanique se calcule en multipliant vectoriellement chacune des trois forces de pression par la vitesse associée ; au niveau de la surface latérale, la force de pression est normale et la vitesse de l'écoulement tangentielle, donc la puissance est nulle. Donc

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = F(x)\,v(x) - F(x+\mathrm{d}x)\,v(x+\mathrm{d}x) = p(x)\,S(x)\,v(x) - p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x)\,v(x+\mathrm{d}x)$$

En introduisant l'expression du débit $D = \rho\,S\,v$ (en x et $x+\mathrm{d}x$) puis l'équation d'état ($p\,V = (m/M)\,R\,T$ d'où $p/\rho = R\,T/M$), on arrive à

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = D\,\left[\frac{p(x)}{\rho(x)} - \frac{p(x+\mathrm{d}x)}{\rho(x+\mathrm{d}x)}\right] = D\,\left[\frac{R\,T(x)}{M} - \frac{R\,T(x+\mathrm{d}x)}{M}\right] = -\frac{D\,R}{M}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

La puissance thermique (cf cours sur la conduction thermique) ne dépend que de la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur de la tuyère ; elle n'est pas proportionnelle au débit. Si le débit est suffisamment important, on peut la négliger devant la puissance mécanique proportionnelle au débit, c'est en ce sens que l'écoulement est adiabatique. On peut reformuler ceci en disant qu'avec un débit important, le temps de traversée de la tuyère est trop court pour que le gaz ait le temps d'échanger de la chaleur avec l'extérieur.

On reporte tous les éléments de calcul dans l'expression du premier principe pour arriver à :

$$D\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]\,\mathrm{d}x = -\frac{D\,R}{M}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

soit après simplification par $D\,\mathrm{d}x$ et regroupement des termes [34]

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x) + \frac{R\,T(x)}{M}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R\,\gamma}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]$$

Comme p, ρ et T sont liés par l'équation d'état, ne conservons que deux de ces trois paramètres, les plus pertinents dans cette étude sont p et ρ, on réécrit donc

34. Il est classique qu'en regroupant le terme provenant de l'énergie interne massique($\frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)$) et celui provenant de la puissance des forces de pression ($\frac{R\,T(x)}{M}$), on fasse apparaître l'enthapie massique, comme le montre ici la suite du calcul.

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{p(x)}{\rho(x)}\right]$$

On peut exploiter de deux façons, soit on dit que la quantité entre crochets est constante, dont on calcule la valeur en $x = 0$ (rappelons que $v(0) = 0$ dans l'approximation choisie)

$$\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{p(x)}{\rho(x)} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{p_0}{\rho_0} \qquad \text{(équation 3)}$$

soit on effectue la dérivation

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p(x)}{\rho(x)}\right) = 0$$

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{\rho(x)} + p(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\rho(x)}\right)\right] = 0$$

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p(x)}{\rho(x)^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right] = 0$$

qu'on peut réécrire pour plus de ressemblance avec l'équation 2

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right] \qquad \text{(équation 4)}$$

Remarquons que la confrontation de l'équation 2 et de l'équation 4 permet d'affirmer que

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$(\gamma-1)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \gamma\,\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$-1\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \gamma\,\left[-\frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$\frac{1}{p(x)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \gamma\,\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln p - \gamma\,\ln\rho) = 0$$

$$\ln p - \gamma\,\ln\rho = \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = Cte$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \exp(Cte) = Cte$$

qui est, sans surprise, une variante de la loi de Laplace $p\,V^\gamma = Cte$ (car $V = m/\rho$ avec m constante). On a donc

$$\frac{p(x)}{\rho(x)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \qquad \text{(équation 5)}$$

Remarquons aussi que l'équation d'Euler lorsqu'on néglige la pesanteur s'écrit, en projection sur l'axe :

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v}\right) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

En régime permanent, avec $\rho = \rho(x)$, $p = p(x)$ et $\overrightarrow{v} = v(x)\,\overrightarrow{e_x}$, on a donc

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)\,\overrightarrow{e_x}) = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e_x}$$

soit en projection sur Ox

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

qui n'est autre que l'équation 2.

On aurait plus être beaucoup plus rapide et retrouver le même système d'équations à partir de la conservation du débit massique, de l'équation d'Euler et de la loi de Laplace ; mais je tenais à montrer comment gérer les forces latérales et, encore une fois, montrer que l'approche énergétique passe obligatoirement par le premier principe de la thermodynamique.

Effectuons maintenant la synthèse de tout cela. Nous noterons $\xi(x) = p(x)/p_0$ et allégerons l'écriture en ξ pour $\xi(x)$. On a donc

$$p(x) = \xi\,p_0$$

De l'équation 5 (loi de Laplace), on tire aisément

$$\rho(x) = \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\rho_0$$

On reporte dans l'équation 3 et l'on a

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_o}{\rho_0}\,\left(1-\xi^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)}$$

On reporte enfin dans l'équation 1

$$D = \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\rho_0\,S(x)\,\sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_o}{\rho_0}\,\left(1-\xi^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)} = \sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma-1}\,p_o\,\rho_0}\;\;S(x)\;\;\xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\sqrt{1-\xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Nous noterons $D = K\,S(x)\,f(\xi) = K\,S(x)\,f(p(x)/p_0)$ avec

$$K = \sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma - 1}\,p_o\,\rho_0} \qquad \text{et} \qquad f(\xi) = \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Il nous faut étudier la fonction f. Puisque l'écoulement se fait dans le sens des pressions décroissantes, on a $p(x) < p_0$ donc $\xi < 1$; par ailleurs une pression est positive [35] et l'on va donc étudier $f(x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$. D'ores et déja, on a

$$f(0) = f(1) = 0$$

et la dérivée est successivement :

$$f'(x) = \frac{1}{\gamma}\,\xi^{\frac{1}{\gamma}-1}\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}} + \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\frac{-(1-\frac{1}{\gamma})\,\xi^{-\frac{1}{\gamma}}}{2\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\gamma}\,\xi^{\frac{1}{\gamma}-1}\,\frac{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}} - \frac{(1-\frac{1}{\gamma})}{2\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\gamma}\,(\xi^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1) - \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\gamma})}{\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}} = \frac{(\xi^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1) - \frac{1}{2}(\gamma - 1)}{\gamma\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}}$$

$$f'(x) = \frac{\xi^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{2}}{\gamma\,\sqrt{1 - \xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} = \frac{\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{2}}{\gamma\,\sqrt{1 - \xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}$$

la dérivée f' s'annule et f est donc maximale donc, avec $\gamma = 1,4$ (il s'agit d'air), pour

$$\xi = \xi_m = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,528$$

Il ne reste qu'à conclure : dans la tuyère la pression décroît de p_0 à l'entrée à $p_s = p_{atm}$ en sortie, donc ξ décroît de 1 à $\xi_s = p_s/p_0$. Si ξ_s est supérieur à ξ_m, $f(\xi)$ croît de l'entrée jusqu'à la sortie et, puisque $D = K\,S(x)\,f(\xi)$ avec D et K constants, $S(x)$ décroît. Par contre, toujours de l'entrée vers la sortie, si ξ_s est inférieur à ξ_m, f croît de $\xi = 1$ à $\xi = \xi_m$ puis décroît, donc $S(x)$ décroît puis croît. Comprenons par là que si la forme de la tuyère ne respecte pas cette géométrie convergente-divergente, elle ne pourra pas fonctionner correctement.

Voyez en illustration (figure 21 p. 66) la partie terminale divergente de la tuyère du moteur d'Ariane ainsi que des cheminées de centrale nucléaire qui se terminent par l'amorce d'une partie divergente.

35. sauf dans des cas exceptionnels où les forces attractives de Van der Waals l'emportent

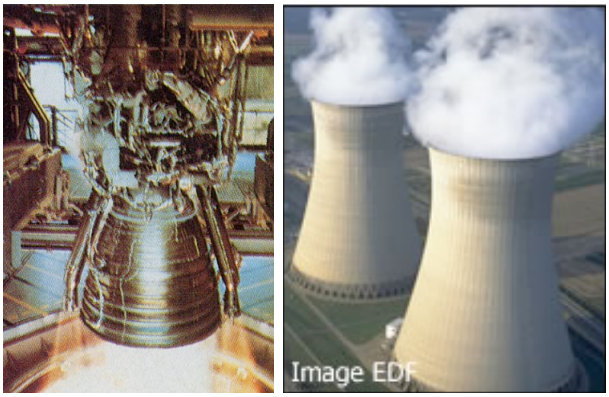

FIGURE 21 – Moteur Vulcain. Cheminée de centrale.

Remarquons l'essence du rôle de la tuyère : n'importe quel cours (et aussi mon chapitre A-VI) montre qu'un réacteur d'avion ou de fusée exerce une poussée égale au produit du débit massique par la vitesse d'éjection. A débit donné, on a intérêt à avoir la vitesse la plus élevée possible. La tuyère maintient le débit constant et permet par la modification de sa section de modifier la vitesse.

• Nombre de Mach.

Cette autre approche permet une remarque finale intéressante et introduit un nombre adimensionné pertinent pour les fluides compressibles.

On introduit la vitesse du son *locale* telle que $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ (voir chapitre suivant) puis *le nombre de* MACH $\mathcal{M} = v/c$.

Partons de l'équation 2

$$\rho(x)\, v(x)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

remplaçons ρ par $\gamma\, p/c^2$ (cf définition de c) :

$$\frac{\gamma\, p(x)}{c^2}\, v(x)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

puis $1/c$ par $\mathcal{M}/v$ (cf définition du nombre de Mach)

$$\frac{\gamma\, p(x)\mathcal{M}^2}{v(x)^2}\, v(x)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$\text{d'où} \qquad \frac{\mathcal{M}^2}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\gamma\, p}\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{(équation 6)}$$

Prenons la différentielle logarithmique de l'équation 1

$$\rho(x)\,S(x)\,v(x) = D$$

$$\ln\rho(x) + \ln S(x) + \ln v(x) = \ln D$$

$$\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{S(x)}\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v(x)}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(équation 7)}$$

et de l'équation 5

$$\frac{p(x)}{\rho(x)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

$$\ln p(x) - \gamma\,\ln\rho(x) = \ln p_0 - \gamma\,\ln\rho_0$$

$$\frac{1}{p(x)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \gamma\,\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(équation 8)}$$

En utilisant successivement l'équation 6, l'équation 8 et l'équation 7, on a :

$$\frac{\mathcal{M}^2}{v}\,\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\gamma\,p}\,\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{S(x)}\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v(x)}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$(\mathcal{M}^2 - 1)\,\frac{1}{v(x)}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{S(x)}\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$$

$$(\mathcal{M}^2 - 1)\,\frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}$$

Cette relation est connue sous le nom de formule de Rankine-Hugoniot.

On veut une accélération donc $\frac{dv}{v}$ positif ; au début les vitesses sont petites donc subsoniques, $\mathcal{M}$ est inférieur à l'unité et $\mathcal{M}^2 - 1$ est négatif donc $\frac{dS}{S}$ et $\mathrm{d}S$ sont négatifs, S décroît : la tuyère converge. Puis la vitesse devient supersonique et les conclusions sont inversées. L'écoulement devient supersonique là où la tuyère est la plus étroite.

7.d Ecoulements avec forces de Coriolis. Dépressions et anticyclones. Courants marins et thermocline. El Niño.

La théorie n'est guère compliquée à établir : on reprend la démonstration de la formule d'Euler et on ajoute dans le bilan des forces appliquées à une quasi-particule de masse $\mathrm{d}m$, celle de Coriolis, à savoir $-2\,\mathrm{d}m\,\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{\omega}$ est le vecteur rotation de la Terre dans le référentiel de Foucault et l'on arrive aisément à :

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - 2\,\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

Remarque : j'ai déjà exprimé ma réserve vis-à-vis du vecteur tourbillon $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$ car écrire $\overrightarrow{\omega}$ dans l'équation d'Euler c'est déjà courir le risque de croire que c'est une

grandeur indépendante de $\overrightarrow{v}$. Dans le contexte qui nous intéresse ici, c'est en outre se donner des verges pour se faire battre : dans la troisième formulation de l'accélération, on trouvera $2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}$ dans le membre de gauche avec $\overrightarrow{\omega}$, vecteur-tourbillon et dans le bilan des forces massiques, dans le membre de gauche, on trouvera $-2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{\omega}$, vecteur rotation de la Terre. Il sera tentant de croire que deux termes formellement identiques au signe près dans les deux membres résulte d'une faute de raisonnement et qu'il s'agit d'un même phénomène compté à tort deux fois. Il n'en est absolument rien [36]. Vous comprendrez ici que je tire à vue [37] sur quiconque me parle de vecteur-tourbillon.

Le vecteur rotation de la Terre $\overrightarrow{\omega}$ est parallèle à l'axe des pôles, orienté du pôle sud vers le pôle nord car la Terre tourne en sens inverse du mouvement du Soleil donc d'ouest en est. A la surface du globe à la latitude λ, $\overrightarrow{\omega}$ fait,dans le plan méridien avec la verticale un angle égal à la co-latitude $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$. En choisissant dans cette région l'axe Oz vertical, l'axe Ox vers le nord et pour avoir un trièdre direct l'axe Oy vers l'ouest, on a donc, en notant $\omega = \|\overrightarrow{\omega}\|$:

$$\overrightarrow{\omega} = \omega\,(\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z})$$

Etudions maintenant deux exemples intéressants pour leur intérêt dans l'étude de l'atmosphère et des océans.

• Anticyclones et dépressions.

On veut étudier ici la vitesse d'un vent généré par un gradient de pression au sol. On supposera ici que le vent est une douce brise, de vitesse suffisamment faible pour qu'on puisse en première approximation négliger les termes d'ordre deux (soit $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v}$), que la situation soit d'évolution suffisamment lente pour que l'on puisse la considérer comme stationnaire ($\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$) et qu'on soit en plaine de sorte que $\overrightarrow{v}$ soit horizontal (dans le plan xOy). L'équation d'Euler se simplifie alors en :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{g} - 2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

Décomposons chaque vecteur en une composante verticale (sur Oz) et une composante horizontale (dans xOy avec un indice H) soit $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$ (par définition de la verticale), $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_H$ (vitesse horizontale), $\overrightarrow{\omega} = \omega\,(\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z})$ (cf supra) et pour $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$, on note $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \frac{\partial p}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}_H\,p$. On a donc, après un changement de signe général :

$$\overrightarrow{0} = g\,\overrightarrow{e_z} + 2\,\omega\,(\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z}) \wedge \overrightarrow{v}_H + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}_H\,p\right)$$

36. En approfondissant encore plus, le vecteur-tourbillon absolu, dans le référentiel de Foucault, galiléen ou presque, est somme du vecteur-tourbillon relatif dans le référentiel terrestre et du vecteur rotation d'entraînement, celui de la Terre dans le référentiel de Foucault, le premier dans un membre, le second dans l'autre, changé de signe.

37. C'est très hyperbolique ; je suis en fait non-violent.

Projetons dans le plan horizontal (le produit vectoriel de deux vecteurs horizontaux est vertical ou nul, d'un vertical et d'un horizontal, horizontal), d'où :

$$\overrightarrow{0} = 2\,\omega\,\cos\theta\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{v}_H + \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}_H\,p$$

En module, on en déduit que :

$$\|\overrightarrow{v}_H\| = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}_H\,p\|}{2\,\mu\,\omega\,\cos\theta}$$

donc plus le gradient est important, plus le vent est fort.

En direction, $\overrightarrow{v}_H$ est orthogonal dans le plan horizontal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_H\,p$ donc parallèle aux courbes isobares. Si autour d'un anticyclone ou une dépression, les courbes isobares sont fermées et entourent respectivement un maximum ou un minimum de pression, les lignes de courant suivent ces isobares et le débit massique entrant ou sortant de cette courbe est nul ce qui ne dégonfle pas la surpression ou ne comble pas la dépression ; ce qui assure une bonne stabilité à ces phénomènes : quand le temps est pourri, c'est pour une bonne semaine ; on a déjà vu cela plus haut mais l'étude menée ici justifie le modèle utilisé là. Certes il y a des correctifs à cette conclusion (influence des termes quadratiques, de la composante verticale de la vitesse dans les courants ascendants ou descendants, etc.) mais ce ne sont que des termes correctifs à une tendance de fond.

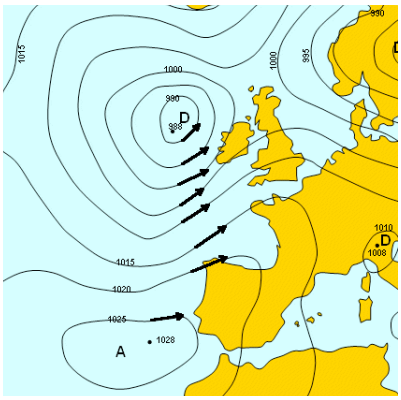

FIGURE 22 – Bulletin météo.

En direction et sens, $\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{v}_H$ est directement orthogonal à $\overrightarrow{v}_H$ dans le plan horizontal orienté par la verticale ascendante, d'où $\overrightarrow{v}_H$ est directement orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_H\,p$ dans l'hémisphère nord ($\cos\theta > 0$). Le gradient est dirigé dans le sens des pressions croissantes, vers l'intérieur pour un anticyclone autour duquel donc le vent tourne dans le sens trigonométrique inverse et vers l'extérieur pour une dépression autour de laquelle donc le vent tourne dans le sens trigonométrique direct (conclusions inversées dans l'hémisphère sud). La figure 22 p. 69 montre une situation avec un anticyclone au large de l'Espagne et une

dépression au large de l'Irlande, ce qui conduit sur la France et la Grande-Bretagne à des vents de sud-ouest ; il n'est pas sorcier d'en déduire qu'il pleuvra.

• Courants marins et thermocline. El Niño.

◦ *Surface de l'océan.*

Etudions l'effet des forces de Coriolis sur un courant marin océanique comme le Gulf Stream. Vu l'ampleur d'un tel courant qui tourne dans tout un océan, on peut se placer dans une région assez vaste sans que la courbure de la trajectoire de l'eau soit sensible ; pour fixer les idées, nous étudierons ici un courant dirigé vers le nord de sorte que sa vitesse soit $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{e_x}$. Avec les mêmes hypothèses simplificatrices que dans le sous-paragraphe précédent, faibles vitesses (pour un courant de l'ordre typique du mètre par seconde) et régime permanent (ça fait des siècles qu'on observe les courants océaniques sans changement notable), on retrouve l'équation d'Euler adaptée :

$$\overrightarrow{0} = g\,\overrightarrow{e_z} + 2\,\omega\,(\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z}) \wedge (v\,\overrightarrow{e_x}) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}\right)$$

On en déduit par projection sur les trois axes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -2\,\mu\,\omega\,\cos\theta\,v \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu\,g \end{cases}$$

On intègre en prenant une origine choisie arbitrairement à la surface de l'eau où règne la pression atmosphérique p_0, on trouve pour tout point dans l'eau ou à la surface :

$$p(x, y, z) = p_0 - \mu\,g\,z - 2\,\mu\,\omega\,\cos\theta\,v\,y$$

d'où l'on déduit que la surface de l'eau ($p = p_0$) est le plan d'équation :

$$z = -\frac{2\,\omega\,\cos\theta\,v}{g}\,y$$

penché vers l'est. Avec $g \sim 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $\omega \sim 10^{-4}\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ($2\,\pi$ radians par jour *sidéral*) et $v \sim 2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ (typique du Gulf Stream) et autour de $\theta = 45^\circ$, on trouve une pente de l'ordre de $3\,10^{-5}$, ce qui paraît peu mais comme le Gulf Stream a une largeur qui peut atteindre par endroits 80 km, cela conduit entre ses deux bords à un dénivellé de 2 à 3 mètres.

◦ *Thermocline.*

Les courants marins ont des vitesses qui décroissent en profondeur, car ils sont générés en surface et se propagent vers le bas par viscosité. De même l'océan est chaud en surface grâce au rayonnement solaire et la température décroît elle aussi avec la profondeur

(le réchauffement surfacique se propage vers le bas par conduction thermique) et ce réchauffement conduit à une infime dilatation de l'eau donc une infime diminution de masse volumique.

Pour comprendre simplement les choses sans se perdre dans les calculs, on étudie un modèle à deux couches :

- une couche surfacique (dont la profondeur importe peu) de masse volumique μ_0 parcourue par un courant de vitesse v (toujours vers le nord)
- une couche profonde de masse volumique $\mu_1 > \mu_0$ avec $\mu_1 - \mu_0 \ll \mu_0$ sans courant

La raisonnement précédent donne dans la couche surfacique (il suffit de remplacer μ par μ_0) :

$$p(x, y, z) = p_0 - \mu_0\, g\, z - 2\, \mu_0\, \omega\, \cos\theta\, v\, y$$

et dans la couche surfacique (il suffit de remplacer μ par μ_1 et v par 0) :

$$p(x, y, z) = p_1 - \mu_1\, g\, z$$

où p_1 est une constante qu'il importe peu de connaître. A l'interface entre les deux couches, appelée *thermocline*, la continuité de la pression impose que les deux expressions donnent la même pression d'où la relation valable à l'interface et qui en est l'équation :

$$p_0 - \mu_0\, g\, z - 2\, \mu_0\, \omega\, \cos\theta\, v\, y = p_1 - \mu_1\, g\, z$$

soit encore :

$$z = \frac{2\, \mu_0\, \omega\, \cos\theta\, v}{(\mu_1 - \mu_0)\, g}\, y + \frac{p_1 - p_0}{(\mu_1 - \mu_0)\, g}$$

La pente a changé de signe par rapport à celle de la surface et, surtout, en valeur absolue elle est $\frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0}$ qui est très grand devant l'unité ; l'ordre de grandeur est de mille fois plus grand : pour le Gulf Stream, la thermocline peut être de 2 à 3 kilomètres plus profonde côté est !

◦ ***Le phénomène El Niño.***

L'occasion est trop belle pour ne pas donner un début d'explication au phénomène *El Niño*. Normalement, dans le Pacifique sud, un courant marin donne une pente importante à la thermocline. Du côté du Chili l'eau froide, riche en poissons est proche de la surface, ce qui procure aux pêcheurs des prises abondantes et du côté de l'Australie, l'imposante masse d'eau chaude provoque une évaporation intense, qui provoque une nébulosité qui atténue la vigueur des rayons solaires. Tout ceci est schématisé par la figure 23 p.72, réalisée par un artiste injustement méconnu.

Pour des raisons encore mal élucidées, certaines années, aux alentours de Noël (El Niño), les vents qui provoquent le courant mollissent et par conséquent le courant faiblit et la thermocline bascule ce qui envoie une grande masse[38] d'eau de l'Australie vers le

38. Sa forme plus bombée en-dessous (beaucoup plus que sur la figure) qu'au-dessus sera justifiée dans le chapitre B-XV.

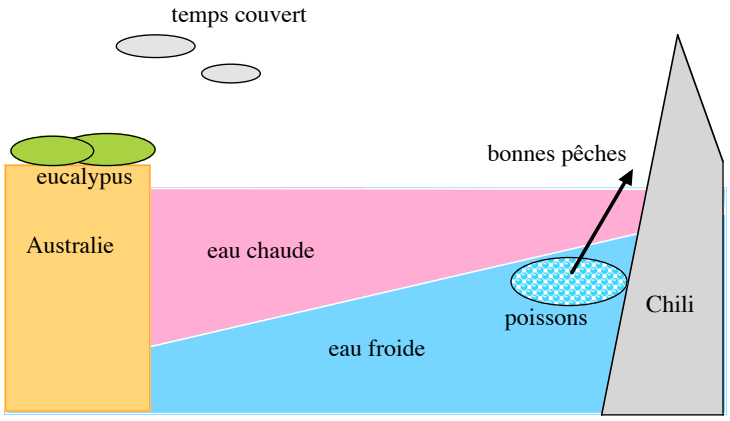

FIGURE 23 – Océan Pacifique, situation normale.

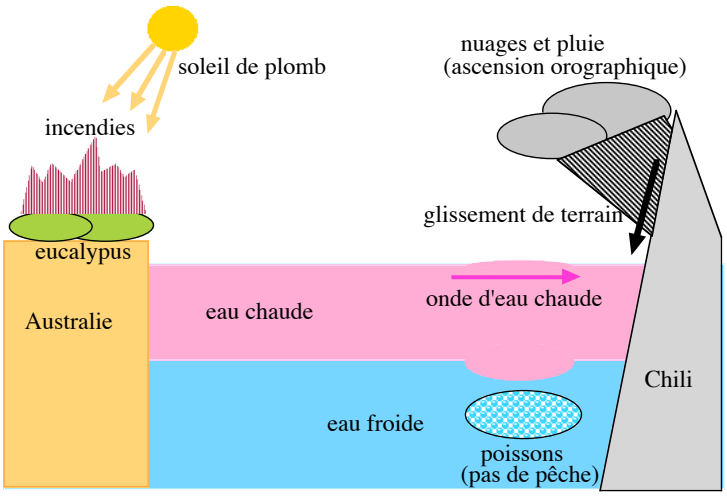

FIGURE 24 – Océan Pacifique, situation « El Niño ».

Chili (qui met une bonne semaine à faire ce trajet). Cette masse d'eau entraîne avec elle la nébulosité et lorsque celle-ci escalade la Cordillère des Andes, elle se condense en violentes pluies qui provoquent des glissements de terrain, ce qui s'ajoute à un autre malheur : les eaux froides et les poissons qu'elle contiennent ont plongé et les pêcheurs rentrent bredouilles. En Australie, plus rien ne protège les forêts d'eucalyptus de l'ardeur [39] du soleil ce qui provoque de monstrueux incendies. Ce ensemble de catastrophes est schématisé par la figure 24 p.72.

39. de l'ancien verbe « ardre » (remplacé par « brûler »). L'adjectif dérivé du participe présent est « ardent » ; le « buisson ardent », c'est le buisson qui brûle. Que les ardeurs du soleil provoquent des incendies n'est qu'une simple conséquence de l'étymologie.

7.e Ecoulements avec forces de Laplace. Magnéto-hydrodynamique.

• Couplage magnéto-hydrodynamique.

Considérons un fluide conducteur (plasma ionisé, métal liquide, solution ionique) placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ imposé de l'extérieur. Si le fluide est en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$, le champ électromoteur $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ (voir chapitre C-VII sur l'induction électromagnétique) va induire un courant ; inversement, s'il y a un courant de densité $\overrightarrow{j}$, la force de LAPLACE volumique $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$ (voir chapitre C-VIII sur l'axiomatique de l'électromagnétisme) va influer sur le mouvement du fluide ; il y aura donc un couplage, au travers du champ magnétique, entre hydrodynamique et électromagnétisme.

La situation va être monstrueusement complexe. Les paramètres connus ou inconnus sont nombreux : électromagnétiques (champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$, densités de charge ρ_e et de courant $\overrightarrow{j}$), hydrodynamique (vitesse $\overrightarrow{v}$, pression p et masse volumique notée ρ dans ce paragraphe pour éviter la confusion avec la constante magnétique μ_0), voire thermodynamique (les mêmes p et ρ et la température T en plus). Les équations à utiliser sont électromagnétiques (les équations de MAXWELL, la conservation de la charge et un modèle de conduction, la loi d'OHM vraisemblablement), hydrodynamiques (l'équation d'EULER et la conservation de la masse), éventuellement thermodynamiques (équation d'état et premier principe, voire une loi de conductivité thermique) ; toutes ces équations contiendront un certain nombre de termes non linéaires (ceux de couplage mentionnés ci-dessus, ceux de l'équation d'EULER) et pour couronner le tout, les courants qui parcourent le fluide créent un champ magnétique qui s'ajoute au champ extérieur et intervient donc dans le couplage par des termes eux aussi non-linéaires.

Il va sans dire que la magnéto-hydrodynamique fait encore l'objet de recherches et que certains fait expérimentaux sont encore loin d'être compris comme le mouvement de la matière solaire ou de la partie liquide du noyau terrestre.

• Un exemple simple d'ondes magnétohydrodynamiques.

Etudions un cas où pas mal de complications s'aplanissent : celui d'un fluide incompressible de masse volumique constante ρ_0 (plus besoin de thermodynamique), de conductivité σ très élevée (qu'on modélisera par une conductivité infinie, ce qui simplifiera la loi d'OHM et la gestion de l'électromagnétisme) et placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}_0$ assez intense pour que le champ créé par les courants soit négligeable.

En l'absence de mouvement et de courant, la situation de référence est la suivante : le fluide est à l'équilibre (et a donc une vitesse nulle), la pression p_0 est uniforme (on néglige donc le rôle de la pesanteur) et rien ne crée de champ électrique, celui-ci est donc uniformément nul. En présence d'un phénomène magnéto-hydrodynamique (on dira désormais « MHD »), on a :

– la pression : $p_0 + p_1(M, t)$

– la vitesse du fluide : $\overrightarrow{v}_1(M,t)$
– le champ électrique : $\overrightarrow{E}_1(M,t)$
– le champ magnétique : $\overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_1(M,t)$
– la densité de courant : $\overrightarrow{j}_1(M,t)$ (on se convaincra[40] qu'il n'y a aucun lien a priori entre $\overrightarrow{j}_1(M,t)$ et $\overrightarrow{v}_1(M,t)$)

où tous les paramètres avec l'indice « 1 » sont réputés assez petits pour qu'on puisse se contenter d'une linéarisation c'est-à-dire un développement limité à l'ordre 1.

L'équation d'Euler sans oublier les forces de Laplace et en négligeant l'effet de la pesanteur[41] s'écrit alors :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

La linéarisation consiste à négliger les termes d'ordre deux comme $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}_1$, d'où (avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, p_0$ nul) :

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1 + \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{B_0} \qquad \text{(équation 9)}$$

L'incompressibilité se traduit classiquement par

$$\text{div}\, \overrightarrow{v_1} = 0 \qquad \text{(équation 10)}$$

La loi d'Ohm s'écrit (voir chapitre traitant de sur l'induction électromagnétique) dans le cas d'un fluide en mouvement :

$$\overrightarrow{j} = \sigma\, (\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

soit aussi

$$\frac{\overrightarrow{j}}{\sigma} = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

lorsque la conductivité devient infinie, on a alors $\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ et à l'ordre un :

$$\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{0} \qquad \text{(équation 11)}$$

40. Les ions sont entraînés par le fluide à la vitesse $\overrightarrow{v_1}$, les électrons, plus mobiles ont une vitesse relative non négligeable notée $\overrightarrow{u}$ et ont donc une vitesse absolue $\overrightarrow{v}'_1 = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u}$. Il y a, par unité de volume, le même nombre n d'électrons libres et d'ions positifs d'où $\overrightarrow{j_1} = n\, e\, (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v'_1}) = -n\, e\, \overrightarrow{u}$ donc sans rapport avec $\overrightarrow{v_1}$

41. si l'on ne le fait pas le terme $\rho_0\, \overrightarrow{g}$ se simplifiera alors avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, p_0$ car p_0 n'est plus uniforme dans ce cas, cf. hydrostatique.

On prend l'hypothèse raisonnable que le milieu reste électriquement neutre [42] et que l'on est dans le cadre des régimes quasi-stationnaires [43]. Les équations de Maxwell deviennent (avec $\overrightarrow{B}_0$ uniforme et stationnaire) :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B_1} = 0 \qquad \text{(équation 12)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E_1} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \qquad \text{(équation 13)}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E_1} = 0 \qquad \text{(équation 14)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{B_1} = \mu_0\, \overrightarrow{j_1} \qquad \text{(équation 15)}$$

Une fois ce système linéarisé, on va lui chercher, bien évidemment des solutions sous forme d'ondes planes progressives sinusoïdales (voir le chapitre D-II dans le cours de physique ondulatoire). Il faut toutefois prendre conscience que la présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ préexistant à l'onde donne une direction privilégiée à l'espace. La vitesse de propagation dépend donc a priori de l'angle que fait la direction de propagation avec ce champ.

L'objectif étant ici illustratif, on se place dans le cas simple où l'onde se propage dans la direction du champ $\overrightarrow{B_0}$, choisie comme axe Oz. Pour une onde en $\exp j\,(\omega\, t - k\, z)$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ se traduit par une multiplication par $j\,\omega$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ par $-j\,k$ et donc l'opérateur $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$ par $-j\,k\,\overrightarrow{e_z}$

L'équation 10, l'équation 12 et l'équation 14 deviennent [44]

$$-\jmath\, k\, \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\text{de même} \qquad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{B_1} = 0$$

$$\text{de même} \qquad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{E_1} = 0$$

ce qui assure le caractère transversal de l'onde.

On se place dans le cas encore plus simple d'une onde polarisée rectilignement. Posons

$$\overrightarrow{E_1} = E_m\, \exp j\,(\omega\, t - k\, z)\, \overrightarrow{e_x}$$

42. Remarque : il existe certains types d'onde MHD longitudinales pour lesquels ce n'est pas vrai.

43. Notez que c'est la conductivité infinie qui rend l'hypothèse quasi-stationnaire crédible : on a alors

$$\left\| \varepsilon_0\, \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right\| \ll \|j\| = \sigma \|\overrightarrow{E}\|$$

validée ici par $\sigma = \infty$, l'adjonction du terme en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ ne changeant pas fondamentalement les choses.

44. Pour un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$, on a formellement $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ et de même pour un champ scalaire f on a $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = \nabla\, f$

L'équation 13 devient successivement :

$$-j\,k\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{E_1} = -j\,\omega\,\overrightarrow{B_1}$$

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{k}{\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y}$$

L'équation 15 devient successivement :

$$-j\,k\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{B_1} = \mu_0\,\overrightarrow{j_1}$$

$$\overrightarrow{j_1} = \frac{j\,k^2}{\mu_0\,\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x}$$

Pour l'équation 11, puisque $\overrightarrow{v_1}$ est transversal, notons $\overrightarrow{v_1} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y}$; on a alors :

$$E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x} = -(v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y}) \wedge (B_0\overrightarrow{e_z}) = B_0\,v_x\,\overrightarrow{e_y} - B_0\,v_y\,\overrightarrow{e_x}$$

On égale les projections : v_x est nul, on tire v_y et l'on en déduit

$$\overrightarrow{v_1} = -\frac{1}{B_0}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y}$$

Enfin l'équation 9 donne

$$j\,\omega\,\rho_0\,\overrightarrow{v_1} = j\,k\,p_1\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

$$-\frac{j\,\omega\,\rho_0}{B_0}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y} = j\,k\,p_1\,\overrightarrow{e_z} + \frac{j\,k^2}{\mu_0\,\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x} \wedge (B_0\overrightarrow{e_z})$$

La projection sur $\overrightarrow{e_z}$ nous apprend que p_1 est nul : une onde M.H.D. ne génère pas d'onde de pression. La projection sur $\overrightarrow{e_y}$ donne

$$-\frac{j\,\omega\,\rho_0}{B_0}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z) = -\frac{j\,k^2\,B_0}{\mu_0\,\omega}\,E_m\,\exp j\,(\omega\,t - k\,z)$$

et après simplifications :

$$\frac{\omega\,\rho_0}{B_0} = \frac{k^2\,B_0}{\mu_0\,\omega} \qquad \text{soit} \qquad k^2 = \frac{\mu_0\,\rho_0}{B_0^2}\,\omega^2$$

On en déduit une vitesse de phase ;

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\,\rho_0}}$$

On remarquera surtout dans ce résultat qu'il n'a rien à voir ni avec la vitesse de la lumière, ni avec la vitesse du son. Il s'agit d'un type d'onde tout à fait original.

Application numérique : pour le mercure ($\rho_0 = 7,6\,10^3$ kg.m^{-3}) avec $B_0 = 1$ T et bien sûr $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ S.I., le calcul donne

$$V_\varphi = 10,2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

On remarque que la vitesse de ce type d'onde est très faible par rapport à celle du son et a fortiori celle de la lumière.

8 Ecoulement d'un fluide visqueux.

8.a Fluides newtoniens.

Rappelons (voir B-XIII) qu'un fluide est dit *newtonien* si les forces tangentielles à la surface d'une quasi-particule et le gradient normal de vitesse tangentielle sont proportionnels au contraire d'un solide élastique où les forces tangentielles à la surface d'une quasi-particule et le gradient normal de déformation tangentielle sont proportionnels (voir le chapitre B-X sur l'élasticité et la viscosité).

On a vu dans le chapitre B-XIII que dans un champ de vitesse $\overrightarrow{v}(z) = v(z)\,\overrightarrow{e_x}$, une surface élémentaire dans un plan parallèle à xOy séparant un système au-dessous d'un extérieur au-dessus, de vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_z}$ est soumis à la force de viscosité élémentaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}S$$

et que l'équivalent volumique de ce type de force est dans ce contexte et plus généralement dans tout contexte incompressible (c'est-à-dire toujours car seuls les liquides ont une viscosité significative) est $\eta\,\Delta\overrightarrow{v}$, dont l'ajout transforme l'équation d'Euler en équation de Navier-Stokes :

$$\mu\,\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \eta\,\Delta\overrightarrow{v}$$

8.b Exemples de fluides non-newtoniens.

Il existe beaucoup de comportements moins simples. Ce peut-être, entre autres :

- un fluide rhéo-fluidifiant tel que la force tangentielle soit fonction impaire croissante du gradient de vitesse mais non linéaire à concavité vers le bas pour des gradients positifs [45] ; la moutarde en est un exemple. Le comportement inverse (rhéo-épaississant avec la concavité dans l'autre sens) existe plus rarement.
- un fluide à seuil : si la force tangentielle surfacique est en deçà d'un certain seuil, on a un comportement élastique, au-delà un comportement visqueux [46] ; le dentifrice (dans son tube) en est un exemple.

45. En termes moins savants, un corps très visqueux à basse vitesse et peu visqueux à grande vitesse.
46. En termes moins savants, un corps qui ne se meut que si l'on pousse assez fort.

– un corps visco-élastique : la force surfacique tangentielle est une combinaison linéaire des déformations et des vitesses de déformations [47] ; le caoutchouc en est un exemple.
– un corps thixotrope qui se comporte sous l'action d'une force tangentielle constante comme un fluide visqueux dont la viscosité diminue avec le temps et qui revient lentement à l'état initial quand la force disparaît [48] ; les peintures actuelles en sont un exemple et c'est bien agréable quand on en renverse le pot.

Dans ce chapitre, nous n'étudierons pas ces fluides.

8.c Considérations préalables.

La viscosité apparaît au dénominateur du nombre de Reynolds (voir chapitre précédent) donc un corps assez visqueux a, en général, un faible nombre de Reynolds et son écoulement est laminaire.

Les forces de viscosité ne sont notables que là où le gradient de vitesse est important, donc dans la couche limite ; comme celle-ci a une faible épaisseur, les exemples qui vont suivre portent forcément sur des écoulements de faible épaisseur.

On étudiera d'abord des exemples où la forme de cette couche limite est imposée par la situation expérimentale puis un exemple où sa forme est établie au moins qualitativement.

8.d Ecoulement de Couette unidirectionnel.

Considérons deux plans horizontaux de cotes $z = 0$ et $z = h$, celui du bas immobile et celui du haut en translation uniforme de vitesse $V\,\overrightarrow{e}_y$, séparés par un fluide visqueux. On cherche comme mouvement du fluide une solution laminaire stationnaire de sorte que $\overrightarrow{v}(M,t) = v(z)\,\overrightarrow{e}_y$(voir figure 25 p. 79).

On se convaincra aisément que les lignes de champ, confondues en régime permanent avec les trajectoires, sont parallèles à Oy donc qu'une quasi-particule a un mouvement rectiligne uniforme car $z = Cte$ sur la trajectoire et car v ne dépend que de z ; l'accélération particulaire est donc nulle. Projetons l'équation de Navier-Stokes sur Oy :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\,\Delta v(z)$$

Le problème est invariant par translation et la pression ne dépend donc pas de y et avec une vitesse $v(z)$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

47. Une conséquence en est la dissipation d'énergie et donc l'amortissement des vibrations.
48. En termes moins savants, un corps qui se liquéfie quand on le touille et qui se gélifie quand on cesse de touiller ; c'est sans doute plus clair ainsi !

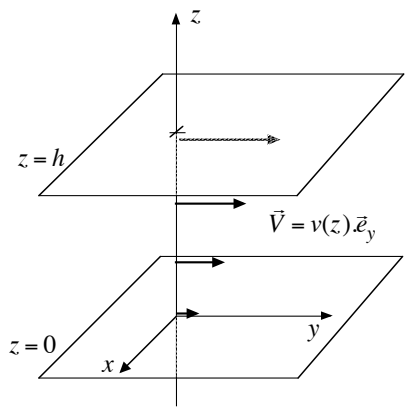

FIGURE 25 – Ecoulement de Couette.

Les conditions aux limites (vitesses relatives nulles sur les parois pour un fluide visqueux, voir chapitre précédent) sont $v(0) = 0$ et $v(h) = V$ d'où :

$$v(z) = V\,\frac{z}{h}$$

La force qu'exerce à l'altitude z le fluide sur une surface de vecteur $\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_z}$ et en particulier sur le plan inférieur à l'altitude $z = 0$ est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_y}$$

soit une force surfacique selon Oy de valeur

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{\eta\,V}{h}$$

En fait, dans l'expérience de COUETTE, le fluide est entre deux cylindres coaxiaux de longueur L parallèlement à l'axe avec un faible interstice h entre eux, le rayon du cylindre intérieur est noté R et le rayon intérieur du cylindre creux extérieur est $R + h \approx R$. Un élément de fluide de longueur L parallèle à l'axe et de largeur élémentaire $R\,\mathrm{d}\theta$ dans la direction orthoradiale est quasiment rectiligne est donc soumise (cf supra) à une force orthoradiale de module :

$$\mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}\,L\,R\,\mathrm{d}\theta = \frac{\eta\,V}{h}\,L\,R\,\mathrm{d}\theta$$

et de moment par rapport à l'axe :

$$\mathrm{d}\mathcal{M} = R\,\mathrm{d}F = \frac{\eta\,V}{h}\,L\,R^2\,\mathrm{d}\theta$$

et par intégration sur θ, à un moment total :

$$\mathcal{M} = 2\,\pi\,\frac{\eta\,V}{h}\,L\,R^2$$

Le cylindre extérieur est en fait mobile mais ramené, en l'absence de mouvement du cylindre intérieur, vers une position d'équilibre de référence par un dispositif de rappel. Lors du mouvement du cylindre intérieur, la nouvelle position d'équilibre permet la mesure du moment donc celle de la viscosité ; on a ainsi conçu un *viscosimètre* de COUETTE[49]. On n'oubliera pas de voir aussi dans ce calcul, une étude élémentaire de la lubrification d'une pièce tournante dans son logement.

8.e Ecoulement de Poiseuille.

On étudie l'écoulement permanent d'un fluide incompressible et visqueux dans une canalisation cylindrique horizontale de rayon R et de grande longueur L. On néglige l'effet de la pesanteur. L'écoulement est laminaire et le champ de vitesses est partout parallèle à l'axe Oz. La symétrie de révolution permet d'affirmer que la vitesse et la pression sont de la forme $v(r,z)\,\overrightarrow{e_z}$ et $p = p(r,z)$ où r est la distance à l'axe (voir figure 26 p. 80).

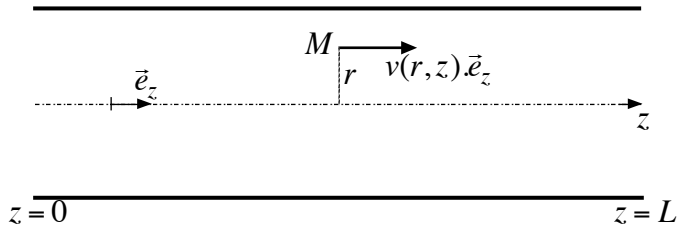

FIGURE 26 – Ecoulement de Poiseuille.

La forme du champ de vitesses entraîne que les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe et que les tubes de courant des cylindres de génératrices parallèles à l'axe. Le régime permanent a pour conséquence que le débit massique est uniforme à travers un tube de courant de section infiniment petite. Le produit $\mu\, S\, v$ est donc constant et puisque le fluide est incompressible (μ est constant) et le tube cylindrique (S est constant), on en déduit que la vitesse est constante dans ce tube, donc indépendante de la coordonnée z.

On note donc désormais la vitesse $v(r)\,\overrightarrow{e_z}$. Effectuons un bilan des forces de viscosité sur une portion de fluide entre deux cylindres de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ et sur une longueur $\mathrm{d}z$ en admettant, par analogie avec la formule du contexte cartésien, que sur une surface d'aire $\mathrm{d}S$ et de normale radiale le fluide extérieur exerce sur le fluide intérieur une force : $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \eta\,\mathrm{d}S\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z}$. Sur le cylindre extérieur de rayon $r' = r + \mathrm{d}r$ le bilan est

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_1} = \iint \eta\,\mathrm{d}S\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z} = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z}\iint \mathrm{d}S = 2\,\pi\,r'\,\mathrm{d}z\,\eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z} = 2\,\pi\,r'\,\mathrm{d}z\,\eta\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r'}\,\overrightarrow{e_z}$$

où $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ est calculé en r'. De même sur le cylindre intérieur de rayon r, en changeant de

49. Maurice Couette, physicien français, 1858–1943, travaux sur la mécanique des fluides.

signe car le système et son extérieur ont inversé leurs positions respectives

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_2} = -2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z\,\eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z} = -2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z\,\eta\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_r\,\overrightarrow{e_z}$$

où $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ est calculé en r. Le bilan est, avec un développement de Taylor

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = 2\,\pi\,\mathrm{d}z\,\eta\,\overrightarrow{e_z}\,\left(r'\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r'} - r\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_r\right) = \cdots$$

$$\cdots = 2\,\pi\,\mathrm{d}z\,\eta\,\overrightarrow{e_z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\,(r'-r) = 2\,\pi\,\mathrm{d}z\,\eta\,\overrightarrow{e_z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\,\mathrm{d}r$$

En divisant par le volume $\mathrm{d}V$ ce cylindre de hauteur $\mathrm{d}z$ et d'aire

$$\mathrm{d}S = \pi\,(r'^2 - r^2) = \pi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2)\,\mathrm{d}r = 2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r$$

d'où un volume élémentaire $\mathrm{d}V = 2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ et une force volumique

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}}{\mathrm{d}V} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\,\overrightarrow{e_z}$$

L'équation d'Euler s'écrit alors, puisque la pesanteur est négligée

$$\mu\,\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\,\overrightarrow{e_z}$$

Or on a vu plus haut que les trajectoires sont rectilignes, parallèles à Oz et parcourues à vitesse constante, donc l'accélération particulaire est nulle et

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\,\overrightarrow{e_z}$$

En projection radiale, on en déduit $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, donc p ne dépend pas de r et ne dépend que de z et, en projection axiale, on a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

On rappelle que

$$[\forall z\ \forall r\ f(z) = g(r)] \Rightarrow [f(z) = g(r) = Cte]$$

Il suffit en effet de choisir un r particulier, disons r_0, pour affirmer $\forall z f(z) = g(r_0)$ où $g(r_0)$ est bien une constante. Donc

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = Cte$$

On note $p_A = p(0)$ et $p_B = p(L) < p(0)$. Au vu de ce qui précède p est une fonction du premier degré de z, d'où

$$p(z) = p_A + \frac{p_B - p_A}{L}\, z$$

et $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{p_B - p_A}{L}$ donc

$$\eta\, \frac{1}{r}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{p_B - p_A}{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{(p_B - p_A)\, r}{\eta\, L}$$

$$r\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{(p_B - p_A)\, r^2}{2\, \eta\, L} + A$$

où A est une constante d'intégration

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{(p_B - p_A)\, r}{2\, \eta\, L} + \frac{A}{r}$$

$$v = \frac{(p_B - p_A)\, r^2}{4\, \eta\, L} + A\, \ln(r) + B$$

où B est une seconde constante d'intégration. La vitesse est finie en $r = 0$ donc A est nul (ce raisonnement est récurrent en physique). Puisqu'un fluide visqueux a une vitesse nulle au contact d'une paroi solide, on a $v(R) = 0$, d'où l'on tire B que l'on reporte dans v(r), soit en escamotant le signe négatif par permutation de A et B

$$v(r) = \frac{p_A - p_B}{4\, \eta\, L}\, (R^2 - r^2)$$

On parle de *profil parabolique des vitesses.*

Déduisons-en l'expression du débit volumique D_v et la relation de Poiseuille[50] liant la chute de pression $p_A - p_B$ et le débit D_v. On ne peut pas calculer D_v par une formule du style $D_v = \mu\, S\, v$ car la vitesse n'est pas uniforme. Découpons un section de la canalisation en couronnes entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$, de surface $\mathrm{d}S = 2\, \pi\, r\, \mathrm{d}r$ (cf supra) et intégrons les débits élémentaires

$$D_v = \int_0^R \mu\, v(r)\, \mathrm{d}S = \frac{2\, \pi\, \mu\, (p_A - p_B)}{4\, \eta\, L} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, \mathrm{d}r = \frac{2\, \pi\, \mu\, (p_A - p_B)}{4\, \eta\, L} \left[\frac{R^2\, r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$D_v = \frac{2\, \pi\, \mu\, (p_A - p_B)}{4\, \eta\, L}\, \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\, \mu\, (p_A - p_B)\, R^4}{8\, \eta\, L}$$

50. Jean-Louis Poiseuille, médecin français, ancien élève de Polytechnique, 1797-1869. Voulant comprendre la circulation sanguine, il la modélisa par un écoulement visqueux dans une tubulure cylindrique, ce qu'il étudia avec un protocole expérimental d'une grande rigueur par l'étude séparée des influences de la longueur, de la section des tubulures et de la nature du fluide, faisant ainsi un travail d'authentique physicien.

soit en introduisant l'aire $S = \pi R^2$

$$D_v = \frac{\mu\,(p_A - p_B)\,S^2}{8\,\pi\,\eta\,L}$$

Par analogie entre débit de masse D_v et débit de charges I, différence de pression $p_A - p_B$ et de potentiel $V_A - V_B$, la loi d'Ohm $I = \frac{V_A - V_B}{R}$ permet de définir une résistance hydraulique

$$R_H = \frac{8\,\pi\,\eta\,L}{\mu\,S^2}$$

Si l'on essaie de pousser plus loin avec $R = \rho\,L/S$ où ρ est la résistivité, on voit que l'analogie a ses limites : les résistances électrique et hydraulique sont bien toutes deux proportionnelles à L, mais la première est inversement proportionnelle à S, la seconde à S^2.

Par exemple passer d'une canalisation de diamètre intérieur 12 mm à une de diamètre [51] 10 mm (ce qui semble peu différent) multiplie la résistance d'un facteur $1,2^4 \approx 2$; à différence de pression égale, le débit a chuté de 50 % ! Il faut toujours demander conseil à un professionnel avant d'acheter des tuyaux de cuivre pour installer soi-même une salle de bain sous peine d'avoir une baignoire qui met une heure à se remplir. Plombier, c'est un métier !

Ne perdons pas de vue que ce qui est exposé ci-dessus suppose le régime laminaire, donc le nombre de Reynolds suffisamment faible, condition facile à réaliser pour un fluide visqueux dont la viscosité apparaît au dénominateur de ce nombre. Pour un fluide moins visqueux, on trouve le plus souvent un écoulement turbulent dont l'étude relève plus de l'expérience que de la théorie mais on peut déjà dire que le brassage que produisent les tourbillons uniformise la composante axiale de la vitesse qui varie alors peu avec la distance à l'axe, lui donne des composantes non axiales plus complexes à étudier et provoque une dissipation d'énergie qui pénalise le débit.

8.f Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné.

Au premier abord, cet exemple peut sembler faire double emploi avec celui de l'écoulement de Couette mais en fait il introduit un détail important sur la condition aux limites sur une surface libre (c'est-à-dire en contact avec l'air ambiant).

Un fluide incompressible de masse volumique μ, de viscosité η s'écoule dans un canal de largeur constante L, faisant avec l'horizontale un angle α avec une profondeur $h(x,t)$ (x est l'abscisse selon la pente) variant suffisamment lentement pour que le champ de vitesse soit quasiment parallèle à la pente et lentement variable avec x ; le régime est quasi-permanent mais pas permanent de sorte que v varie lentement avec t (cf figure 27 p. 84).

51. On a pris ici des valeurs standards en plomberie, respectivements de tubes « 12-14 » et « 10-12 » (on donne les diamètres intérieurs et extérieurs dans la dénomination commerciale).

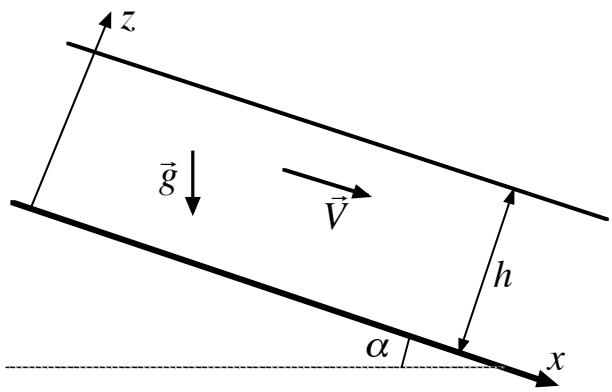

FIGURE 27 – Ecoulement visqueux sur un plan incliné.

On note le champ de vitesses $\overrightarrow{v} = v(x,z,t)\,\overrightarrow{e_x}$ et le champ de pression $p(x,z,t)$.

L'équation de Navier-Stokes est, en régime quasi-permanent ($\frac{\partial v}{\partial t}$ négligé) :

$$\mu\,(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v} = \mu\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p + \eta\,\Delta\overrightarrow{v}$$

soit en projection sur Ox et Oz avec ici $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta(v\,\overrightarrow{e_x}) = (\Delta v)\,\overrightarrow{e_x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,\overrightarrow{e_x}$ et de la même façon $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}} = v\,\frac{\partial}{\partial x}$ et donc $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v} = v\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} \approx \overrightarrow{0}$ car v varie lentement avec x :

$$0 = \mu\,g\,\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad \text{sur } Ox$$

$$0 = -\mu\,g\,\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z} \qquad \text{sur } Oz$$

L'intégration de la seconde relation donne (la constante d'intégration est constante vis-à-vis de z, ce peut être a priori une fonction de x et t notée $f(x,t)$) :

$$p(x,z,t) = f(x,t) - \mu\,g\,z\,\cos\alpha$$

Or en $z = h(x,t)$ et pour tout x, la pression est la pression atmosphérique, que nous noterons p_0, donc

$$p(x,z,t) = p_0 + \mu\,g\,(h(x,t) - z)\,\cos\alpha$$

On en déduit $\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\,g\,\frac{\partial h}{\partial x}\,\cos\alpha \approx 0$ (car h varie lentement avec x) que l'on reporte dans la première projection de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{\mu\,g\,\sin\alpha}{\eta}$$

Une première intégration donne :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = Cte - \frac{\mu\, g\, z\, \sin\alpha}{\eta}$$

Ici se situe le raisonnement le plus subtil de ce paragraphe : au niveau d'une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ parallèle au plan Oxy, la force exercée par le fluide au dessus sur le fluide au-dessous a pour module $\eta\,\mathrm{d}S\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$, en particulier en $z = h$, il s'agit de l'interaction entre le liquide visqueux et l'air qui, lui, a une viscosité négligeable ; cette force donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ doit s'y annuler, ce qui permet le calcul de la constante d'intégration :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu\, g\,(h(x,t) - z)\, \sin\alpha}{\eta}$$

Une seconde intégration, en tenant compte du fait que la vitesse du fluide visqueux doit s'annuler sur le support solide, en $z = 0$ donne

$$v(x,z,t) = \frac{\mu\, g\, \left(h(x,t)\, z - \frac{z^2}{2}\right)\, \sin\alpha}{\eta}$$

Calculons le débit volumique à une abscisse x et à l'instant t : à travers une surface de largeur L et de hauteur $h(x)$ à l'abscisse x, on calcule le débit par intégration (la vitesse n'est pas uniforme) du débit élémentaire sur une largeur L entre les cotes z et $z + \mathrm{d}z$:

$$D_v(x,t) = \int_0^{h(x,t)} v(x,z,t)\, L\, \mathrm{d}z = \frac{\mu\, g\, L\, \sin\alpha}{\eta} \int_0^{h(x,t)} \left(h(x,t)\, z - \frac{z^2}{2}\right)\, \mathrm{d}z = \frac{\mu\, g\, L\, h(x,t)^3\, \sin\alpha}{3\,\eta}$$

Effectuons un bilan volumique (le volume se conserve pour un fluide incompressible) entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Il entre à l'abscisse x un volume $D_v(x,t)\,\mathrm{d}t$ et il sort à l'abscisse $x + \mathrm{d}x$ un volume $D_v(x + \mathrm{d}x, t)\,\mathrm{d}t$; le bilan, après un développement de Taylor, est $-\frac{\partial D_v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Le volume entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ est, à l'instant t, $V(t) = L\, h(x,t)\,\mathrm{d}x$ et, à l'instant $t + \mathrm{d}t$, $V(t + \mathrm{d}t) = L\, h(x, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x$ soit une variation, après un développement de Taylor, $L\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. L'identification des deux points de vue donne successivement, après simplification puis report de l'expression de D_v et une ultime simplification :

$$-\frac{\partial D_v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = L\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial D_v}{\partial x} + L\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu\, g\, L\, h^3\, \sin\alpha}{3\,\eta}\right) + L\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\mu\, g\, \sin\alpha}{3\,\eta}\right)\,\frac{\partial (h^3)}{\partial x} + L\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

dont la résolution relève de l'analyse numérique.

Un cas particulier intéressant est celui du régime permanent qui nécessite au début et à la fin de l'écoulement des conditions stationnaires (départ et arrivée dans des réservoirs de volumes immenses par rapport à celui contenue dans le canal). Alors $\frac{\partial h}{\partial t}$ est nul donc $\frac{\partial (h^3)}{\partial x}$ aussi et h^3 donc aussi h sont contants. L'écoulement permanent impose donc une hauteur constante (conclusion souvent présentée comme hypothèse dans la littérature).

Comme dans le paragraphe précédent, le régime a été supposé laminaire (faible nombre de Reynolds dû à une viscosité importante).

8.g Formule de Stokes.

On reprend ici (voir au paragraphe 5.a p. 26) l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible autour d'une sphère immobile de centre O et de rayon R tel que la vitesse loin en amont de la sphère soit uniforme (et noté $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$) mais cette fois avec un fluide newtonien de viscosité η et aux très petites vitesses (calcul à l'ordre 1).

• La démarche.

On part de l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v}\right) = \mu\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p + \eta\,\Delta\overrightarrow{v}$$

On se place en régime permanent ($\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$) et à la limite des vitesses tendant vers $\overrightarrow{0}$ (donc $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v}$ du second ordre est négligé) ; on tient compte que $\overrightarrow{g}$ dérive du potentiel $-g\,z$ et que μ est constant ; enfin, on utilise l'analyse vectorielle en utilisant une égalité classique formulée différemment $\Delta v = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\ \overrightarrow{v}\right) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}\right)$ en tenant compte de l'incompressibilité ($\text{div}\ \overrightarrow{v} = 0$) et l'on arrive à :

$$\overrightarrow{0} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(\mu\,g\,z) - \overrightarrow{\text{grad}}\,p - \eta\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}\right)$$

Pour se ramener à une équation en $\overrightarrow{v}$ seulement, on escamote les gradients en prenant le rotationnel membre à membre (le rotationnel d'un gradient est nul), d'où après simplification par η :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v}\right)\right] = \overrightarrow{0}$$

• Recherche d'une solution raisonnable.

Comme pour le même type d'écoulement avec un fluide parfait (voir le paragraphe 5.b p. 29) et pour les mêmes raisons, on va chercher une solution $2\,\pi$-périodique en θ. Pour la

vitesse en un point M, la symétrie par rapport au plan qui contient l'axe Ox et le point M entraîne qu'elle est dans ce plan et dans ce plan, la symétrie par rapport à l'axe entraîne que sa composante radiale (sens positif centrifuge) est paire en θ et sa composante orthoradiale (sens positif directement orthogonal au sens positif radial) est impaire. On cherche donc un champ de vitesse de la forme :

$$\overrightarrow{v}(r,\theta) = v_r(r,\theta)\,\overrightarrow{e_r} + v_\theta(r,\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} + 0\,\overrightarrow{e_\varphi} = f(r)\,\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + g(r)\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Le fluide est incompressible donc le champ de vitesses a une divergence nulle, d'où, en utilisant la formule de la divergence en coordonnées sphériques (voir chapitre sur l'analyse vectorielle) et en ne détaillant pas les calculs de routine :

$$0 = \operatorname{div}\overrightarrow{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,v_r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,v_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} = \cdots$$
$$\cdots = \left[f'(r) + \frac{2}{r}\,f(r)\right]\,\cos\theta + \frac{2}{r}\,g(r)\,\cos\theta$$

d'où l'on déduit que :

$$g(r) = -\left[\frac{r}{2}\,f'(r) + f(r)\right]$$

En reportant cette expression de $g(r)$ et en utilisant en cascade la formule suivante qui donne en coordonnées sphériques les composantes du rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)\,\overrightarrow{e_r} + \cdots$$
$$\cdots\left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\varphi)\right)\,\overrightarrow{e_\theta} + \cdots$$
$$\cdots\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

on trouve successivement (on ne détaille pas les calculs de routine), en notant $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$ les dérivées troisième et quatrième de f :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{v} = -\left[\frac{r}{2}f''(r) + 2\,f'(r)\right]\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = -\left[f''(r) + \frac{4}{r}\,f'(r)\right]\,\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{r}{2}\,f^{(3)}(r) + 3\,f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r)\right]\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{v}\right)\right] = \left[\frac{r}{2}\,f^{(4)}(r) + 4\,f^{(3)}(r) + \frac{4}{r}\,f''(r) - \frac{4}{r^2}\,f'(r)\right]\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Or, rappelons-le, on cherche un champ tel que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{v}\right)\right]$ soit nul, ce qui revient à résoudre cette équation différentielle d'ordre trois en $F(r) = f'(r)$:

$$r^3\,F^{(3)}(r) + 8\,r^2\,F''(r) + 8\,r\,F'(r) - 8\,F(r) = 0$$

dont l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimensions trois ; cherchons-en trois solutions particulières et puisque les termes sont homogènes *au sens mathématique du terme*, cherchons-les en r^p ; on doit donc, après simplification par r^p, résoudre cette équation polynomiale en p :

$$0 = p\,(p-1)\,(p-2) + 8\,p\,(p-1) + 8\,p - 8 = p^3 + 5\,p^2 + 2\,p - 8$$

Comme la somme des coefficients est nulle, $p = 1$ est une solution évidente [52] qui permet de factoriser $(p-1)$ et de finir la résolution en trouvant les racines du facteur du second degré qui apparaît :

$$0 = p^3 + 5\,p^2 + 2\,p - 8 = (p-1)\,(p^2 + 6\,p + 8) = (p-1)\,(p+2)\,(p+4)$$

$F(r) = f'(r)$ est donc une combinaison linéaire de r, r^{-2} et r^{-4} donc par intégration (dans la logique de l'espace vectoriel, on peut escamoter les constantes multiplicatives) $f(r)$ est une combinaison linéaire de r^2, r^{-1}, r^{-3} et aussi r^0 (pour la constante d'intégration). On notera astucieusement ainsi (R est le rayon de la sphère) :

$$f(r) = A\,\frac{r^2}{R^2} + B\,\frac{R}{r} + C\,\frac{R^3}{r^3} + D$$

on en déduit successivement :

$$f'(r) = 2\,A\,\frac{r}{R^2} - B\,\frac{R}{r^2} - 3C\,\frac{R^3}{r^4}$$

$$g(r) = -\left[\frac{r}{2}\,f'(r) + f(r)\right] = -\left[2\,A\,\frac{r^2}{R^2} + \frac{B}{2}\,\frac{R}{r} - \frac{C}{2}\,\frac{R^3}{r^3} + D\right]$$

$$v_r = f(r)\,\cos\theta = \left[A\,\frac{r^2}{R^2} + B\,\frac{R}{r} + C\,\frac{R^3}{r^3} + D\right]\,\cos\theta$$

$$v_\theta = g(r)\,\sin\theta = -\left[2\,A\,\frac{r^2}{R^2} + \frac{B}{2}\,\frac{R}{r} - \frac{C}{2}\,\frac{R^3}{r^3} + D\right]\,\sin\theta$$

Ça va ? Tout le monde est encore là ?

• Exploitation des conditions aux limites.

A l'infini, côté $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ (condition qui ne joue en fait aucun rôle car les facteurs en θ se simplifient), $\overrightarrow{v}$ tend vers $v_0\,\overrightarrow{e_x} = v_0\,(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta})$ (comme plus haut), ce qui impose que A soit nul (sinon la vitesse divergerait) et que D s'identifie à v_0.

52. Ouf, il y en a une !

A la surface de la sphère (r=R), la vitesse doit s'annuler (et pas seulement devenir tangente car le fluide est visqueux, cf chapitre B-XIII), d'où, en reportant les résultats précédents :

$$\begin{cases} B + C + v_0 = 0 \\ \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + v_0 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément $B = -\frac{3\,v_0}{2}$ et $C = \frac{v_0}{2}$ et :

$$\begin{cases} v_r = f(r)\,\cos\theta = v_0\,\left[1 - \frac{3}{2}\,\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{R^3}{r^3}\right]\,\cos\theta \\ v_\theta = g(r)\,\sin\theta = -v_0\,\left[1 - \frac{3}{4}\,\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\,\frac{R^3}{r^3}\right]\,\sin\theta \end{cases}$$

• **Calcul de la pression.**

Nous avons vu un peu plus haut que (je reformule à peine) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(p + \mu\,g\,Z) = -\eta\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right)$$

en notant OZ un axe vertical ascendant d'origine O centre du cercle, ce qui permet de ne rien imposer à la dircetion Ox de la vitesse à l'infini.

On reporte $f(r) = v_0\,\left[1 - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{R}{r} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{R^3}{r^3}\right]$ dans :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = -\left[f''(r) + \frac{4}{r}\,f'(r)\right]\,\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{r}{2}\,f^{(3)}(r) + 3\,f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r)\right]\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

et après quelques calculs qu'on épargne au lecteur on arrive à :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\,(p + \mu\,g\,Z) = \eta\,v_0\,\left[3\,\frac{R}{r^3}\right]\,\cos\theta \\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(p + \mu\,g\,Z) = \eta\,v_0\,\left[\frac{3}{2}\,\frac{R}{r^2}\right]\,\sin\theta \end{cases}$$

qui correspond à :

$$p = -\mu\,g\,Z - \eta\,v_0\,\left[\frac{3}{2}\,\frac{R}{r^2}\right]\,\cos\theta + Cte$$

A l'infini la vitesse est uniforme donc la pression hydrostatique, on la note $p_0 - \mu\,g\,Z$ et la constante d'intégration est p_0 ; on notera désormais $p = p_0 - \mu\,g\,Z + \varpi(r,\theta)$ avec $\varpi(r,\theta) = -\eta\,v_0\,\left[\frac{3}{2}\,\frac{R}{r^2}\right]\,\cos\theta$.

On remarquera qu'à la surface de la sphère ($r = R$), on a $\varpi(R,\theta) = -\frac{3\,\eta\,v_0}{2\,R}\,\cos\theta$

• **Résultante des forces de pression.**

On veut calculer la résultante des forces de pression sur la surface de la sphère. On veut donc calculer $\overrightarrow{F} = -\oiint p\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ où $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_r}$, le domaine d'intégration étant cette surface.

L'intégrale des termes hydrostatiques $p_0 - \mu\,g\,Z$ n'a pas à être faite car le résultat est la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$ soit $\overrightarrow{\Pi} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\mu_0\,g\,\overrightarrow{e_Z}$; l'intégrale du terme ϖ, du fait de la symétrie de révolution autour de Ox, est portée par cet axe et l'on a donc en projection (avec $\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_x} = \cos\theta$), abstraction faite de la projection de la poussée d'Archimède :

$$F_x = -\oiint \varpi\,R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\cos\theta = \frac{3\,\eta\,v_0\,R}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \cdots$$
$$\cdots = \frac{3\,\eta\,v_0\,R}{2}\,(2\,\pi)\left[-\frac{\cos^3}{3}\right]_0^{\pi} = -2\,\pi\,\eta\,R\,v_0$$

ce qui n'est pas le résultat connu $(-6\,\pi\,\eta\,R\,v_0)$; bien sûr, nous n'avons pas encore comptabilisé les forces de viscosité en surface.

• **Résultante des forces de viscosité en surface. Formule de Stokes.**

On connaît, dans le contexte d'une vitesse $\overrightarrow{v} = v(z)\,\overrightarrow{e_x}$, la formule donnant la force exercée sur une surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_z}$; c'est (voir dans le chapitre précédent) $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_x}$. Comment adapter le résultat à notre contexte et de surcroît en coordonnées sphériques ? C'est impossible sans une théorie tensorielle complète qui alourdirait encore ce très long chapitre ; nous admettrons [53] donc ici que la force de viscosité élémentaire sur une surface radiale $\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_r}$ est, compte tenu de la symétrie de révolution :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \eta\left[r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Avec (cf supra) :

$$\begin{cases} v_r = v_0\left[1 - \frac{3}{2}\,\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{R^3}{r^3}\right]\cos\theta \\ v_\theta = -v_0\left[1 - \frac{3}{4}\,\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\,\frac{R^3}{r^3}\right]\sin\theta \end{cases}$$

on tire $\left[\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right] = -\frac{3}{2}\,v_0\,\frac{R^3}{r^4}\,\sin\theta$ en tout point et $-\frac{3\,v_0}{2\,R}\,\sin\theta$ à la surface

53. Une remarque dans le chapitre B-X sur l'élasticité (p. 21 s'il n'a pas subi de modification depuis la rédaction de cette note) donne par analogie une formulation générale des forces de viscosité mais elle est donnée en coordonnées cartésiennes. La transcrire en coordonnées sphériques est fort possible ; je vois clairement comment le faire mais il est sans intérêt pour le physicien de savoir mener ces calculs. Comme ils sont longs, je ne les fais pas figurer dans ce chapitre qui comporte déjà près de cent pages.

et par projection sur Ox avec $\overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{e_x} = -\sin\theta$, apparaît une nouvelle force :

$$F_x = \oiint \eta \left[-\frac{3\,v_0}{2\,R}\,\sin\theta \right] R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,(-\sin\theta) = \frac{3\,\eta\,v_0\,R}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \cdots$$

$$\cdots = \frac{3\,\eta\,v_0\,R}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}(-\cos\theta) \cdots =$$

$$\cdots = \frac{3\,\eta\,v_0\,R}{2}\,(2\,\pi) \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3}{3} \right]_0^{\pi} = -4\,\pi\,\eta\,R\,v_0$$

pour un bilan total de la pression et de la viscosité égal à la poussée d'Archimède et une traînée $-6\,\pi\,\eta\,R\,\overrightarrow{v_0}$. On reconnaît dans cette dernière relation la formule de Stokes.

Sa démonstration donne un comportement asymptotique aux basses vitesses et dans un fluide incompressible occupant (hypothèse tacite) un volume infini. Dans un volume fini (un récipient empli de liquide), ce sera une bonne approximation si les distances de la sphère aux bords, à la surface et au fond de ce récipient sont grandes devant son rayon. Il ne faut donc prendre la formule pour argent comptant ; il y a pas mal de conditions de validité dont la littérature parle trop peu souvent.

9 Indications sur la couche limite.

Là aussi, l'étude est surtout expérimentale. On ne donne ici que deux modestes aspects de la chose, une estimation de sa taille et une modélisation de sa croissance dont on déduira une autre approche du calcul d'une traînée.

9.a Estimation de l'épaisseur de la couche limite. Couche limite turbulente.

• Epaisseur estimée.

On considère un écoulement de fluide visqueux de vitesse caractéristique V autour d'un objet de taille caractéristique L. Considérons les deux termes suivants de l'équation de Navier-Stokes : $\mu\,(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v}$ et $\eta\,\Delta\overrightarrow{v}$.

Dans la couche limite d'épaisseur notée δ, c'est la viscosité qui prédomine, donc le second terme ; son ordre de grandeur est $\eta\,\frac{V}{\delta^2}$ car c'est sur l'épaisseur δ que la vitesse décroît pour s'annuler à la surface. Hors de la couche limite, c'est convection du fluide (qui contourne l'obstacle de taille L avec des variations de vitesses d'une fraction importante de V), donc le premier terme ; son ordre de grandeur est $\mu\,V\,\frac{V}{L} = \mu\,\frac{V^2}{L}$.

Au niveau de la couche limite, aucun des deux termes n'est prépondérant et ils ont donc le même ordre de grandeur, d'où successivement et en reconnaissant en $\mathcal{R} = \frac{\mu\,V\,L}{\eta}$ le

nombre de Reynolds :

$$\eta \frac{V}{\delta^2} \sim \mu \frac{V^2}{L}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta\, L}{\mu\, V}}$$

$$\frac{\delta}{L} =\sim \sqrt{\frac{\eta}{\mu\, V\, L}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}}}$$

Application numérique : pour un avion de ligne volant à environ 200 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ dont l'épaisseur L est de l'ordre du demi-mètre, le nombre de Reynolds (avec pour l'air $\nu = \frac{\eta}{\mu} \approx 1,5\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$) est environ $7\,10^6$ ce qui conduit à une épaisseur de couche limite de l'ordre de quelques dizièmes de millimètres, ... n'était ce qui suit.

• Couche limite turbulente.

Dans la couche limite, l'écoulement est différent de celui où l'on peut considérer le fluide comme parfait. Comme la vitesse y varie de façon significative sur l'épaisseur δ, on y définit un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_l = \frac{\mu\, v\, \delta}{\eta}$. On a alors :

$$\mathcal{R}_l = \frac{\mu\, v\, \delta}{\eta} = \frac{\mu\, v\, L}{\eta}\, \frac{\eta}{L} = \mathcal{R}\, \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}}} = \sqrt{\mathcal{R}}$$

Si $\mathcal{R}$ est de l'ordre de 1 000, $\sqrt{\mathcal{R}}$ est de l'ordre de 30 ; l'écoulement est turbulent et la couche limite encore laminaire ; mais si $\mathcal{R}$ est de l'ordre de 10^6, $\sqrt{\mathcal{R}}$ est de l'ordre de 10^3 ; et la couche limite devient elle aussi turbulente (voir l'application numérique ci-dessus et la remarque finale du chapitre B-XIII) et son étude devient très complexe.

9.b Croissance de la couche limite.

• Croissance de la couche limite.

L'équation de Navier-Stokes réduite aux termes intéressants ici s'écrit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \cdots = \cdots + \nu\, \Delta \overrightarrow{v}$$

en introduisant la viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\mu}$. On y reconnaît une équation de diffusion et l'on sait que dans ce cas (voir en thermodynamique le chapitre E-X traitant des phénomènes diffusifs), qu'à partir d'une perturbation initialement localisée, celle-ci se propage proportionnellement à la racine carrée du produit du temps par la viscosité dynamique (qui joue ici le rôle de diffusivité). L'épaisseur δ de la couche limite est donc $\delta(t) = Cte\, \sqrt{\nu\, t} = Cte\, \sqrt{\frac{\eta\, t}{\mu}}$.

On peut retrouver cela par analyse dimensionnelle. L'équation de NAVIER-STOKES montre que $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ et $\nu \, \Delta \overrightarrow{v}$ ont même dimension et l'on en déduit que celle de ν est $[\nu] = L^2 \, T^{-1}$, on a bien sûr $[t] = T$ et $[\delta] = L$ et il est aisé d'en déduire $[\delta]^2 = [\nu] \cdot [t]$; on rappelle que l'analyse dimensionnelle ne donne les résultats qu'à une constante adimensionnée près qui se révèle toujours de l'ordre de grandeur de l'unité ou pas loin.

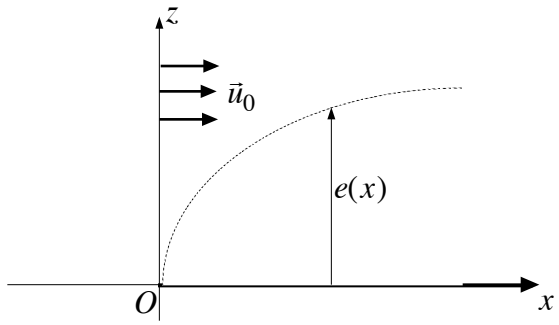

FIGURE 28 – Croissance de la couche limite.

La figure 28 p. 93 montre un obstacle qui reçoit par son extrémité gauche un écoulement de vitesse u_0. Paçons-nous dans le référentiel se déplaçant à la vitesse u_0 par rapport au précédent et tel qu'à $t = 0$, l'extrémité gauche soit en $x' = 0$. A l'abscisse $x' = 0$ mais à l'instant t, la couche limite a une épaisseur $Cte \sqrt{\frac{\eta \, t}{\mu}}$; parallèlement, l'extrémité gauche de l'obstacle s'est déplacée vers la gauche de $u_0 \, t$. Revenons dans le référentiel initial avec l'origine $x = 0$ à cette extrémité. L'épaisseur $Cte \sqrt{\frac{\eta \, t}{\mu}}$ qui vient d'être calculée correspond à l'abscisse $x = u_0 \, t$. Par un changement de point de vue (on en profite pour changer de notation), on peut dire que l'épaisseur de la couche limite dépend de sa position (formellement $x = \frac{u_0}{t}$) selon une loi :

$$e(x) = \alpha \sqrt{\frac{\eta \, x}{\mu \, u_0}}$$

où α est une constante adimensionnée. On trouve donc un profil parabolique comme sur la figure.

Exemple d'application : si l'obstacle est un tuyau, dès que l'épaisseur de la couche limite est égale au rayon intérieur R, celle-ci occupe tout le tuyau et c'est là, en gros, que commencera l'écoulement de POISEUILLE (voir paragraphe 8.e p. 80).

• Estimation d'une traînée.

Un fluide incompressible visqueux (de caractéristiques μ et η) arrive, en régime stationnaire, parallèlement à une plaque plane semi-infinie avec une vitesse u_0. On note $u(x, z)$ et $v(x, z)$ les composantes horizontale et verticale de la vitesse du fluide au dessus de la

plaque. Il se crée une couche limite d'épaisseur :

$$e(x) = \alpha \sqrt{\frac{\eta\, x}{\mu\, u_0}}$$

où α est une constante adimensionnée (voir ci-dessus).

On modélise sommairement mais raisonnablement (analogie avec l'écoulement de COUETTE, voir paragraphe 8.d p. 78) la vitesse horizontale dans et hors de la couche limite comme ceci :

$$\begin{cases} u(x,z) = u_0\, \frac{z}{e(x)} & \text{pour} \quad z < e(x) \\ u(x,z) = u_0 & \text{pour} \quad z > e(x) \end{cases}$$

On considère un volume de contrôle défini par $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant \ell$ et $0 \leqslant z \leqslant h$ avec $h > e(L)$ (voir figure 29 p. 94).

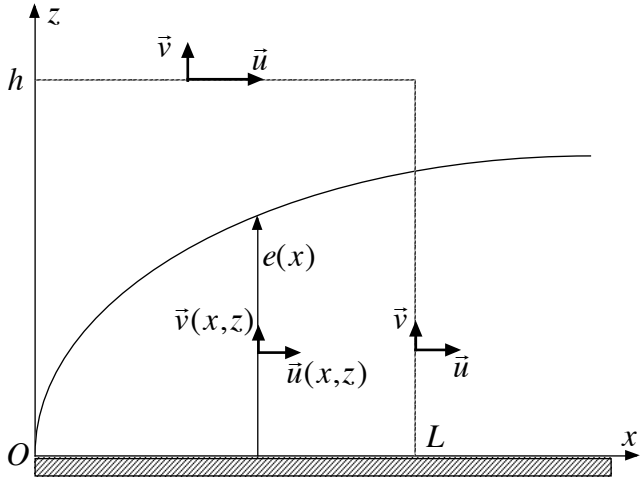

FIGURE 29 – Ecoulement sur une plaque.

Effectuons un bilan de masse ou de volume car le fluide se comporte comme s'il était incompressible (toujours la même explication) et le volume se conserve alors. Le débit volumique entrant par la face verticale en $x = 0$ est $\ell\, h\, u_0$, le débit volumique sortant par la face verticale en $x = L$ se calcule par intégration (jusque $e(L)$) et vaut $\displaystyle\int_0^{e(L)} u(L,z)\, \ell\, \mathrm{d}z + \ell\, [h - e(L)]\, u_0$ et enfin le débit volumique sortant par la face horizontale en $z = h$ se calcule par intégration et vaut $\displaystyle\int_0^L \ell\, v(x,h)\, \mathrm{d}x$. En régime stationnaire, le débit entrant est la somme des débits sortants d'où, en simplifiant par h, en simplifiant les termes $h\, u_0$, en reportant l'expression de $u(L,z)$ et en effectuant la première des intégrations, on en déduit successivement :

$$h\, u_0 = \int_0^{e(L)} u(L,z)\, \mathrm{d}z + [h - e(L)]\, u_0 + \int_0^L v(x,h)\, \mathrm{d}x$$

$$e(L)\,u_0 = \int_0^{e(L)} u(L,z)\,\mathrm{d}z + \int_0^L v(x,h)\,\mathrm{d}x$$

$$e(L)\,u_0 = u_0 \int_0^{e(L)} \frac{z}{e(L)}\,\mathrm{d}z + \int_0^L v(x,h)\,\mathrm{d}x$$

$$e(L)\,u_0 = \frac{1}{2}\,e(L)\,u_0 + \int_0^L v(x,h)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\,e(L)\,u_0 = \int_0^L v(x,h)\,\mathrm{d}x$$

Ce résultat est valable pour tout L ; dérivons donc par rapport à L (qui est, entre autres, borne supérieure de l'intégrale). Après avoir permuté les termes, dérivé puis reporté l'expression de $e(L)$, on arrive à :

$$v(L,h) = \frac{u_0}{2}\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L} = \frac{u_0}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\sqrt{\frac{\eta\,x}{\mu\,u_0}}\right)\bigg|_{x=L} = \frac{u_0}{2}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\mu\,u_0\,L}} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\eta\,L\,u_0}{\mu}}$$

ceci est vrai pour L (on remplace donc formellement et raisonnablement L par x) et indépendamment de h (pourvu que $h > e(x)$). Le bilan de masse nous a donc donné accès à l'expression de la composante verticale de la vitesse en dehors de la couche limite (et nous le donnerait à l'intérieur en raisonnant avec $h < e(L)$) :

$$v(x,z) = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\eta\,u_0\,x}{\mu}} \qquad \text{pour} \quad z > e(x)$$

Effectuons maintenant un bilan de quantité de mouvement (on note Q_x) en projection sur l'axe Ox. On obtient les différents termes en multipliant les débits massiques (débits volumiques multipliés par la masse volumique quasi-constante) par la composante sur Ox de la vitesse.

Il entre par la face verticale en $x = 0$ est $\frac{\delta Q_{xe}}{\mathrm{d}t} = \mu\,\ell\,h\,u_0^2$.

Il sort par la face verticale en $x = L$ (on effectue le calcul par intégration jusque $e(L)$) $\dfrac{\delta Q_{xs1}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{e(L)} \mu\,u(L,z)^2\,\ell\,\mathrm{d}z + \mu\,\ell\,[h - e(L)]\,u_0^2$.

Il sort par la face horizontale en $z = h$ (calcul par intégration) $\dfrac{\delta Q_{xs2}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^L \mu\,\ell\,v(x,h)\,u_0\,\mathrm{d}x$ (le facteur v, vitesse normale, pour le débit volumique et le facteur u_0 parce qu'on parle de quantité de mouvement sur Ox). Pour ce dernier terme, si l'on factorise $\mu\,\ell\,u_0$ et si l'on utilise le résultat antérieur $\int_0^L v(x,h)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e(L)\,u_0$, on obtient $\dfrac{\delta Q_{xs2}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\,\mu\,\ell\,e(L)\,u_0^2$.

Le bilan du système confondu, à l'instant initial, avec contenu du volume de contrôle est classiquement :

$$\frac{\delta Q_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta Q_{xs1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q_{xs2}}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta Q_{xe}}{\mathrm{d}t} = \cdots$$

$$\cdots = \mu\,\ell\left[\int_0^{e(L)} u(L,z)^2\,\mathrm{d}z + [h-e(L)]\,u_0^2 + \frac{1}{2}\,e(L)\,u_0^2 - h\,u_0^2\right] = \cdots$$

$$\cdots = \mu\,\ell\left[\int_0^{e(L)} u(L,z)^2\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\,e(L)\,u_0^2\right] = \mu\,\ell\,u_0^2\left[\int_0^{e(L)} \frac{z^2}{e(L)^2}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\,e(L)\right] = \cdots$$

$$\cdots = \mu\,\ell\,u_0^2\left[\frac{1}{3}\,e(L) - \frac{1}{2}\,e(L)\right] = -\frac{1}{6}\,\mu\,\ell\,e(L)\,u_0^2 = -\frac{\alpha}{6}\,\mu\,\ell\sqrt{\frac{\eta\,L}{\mu\,u_0}}\,u_0^2 = -\frac{\alpha}{6}\,\ell\sqrt{\mu\,\eta\,L\,u_0^3}$$

Or on sait que $\frac{\delta Q_x}{\mathrm{d}t}$ est la force subie par le système qui est somme du bilan des forces de pression et de la réaction de la plaque sur le fluide. Si le fluide est un gaz, par nature léger et peu visqueux (μ et η petits), l'équation de Navier-Stokes qui montre que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$ est somme de termes en μ et de termes en η, permet d'affirmer que ce gradient est négligeable, que la pression est quasiment uniforme et que son bilan sur la surface du volume de contrôle est négligeable. On en déduit après un changement de signe (action et réaction) et un doublement (la plaque a deux faces) qu'une plaque de longueur L est soumise à une traînée :

$$F_x = \frac{\alpha}{3}\,\ell\sqrt{\mu\,\eta\,L\,u_0^3}$$

Remarque : cet exemple un peu particulier montre qu'il ne faut pas toujours se fier aveuglément aux conclusions de l'analyse dimensionnelle. Pour la traînée d'une sphère, une formule en R (son rayon), u_0 et μ est forcement en $\mu\,R^2\,u_0^2$, adaptable ici en $\mu\,\ell\,L\,u_0^2$ par exemple, et une formule en R, u_0 et η est forcement en $\eta\,R\,u_0$, adaptable ici en $\eta\,\ell\,u_0$ par exemple. Ici on a la racine carrée de ces deux possibilités (à la constante adimensionnée près, bien sûr) !