

Chapitre D-I

Oscillateurs.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

La littérature est abondante au sujet de l'oscillateur harmonique, éventuellement soumis à un frottement fluide et/ou à une excitation sinusoïdale. N'ayant rien de novateur à proposer sur le sujet, après être revenu sur la vraie nature de l'amplitude complexe, trop souvent mal présentée, j'ai exploré les aspects plus délicats : les oscillateurs soumis à des frottements solides ou proportionnels au carré de la vitesse ou à une force de rappel non linéaire ou encore excités par impulsions déclenchées, un frottement dépendant de la position (modèle de Van der Pol) ou une force de rappel à coefficient modulé (résonance paramétrique).

Nous nous pencherons aussi sur les oscillations de relaxation et leur synchronisation sur une excitation périodique.

Nous évoquerons enfin les oscillateurs couplés et leurs modes propres, dans le cas où ils sont deux puis plusieurs.

Table des matières

D-I Oscillateurs.	1
1 Différents types d'oscillateurs.	4
1.a Oscillateur harmonique.	4
1.b Oscillateur anharmonique.	7
1.c Oscillations de relaxation.	10
2 Oscillateur harmonique unidirectionnel amorti.	11
2.a Amortissement par frottement solide.	11
2.b Amortissement par frottement fluide.	13
3 Oscillations entretenues.	16
3.a Synchronisation par impulsions déclenchées.	16
3.b Oscillations auto-entretenues. Modèle de Van der Pol	19
4 Oscillateur excité.	21
4.a Excitation sinusoïdale.	21
4.b Résonance paramétrique.	29
4.c Excitation périodique d'une oscillation de relaxation.	33
5 Oscillateurs couplés.	37
5.a Deux masses et trois ressorts.	37
5.b Généralisation à une chaîne de ressorts.	40

1 Différents types d'oscillateurs.

1.a Oscillateur harmonique.

- Une masse et un ressort.

L'exemple introductif le plus utilisé est celui du mouvement vertical d'une masse m soumise à un champ de pesanteur d'intensité g et suspendue à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est accrochée à un point fixe O . En prenant un axe Oz vertical descendant ; les lois de la dynamique affirment que la cote z du centre de gravité de la masse m vérifie :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m g - k (z - l_0)$$

On en déduit l'existence d'une position d'équilibre $z_e = l_0 + \frac{m g}{k}$, puis on normalise l'équation du mouvement en plaçant l'origine en cette position d'équilibre, c'est-à-dire en effectuant le changement de variable $z = z_e + \zeta$ qui conduit à :

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -k \zeta$$

Cette équation, en l'absence de conditions initiales précises, admet comme solutions les fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Tout cela est connu. Ce type d'oscillateur et son mouvement sont qualifiés d'*harmoniques*.

Toutefois, il faut signaler que l'exemple est le plus mal choisi qui soit. La première raison est que les masses des spires du ressort, elles-même en mouvement, influent sur le résultat et invalident le modèle d'une force proportionnelle à l'allongement, valable uniquement à l'équilibre et nous y reviendrons dans le chapitre D-II consacré aux ondes stationnaires.

La seconde raison est manifeste quand on tente l'expérience : après quelques oscillations verticales, la masse acquiert un mouvement latéral pendulaire par couplage entre les deux types de mouvement (voir partie 5 p. 37).

- Mouvement autour d'une position d'équilibre.

Soit un système dont le mouvement soit géré par un seul paramètre x soumis uniquement à des forces conservatrices et où donc le théorème de l'énergie peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = E$$

où m est homogène à une masse, $U(x)$ est une énergie potentielle et E une constante qui dépend des conditions initiales.

S'il existe en x_0 un équilibre possible, correspondant à $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$, c'est que $U(x)$ est un minimum (relatif ou absolu) car ainsi dans un voisinage de x_0 , $U(x) > U(x_0)$ et le système ne pourrait s'y trouver, à partir de l'équilibre, qu'avec $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ négatif ce qui est absurde.

Plaçons-nous dans un voisinage de la position d'équilibre et posons $\xi = x - x_0$. Un développement de TAYLOR à l'ordre deux de $U(x)$ conduit à :

$$U(x) = U(x_0) + \xi \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} + \frac{1}{2} \xi^2 \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} + \dots$$

Or puisqu'il s'agit d'un minimum, on a $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0}$ nul et $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}$ positif que l'on notera désormais k . On a donc, à l'ordre deux, $U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} k \xi^2$ et par ailleurs $\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$; le théorème de l'énergie devient :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + U(x_0) + \frac{1}{2} k \xi^2 = E$$

d'où l'on déduit par dérivation temporelle puis simplification par $\frac{d\xi}{dt}$:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k \xi$$

Ce qui prouve que les petits mouvements autour d'une position d'équilibre sont harmoniques.

• Oscillateur bi- ou tri-dimensionnel.

Pour un système bidimensionnel dont le centre de gravité a pour coordonnées notées ici x et z , au voisinage d'une position d'équilibre définie par x_0 et z_0 et d'énergie U_0 , on peut écrire¹ (là aussi les dérivées premières sont nulles au minimum) en posant $x - x_0 = \xi$ et $z - z_0 = \zeta$:

$$U - U_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \xi \zeta + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \zeta^2 \right]$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle symétrisée :

$$U - U_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

1. résultat d'analyse admis.

Or, nos amis mathématiciens démontrent² qu'une matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée; on aura donc, avec un bon choix des axes :

$$U - U_0 = \frac{1}{2} k_1 \xi^2 + \frac{1}{2} k_2 \zeta^2$$

correspondant à une force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$ de composantes $-k_1 \xi$ et $-k_2 \zeta$; le mouvement se projette donc en deux mouvements harmoniques c'est-à-dire sinusoïdaux, disons d'amplitudes a et b .

Si les deux constantes sont égales, les deux périodes aussi et la trajectoire est une ellipse³ inscrite dans un rectangle de côtés $2a$ et $2b$, éventuellement dégénérée en segment de droite ou en cercle.

Si les constantes sont différentes, la trajectoire est toujours inscrite dans un rectangle mais n'est plus fermée; si les constantes sont voisines, elle sera perçue comme une ellipse dont les axes tournent lentement et qui se déforme pour rester inscrite dans le rectangle, comme sur la figure 1 p. 6.

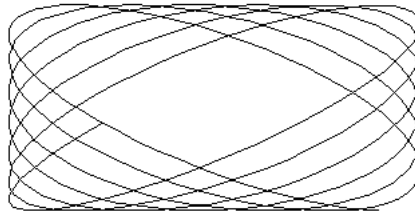


FIGURE 1 – Oscillateur harmonique bi-dimensionnel.

Pour un système tri-dimensionnel, on raisonne exactement de la même façon et les conclusions sont du même type.

2. résultat lui aussi admis.

3. Si $x = a \cos(\omega t)$ et $z = b \cos(\omega t + \varphi) = b [\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi]$, on en déduit $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ comme combinaison linéaire de x et de z ; on élimine le temps par $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ et l'on tombe sur une équation du second degré, d'une conique donc et c'est une ellipse car elle est bornée.

1.b Oscillateur anharmonique.

• Présentation du problème et résolution.

Lorsque l'on met en équation le mouvement, repéré par un angle θ par rapport à la verticale, d'un pendule de moment d'inertie J autour de son axe de rotation horizontal, de masse m de centre de gravité G à une distance a de l'axe et placé dans un champ de pesanteur d'intensité g , soit par le théorème du moment cinétique par rapport à son axe, soit par le théorème de l'énergie cinétique suivi d'une dérivation temporelle, on arrive à l'équation :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m g a \sin \theta$$

Pour les mouvements de faible amplitude, on peut confondre $\sin \theta$ et θ et l'on retrouve alors, en bonne approximation, un mouvement harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{m g a}{J}}$ et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

On se propose ici d'étudier un mouvement d'amplitude non négligeable sur l'équation dégagée de tout contexte expérimental et avec une variable x adimensionnée :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin x$$

L'adaptation du théorème de l'énergie cinétique s'obtient en multipliant les deux membres par $\frac{dx}{dt}$ puis en intégrant par rapport au temps et en tenant compte que $\frac{dx}{dt}$ est nul pour la valeur maximale de x notée x_m , on arrive alors successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -\omega_0^2 \sin x \frac{dx}{dt} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \omega_0^2 \cos x + Cte \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \omega_0^2 (\cos x - \cos x_m) \end{aligned}$$

Une représentation dans l'espace des phases permet de visualiser ce résultat ; il s'agit de noter $v = \frac{dx}{dt}$ et de tracer la courbe d'équation $\frac{1}{2} v^2 = \omega_0^2 (\cos x - \cos x_m)$ dans un plan Oxv avec x en abscisse et v en ordonnée. On obtient la figure 2 p. 8 (tracée pour $x_m = \frac{\pi}{2}$) qui est banale. Pour $v = \frac{dx}{dt}$ positif, x est croissant donc la courbe est parcourue vers la droite et pour v négatif, vers la gauche ; elle est donc parcourue dans le sens horaire. La remarque à ne pas rater, c'est qu'elle est fermée donc *périodique* ; en effet après un tour, on se retrouve au même endroit et avec la même vitesse et donc le tour suivant se fera dans les mêmes conditions en particulier pendant le même temps, la période T . En outre, la symétrie divise la courbe en quatre quarts parcourus pendant le même temps, un quart de période $\frac{T}{4}$ donc.

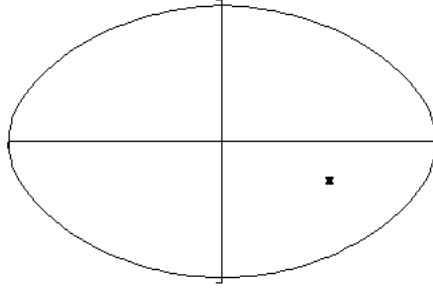


FIGURE 2 – Pendule pesant dans l'espace de phases.

Plaçons nous dans le quart de période où x croît de 0 (on prend ce point de départ comme origine des temps) vers x_m , entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{4}$, on a donc :

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{2\omega_0^2 (\cos x - \cos x_m)}$$

Soit en séparant les variables :

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos x - \cos x_m)}}$$

Puis en intégrant entre 0 et x (on rebaptise ξ la variable muette d'intégration, car les mathématiciens ont horreur, à juste titre, qu'elle ait le même nom qu'une des bornes de l'intégrale) :

$$t = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \xi - \cos x_m)}}$$

qui donne la fonction $t(x)$ puis la fonction inverse $x(t)$. Il se trouve que l'on ne sait pas expliciter la primitive de la fonction à intégrer et a fortiori ni $t(x)$ ni $x(t)$ mais néanmoins, il faut considérer que l'on a trouvé la solution au problème. N'oublions pas que $\ln 2$ est le nom que l'on donne à $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ que l'on ne sait pas plus expliciter. Toutefois, on a des algorithmes de calcul qui permettent d'obtenir un résultat numérique à toute précision que l'on voudrait, c'est pourquoi l'on peut considérer que le problème est résolu.

• **Relation entre période et amplitude.**

En appliquant le résultat précédent à $x = x_m$ donc $t = \frac{T}{4}$, on tire successivement, en introduisant la période des petites oscillations $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ puis en utilisant la formule trigonométrique $\cos x = 1 - 2 \sin^2(\frac{x}{2})$:

$$T = 4 \int_0^{x_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \xi - \cos x_m)}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{x_m} \frac{d\xi}{\sqrt{(\cos \xi - \cos x_m)}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_m} \frac{d\xi}{\sqrt{[\sin^2(\frac{x_m}{2}) - \sin^2(\frac{\xi}{2})]}}$$

Là encore, même si l'on ne sait pas expliciter le résultat, l'une ou l'autre des deux dernières relations donne le lien entre période et amplitude.

Il est toutefois intéressant de donner un développement limité plus facile à manipuler mais plus approximatif. On commence, pour rendre les bornes d'intégration fixes, par le changement de variable $\sin(\frac{\xi}{2}) = \sin(\frac{x_m}{2}) \sin \varphi$ avec $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ d'où

$$\sqrt{[\sin^2(\frac{x_m}{2}) - \sin^2(\frac{\xi}{2})]} = \sin\left(\frac{x_m}{2}\right) \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)} = \sin\left(\frac{x_m}{2}\right) \cos \varphi$$

et successivement :

$$\xi = 2 \arcsin \left[\sin\left(\frac{x_m}{2}\right) \sin \varphi \right]$$

$$d\xi = \frac{2 \sin(\frac{x_m}{2}) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{x_m}{2}) \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{[\sin^2(\frac{x_m}{2}) - \sin^2(\frac{\xi}{2})]}} = \frac{2 d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{x_m}{2}) \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{x_m}{2}) \sin^2 \varphi}}$$

Il ne reste qu'à intégrer terme à terme le développement limité en $\sin(\frac{x_m}{2})$, contentons-nous ici du premier ordre non nul :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{x_m}{2}\right) \sin^2 \varphi + \dots \right] d\varphi$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2\left(\frac{x_m}{2}\right) + \dots \right] = 1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{x_m}{2}\right) + \dots$$

que l'on peut poursuivre en développement limité en x_m , ce qui est simple au premier ordre non nul :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{x_m^2}{16} + \dots$$

Par exemple pour une amplitude de $x_m = \frac{\pi}{2}$, $\frac{T}{T_0}$ est égal à peu près à $1 + \frac{\pi^2}{64} \approx 1,15$

1.c Oscillations de relaxation.

Un tout autre type d'oscillations est illustré par l'exemple classique du vase de Tantale⁴. Un récipient cylindrique est rempli par une amenée d'eau qui fournit un débit volumique constant D . Un siphon s'amorce quand le niveau d'eau atteint une valeur h_2 ce qui provoque une vidange partielle jusqu'à ce que le siphon se désamorce quand le niveau d'eau atteint une valeur h_1 . La figure 3 p. 10 résume la situation.

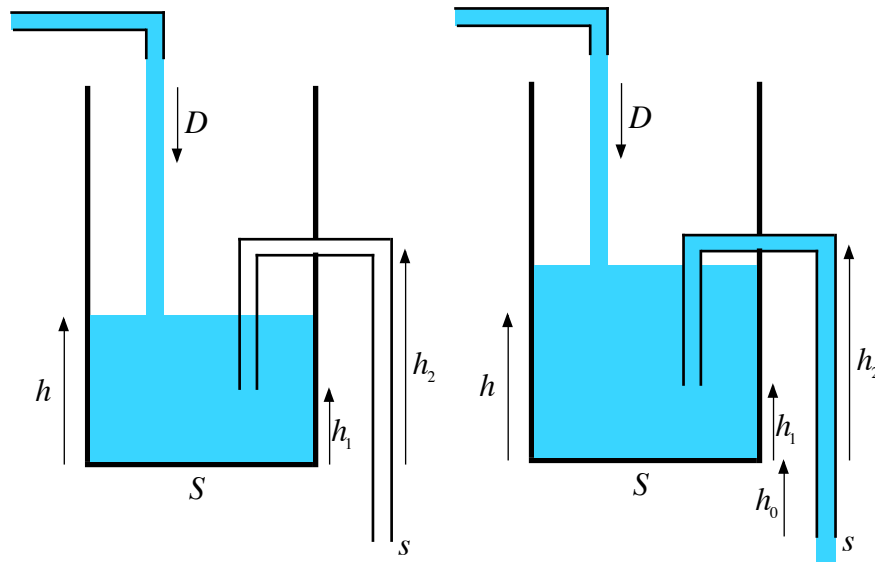


FIGURE 3 – Vase de Tantale.

Pour passer du niveau h_1 au niveau h_2 dans le récipient de surface de base S , il faut verser un volume $S(h_2 - h_1)$ ce qui, avec un débit volumique D prend un temps :

$$T_{1 \rightarrow 2} = \frac{S(h_2 - h_1)}{D}$$

Quand le siphon est amorcé, si sa sortie se trouve à h_0 sous le fond du récipient, si le fluide est peu visqueux et si la section s du siphon est négligeable de la section S du

4. Allusion mythologie : pour le punir de ses méfaits, les dieux le condamnent à ne jamais pouvoir éteindre sa soif et les fleuves s'assèchent lorsqu'il s'y penche pour y boire.

réipient, le théorème de BERNOULLI (voir chapitre B-XIV en mécanique des fluides) donne pour débit volumique dans le siphon en fonction de la hauteur h d'eau dans le réipient :

$$D_s(h) = s \sqrt{2g(h + h_0)}$$

d'où l'on déduit par conservation du volume (le liquide est réputé incompressible) que :

$$S \frac{dh}{dt} = D - D_s$$

et pourvu que $D_s(h_1) > D$, le temps pour passer de h_2 à h_1 est :

$$T_{2 \rightarrow 1} = \frac{S}{s} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{2g(h + h_0)} - D}$$

Il suffit de lire les résultats pour constater que la période du phénomène ne dépend pas des conditions initiales mais d'un paramètre « secondaire » aisément ajustable, ici D , le débit d'alimentation et que son amplitude est constante.

Pour un oscillateur harmonique, la période ne dépend pas non plus des conditions initiales mais de paramètres « primaires », la masse et la raideur du ressort et par contre l'amplitude de l'oscillation dépend notablement des conditions initiales.

Les oscillations du même genre que celles du vase de Tantale, s'appellent *oscillations de relaxation*.

2 Oscillateur harmonique unidirectionnel amorti.

Soit un système de masse m de mouvement unidirectionnel d'abscisse x soumis à une force de rappel $-kx$ et une force de frottement f ; l'équation du mouvement est alors :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f - kx$$

2.a Amortissement par frottement solide.

Lorsque le système est un solide qui est en contact avec un autre solide, le modèle de forces de COULOMB (voir le chapitre B-IX sur les solides en mouvement) suggère le modèle suivant :

- l'équilibre est possible si $|f|$ ne dépasse pas un maximum f_m , donc si $|x|$ est inférieur à $x_m = \frac{f_m}{k}$
- sinon $|f| = f_m$ avec un signe opposé à celui de $\frac{dx}{dt}$

Prenons comme conditions initiales à $t = 0$, pour fixer les idées, $\frac{dx}{dt} = 0$ et $x = x_0 > x_m$. La force de rappel va provoquer un mouvement dans le sens des x décroissants, d'où $\frac{dx}{dt} < 0$ et $f = +f_m$; l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f_m - kx$$

dont la solution, est en notant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et (cf supra) $x_m = \frac{f_m}{k}$:

$$x(t) = x_m + (x_0 - x_m) \cos(\omega t)$$

valable tant que $\frac{dx}{dt}$ est négatif, soit sur une demi-période $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ au terme de laquelle on a :

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = 2x_m - x_0 < x_m$$

Le graphe de $x(t)$ est une demi-sinusoïde d'axe $x = x_m$. A la fin de cette période, on note $x_1 = -x\left(\frac{T}{2}\right) = x_0 - 2x_m > -x_m$. Si $x_1 < x_m$, l'équilibre est possible et le mouvement s'arrête, sinon, on reprend l'étude en changeant le signe de f et le mouvement est une demi-sinusoïde d'axe $x = -x_m$ qui s'arrête en $x_2 = x_1 - 2x_m = x_0 - 4x_m$.

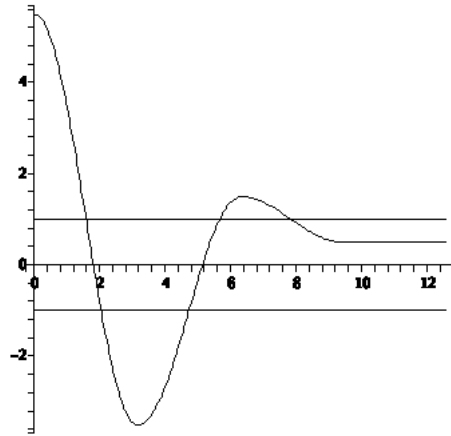


FIGURE 4 – Amortissement par frottement solide.

Le mouvement global est une succession de demi-sinusoïdes dont les axes sont alternativement $x = x_m$ et $x = -x_m$ jusqu'à ce que l'une se termine en un point compris entre $-x_m$ et x_m . La figure 4 p. 12 en donne un exemple en coordonnées arbitraires.

Certaines voitures conçues pour être robustes⁵ possèdent encore de nos jours des amortisseurs formés de lames métalliques frottant les unes contre les autres au gré des mouvements de la voiture (voir figure 5 p. 13).



FIGURE 5 – Amortisseur à lames.

2.b Amortissement par frottement fluide.

Le second type de frottement classiquement étudié est traditionnellement appelé *frottement fluide* et est proportionnel à la vitesse formelle $\frac{dx}{dt}$ avec un coefficient négatif. C'est proprement scandaleux! On trouve certes ce type de frottement formel mais uniquement en électrocinétique (chapitre C-V) où il s'agit de la loi d'OHM ou dans des couplages électromécaniques (chapitre C-VII) via les forces de LAPLACE; par contre dans le cas d'un solide qui se déplace dans un fluide, ce n'est le cas qu'aux petites valeurs du nombre de REYNOLDS (voir les chapitres B-XIII et B-XIV de mécanique des fluides) ce qui n'est valable que pour un microbe au galop; au contraire, aux grandes valeurs de ce nombre, on a une proportionnalité au carré de la vitesse et pour les valeurs moyennes une formule intermédiaire, hypothèse que nous n'évoquerons pas.

• Frottement proportionnel à la vitesse.

On se place donc dans le cas formel d'une masse soumise à une force de rappel proportionnelle au déplacement et une force de frottement proportionnelle à la vitesse, soit :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda \frac{dx}{dt} - kx$$

que l'on réécrit de façon canonique sous cette forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

5. Une pensée émue à la 2 CV Citroën.

C'est du régal pour le mathématicien : l'équation est linéaire donc l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel (c'est quasiment évident) dont la dimension est le produit (ça l'est moins) du rang de l'équation différentielle (ici 2 à cause du $\frac{d^2x}{dt^2}$) par la dimension de l'espace (ici 1, le paramètre x est unidirectionnel). Donc si l'on trouve deux solutions particulières non proportionnelles, on a une base de cet espace vectoriel et l'on jubile ; il se trouve, et l'expérience⁶ permet d'y penser automatiquement, qu'il y a des solutions exponentielles en $x(t) = A \exp(X t)$ où A et X sont des constantes. En reportant cette expression dans l'équation différentielle puis en simplifiant par $A \exp(X t)$ on obtient une équation algébrique en X , appelée *équation résolvante* qui est une banale et sympathique équation du second degré :

$$X^2 + 2\alpha\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$$

de discriminant réduit $\Delta' = (\alpha^2 - 1)\omega_0^2$

◦ Si α est plus grand que l'unité et donc Δ' positif, l'équation résolvante a deux racines réelles négatives notées $-\omega_1 = -(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})\omega_0$ et $-\omega_2 = -(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\omega_0$ et les solutions de l'équation différentielles sont :

$$x(t) = A_1 \exp(-\omega_1 t) + A_2 \exp(-\omega_2 t)$$

où l'on calcule A_1 et A_2 à partir des conditions initiales.

Par exemple si à $t = 0$, on a $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$, on arrive aisément à :

$$x(t) = \frac{x_0}{\omega_2 - \omega_1} [\omega_2 \exp(-\omega_1 t) - \omega_1 \exp(-\omega_2 t)]$$

Ce type de solutions est appelé *mouvement apériodique*.

Pour t assez grand, l'exponentielle de plus grand coefficient (en valeur absolue) devient négligeable et, avec les mêmes conditions initiales, on a l'équivalent :

$$x(t) \sim \frac{x_0}{\omega_2 - \omega_1} \omega_2 \exp(-\omega_1 t)$$

qui gère le retour à l'équilibre ;

A ω_0 donné et avec ces conditions initiales données, on vérifie que ω_1 décroît quand α croît. Le retour à l'équilibre est plus rapide avec α petit avec ce type de solution.

◦ Si α est plus petit que l'unité et donc Δ' négatif, l'équation résolvante a deux racines imaginaires conjuguées à partie réelle négative $= -(\alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2})\omega_0$ (on notera ci-après $-\alpha\omega_0 \pm i\omega$) et les solutions de l'équation différentielles peuvent être écrites, en notant $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - \alpha^2}$, sous l'une de formes suivantes :

$$x(t) = [A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_1 t)] \exp(-\alpha\omega_0 t)$$

6. Rappelons qu'une méthode est une astuce que l'on utilise plus de deux fois.

$$x(t) = [B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_1 t)] \exp(-\alpha \omega_0 t)$$

$$x(t) = C \cos(\omega_1 t + \varphi) \exp(-\alpha \omega_0 t)$$

où l'on calcule A_1 et A_2 , ou B_1 et B_2 ou C et φ à partir des conditions initiales.

Ce type de solutions est appelé *pseudo-périodique*. On peut préférer y écrire l'exponentielle sous la forme $\exp(-\frac{t}{\tau})$.

Par exemple si à $t = 0$, on a encore $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$, on arrive aisément à partir de la seconde forme à :

$$x(t) = x_0 \left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha \omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right] \exp(-\alpha \omega_0 t)$$

L'expression trigonométrique prenant périodiquement sa valeur maximale, c'est le facteur $\exp(-\alpha \omega_0 t)$ qui assure le retour à l'équilibre qui sera donc d'autant plus rapide que α est plus grand avec ce type de solution.

◦ Le physicien doit s'interdire de traiter⁷ le cas où α est égal à l'unité. Il s'agit d'un cas charnière appelé *régime critique* jamais observé car en physique α n'est jamais connu exactement mais avec une marge d'incertitude. Ecrire $\alpha = 1$, ce n'est pas de la physique, ce sont des mathématiques. En tant que cas limite, les conclusions des deux autres montrent que c'est celui qui assure le retour le plus rapide à l'équilibre. Dans les instruments de mesure à curseur mobile, on s'arrangera donc à la construction pour donner à α une valeur proche de l'unité pour que la mesure puisse être faite rapidement.

• Frottement proportionnel au carré de la vitesse.

En fait, ce n'est qu'aux grandes vitesses qu'il y a proportionnalité au carré de la vitesse v ; aux basses vitesses, on retrouve la proportionnalité à la vitesse et aux moyennes quelque chose d'intermédiaire; on peut proposer une force en $F = -av - bv|v|$ (on note $v|v|$ et non v^2 pour que la force s'oppose au mouvement que v soit positif ou négatif)

Supposons que la vitesse initiale soit très élevée, alors la force de frottement sera extrêmement forte, à cause du carré, donc la décélération intense et l'on arrivera vite dans la zone de vitesse où l'on retrouvera la proportionnalité à la vitesse; bien sûr on pourra en ressortir à cause du terme élastique mais l'idée c'est que la forte dissipation énergétique ramènera vite l'oscillateur dans le cadre de l'étude précédente.

Mathématiquement, on peut aborder la résolution dans un intervalle de temps où le signe de la vitesse reste constant et son module (sa norme) assez grande pour négliger le terme proportionnel à v devant celui en v^2 . L'équation du mouvement a alors l'allure suivante :

$$m \frac{dv}{dt} + \lambda v^2 + kx = 0$$

7. mais savoir le faire car les auteurs d'épreuves d'examen ou de concours ne partagent pas tous mon opinion, ce en quoi ils ont tort.

On considère l'énergie cinétique comme fonction de la position ⁸, elle-même fonction du temps, soit :

$$\frac{1}{2} m v^2 = E[x(t)]$$

Dérivons cette expression par rapport au temps grâce à la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$m v \frac{dv}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dE}{dx} v$$

soit après simplification $m \frac{dv}{dt} = \frac{dE}{dx}$ et l'équation du mouvement peut se réécrire :

$$\frac{dE}{dx} + \frac{1}{\ell} E(x) = -\omega_0^2 x$$

où $\frac{1}{\ell} = \frac{2\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Cette équation a pour solution particulière $E(x) = -\omega_0^2 \ell (x - \ell)$ et pour solution générale :

$$E(x) = -\omega_0^2 \ell (x - \ell) + A \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)$$

où A est calculé à partir des conditions initiales.

On en déduit $v = \frac{dx}{dt}$, supposée positive, rappelons-le, en fonction de x et l'on sépare les variables pour arriver à :

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-\omega_0^2 \ell (x - \ell) + A \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)}}$$

qui remplace la résolution d'une équation différentielle par un calcul d'intégrale. On ne peut certes pas mener à bien l'intégration de façon explicite mais les algorithmes de calcul numérique sont plus aisés à contrôler et à mettre en œuvre. On a donc numériquement accès à $t(x)$ d'où à $x(t)$. Avec une équation non linéaire comme point de départ, ce n'est pas si mal.

3 Oscillations entretenues.

3.a Synchronisation par impulsions déclenchées.

Prenons l'exemple de la figure 6 p. 17, un célèbre tableau de Jean-Honoré FRAGONARD exposé à Londres dans la Wallace Collection ⁹ et dont le sujet est le personnage en bas à gauche dont la préoccupation est explicitée par le titre « Les hasards heureux de l'escarpolette ¹⁰ » et la direction de son regard.

8. On pense à cette méthode car elle est liée la démonstration du théorème de l'énergie mécanique.

9. Si vous ne connaissez pas, courez-y à votre prochain passage à Londres.

10. ou balançoire.



FIGURE 6 – Les hasards heureux de l'escarpolette (J-H Fragonard).

Ce qui m'intéresse ici, c'est l'autre personnage, en bas à droite, dans l'ombre¹¹ : à l'aide d'une corde, il tire¹² sur la balançoire vers lui chaque fois que celle-ci arrive à son point le plus haut côté opposé à lui. Il communique ainsi une impulsion dont l'énergie compense l'énergie dissipée par le frottement au cours d'un aller-retour, ce qui permet un mouvement d'amplitude constante.

Modélisons la situation ainsi : à un instant initial $t = 0$, l'oscillateur atteint une position maximale $x(0) = x_0$ avec donc une vitesse nulle ; un dispositif excitateur lui fournit, en un temps suffisamment bref pour être négligé, une impulsion qui fait passer sa vitesse de 0 à $v(0) = v_0$; puis l'oscillateur n'est soumis qu'à une force de rappel et un frottement fluide proportionnel à la vitesse suffisamment faible pour que le régime soit pseudo-périodique. Après un aller-retour, l'oscillateur atteint à nouveau, au temps $t = T$, une position maximale avec $x(T) = x_1$ et une vitesse nulle avant une nouvelle impulsion identique à la précédente et l'on voudrait que x_1 soit égal à x_0 pour établir un régime permanent.

Plutôt que de partir de l'équation différentielle, partons de la forme qu'a la solution apériodique la plus générale, soit $x(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \exp(-\frac{t}{\tau})$ où ω et τ sont liés aux coefficients de l'équation différentielle (cf supra). Juste après l'impulsion, on a

11. C'est un serviteur, l'autre un amoureux.

12. La variante classique consiste à pousser le dos de la demoiselle chaque fois que celle-ci arrive à son point le plus haut du côté du pousseur.

$x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$ (avec $v(t) = \frac{dx}{dt}$), on en déduit aisément que :

$$x(t) = \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \frac{x_0}{\tau}}{\omega} \sin(\omega t) \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La double condition visée avant l'impulsion suivante ($x(T) = x_0$ et $v(T) = 0$) conduit¹³ au système :

$$\begin{cases} x_0 = \left[x_0 \cos(\omega T) + \frac{v_0 + \frac{x_0}{\tau}}{\omega} \sin(\omega T) \right] \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \\ 0 = \left[v_0 \cos(\omega T) - \left(\frac{v_0 + \frac{x_0}{\tau}}{\tau\omega} + x_0 \omega \right) \sin(\omega T) \right] \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \end{cases}$$

Les paramètres ω et τ sont fixés par la nature de l'oscillateur ; nous avons donc deux équations pour trois paramètres x_0 , v_0 et T et l'on peut donc en fixer un et calculer les deux autres. La stratégie calculatoire pousse à fixer T car le système d'équations est linéaire vis-à-vis de x_0 et v_0 . Physiquement, il est plus pertinent de fixer l'impulsion donc v_0 et, faute de pouvoir résoudre explicitement le système en T et x_0 , de se contenter, par élimination de v_0 , de trouver une relation entre amplitude x_0 et période T . Le système est linéaire en v_0 ; on multiplie donc chacune des équations par le coefficient de v_0 dans l'autre puis on les soustrait. Inutile de dire que le résultat est compliqué à souhait ; mais il est inutile de l'expliciter pour arriver à cette conclusion qualitative : l'entretien par impulsions déclenchées au passage par un point particulier de la trajectoire modifie la période des oscillations qui n'est plus uniquement liée aux coefficients de l'équation différentielle mais dépend désormais (légèrement en pratique) de l'amplitude obtenue.

On peut bien évidemment s'appuyer sur un tracé de courbes assisté par ordinateur : on lui entre les valeurs de ω , τ , v_0 fixes et x_0 modifiable ; le graphe visualise x_1 le maximum suivant puis, par encadrements successifs, on règle, grâce à la comparaison $x_1 < x_0$ ou $x_1 > x_0$, x_0 de sorte que $x_1 = x_0$. C'est bien évidemment plus raisonnable que le calcul.

On n'a étudié ici qu'un seul type d'impulsion déclenchée ; il est significatif car pour les autres types, on raisonne dans le même esprit avec les mêmes difficultés calculatoires. On ne peut toutefois pas passer sous silence le dispositif d'*échappement à ancre* qui permet d'entretenir le mouvement des horloges qui ont longtemps été le seul moyen de déterminer la longitude¹⁴ pour les navigateurs, en particulier au moment des « grandes découvertes » (découverte de l'Amérique, du contournement de l'Afrique par le sud). Le dispositif le plus simple règle le mouvement d'une horloge à balancier.

La figure 7 p. 19 en montre le principe : la balancier est solidaire d'une pièce en forme d'ancre de marine munie de deux dents qui empêche la libre rotation d'une roue dentée entraînée par le poids de l'horloge et entraînant les aiguilles dans leur rotation sur le cadran. Entre la première figure et la seconde, le pendule commence son mouvement de

13. On vous fait grâce des calculs.

14. par le décalage entre le midi observé (soleil au plus haut dans la journée) et celui de Londres (par exemple) conservé sur l'horloge de bord. Sachant qu'un décalage d'une minute (de temps) à la latitude de 45° correspond à une erreur de 20 km, la précision était d'une terrible importance

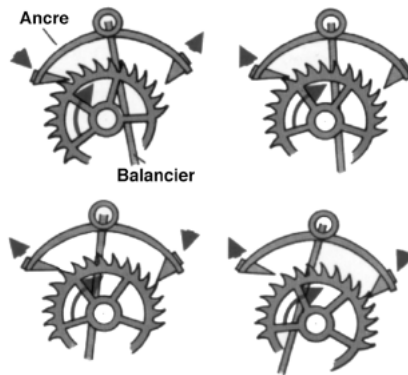


FIGURE 7 – Echappement à ancre.

droite à gauche et la roue dentée exerce une force sur la dent gauche de l'ancre avec un léger déplacement donc fournit un travail qui entretient le mouvement. La troisième position est celle où la dent gauche de l'ancre *échappe* à la roue dentée qui se meut donc brusquement et provoque le mouvement des aiguilles (en général d'une seconde sur le cadran) mais est vite arrêtée par la dent droite qui, elle, plonge entre les dents de la roue. On peut ainsi entamer un nouveau cycle à une symétrie près. Cela dit quand la dent de la roue entre en contact avec la dent droite de l'ancre il y a un choc qui crée une impulsion dans le mauvais sens. Très vite, on a amélioré¹⁵ la géométrie des dents de la roue et de l'ancre de sorte que les forces de contact aient un moment nul par rapport à l'axe pendant les phases défavorables et un moment maximal pendant les phases favorables.

3.b Oscillations auto-entretenuës. Modèle de Van der Pol

Une autre solution d'entretien des oscillations a été proposée par Balthasar VAN DER POL sur le papier. Mécaniquement, on n'a pas pu construire d'oscillateurs de VAN DER POL mais en électronique des oscillateurs qui procèdent du même esprit. Les idées qui ont été développées à ce sujet ont été très fructueuses en permettant d'avancer dans la compréhension des phénomènes non-linéaires. De quoi s'agit-il ? D'un oscillateur à amortissement négatif faible qui conduit à des oscillations pseudo-périodiques en exponentielle croissante non à partir de l'équilibre¹⁶ mais à partir d'un état très proche que l'agitation thermique permet d'atteindre. En outre pour éviter une divergence explosive, au fur et à mesure que le phénomène s'amplifie, l'amortissement croît et finit par redevenir positif de sorte que le mouvement se stabilise en une oscillation où se compensent les périodes d'amplification positive et d'amplification négative.

15. Anecdotiquement, on signale que Beaumarchais est connu non seulement pour ses pièces de théâtre mais pour avoir inventé un système d'échappement. Il est vrai qu'il était fils d'horloger.

16. Pas de mouvement possible à partir de là sans injection d'énergie.

L'équation proposée par VAN DER POL est la suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Remarquons que l'emploi de variables réduites $\xi = \frac{x}{x_0}$ et $\tau = \omega_0 t$ prouve que seul ε importe. Pour la lisibilité, on ne les utiliserons pas.

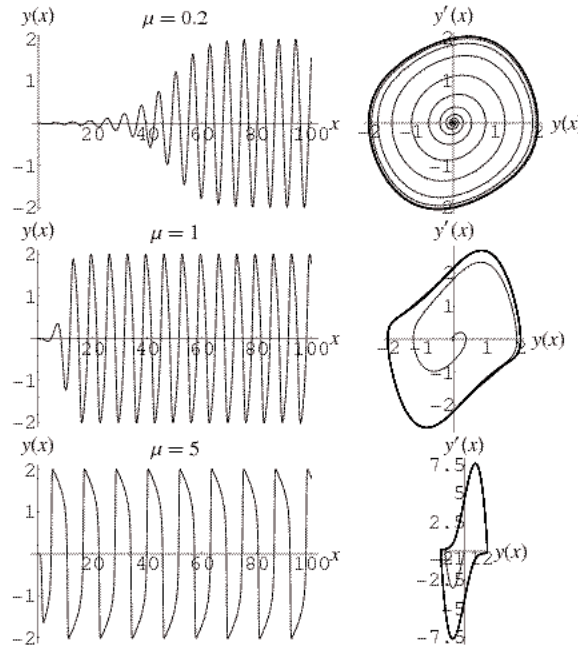


FIGURE 8 – Oscillateur de Van der Pol.

L'équation est non-linéaire et ne peut être résolue que numériquement, de nos jours avec l'outil informatique ; on peut visualiser le résultat soit de façon brute (déplacement x en fonction du temps t) soit dans l'espace des phases (courbe d'équations paramétriques $X = x(t)$ et $Y = v(t) = \frac{dx}{dt}$). La figure 8 p. 20 extraite du site mathworld.wolfram.com en donne les solutions pour trois valeurs de ε (μ sur la figure et $y(x)$ au lieu de $x(t)$) et l'on constate qu'après un bref régime transitoire on atteint un régime périodique d'amplitude proche de $2x_0$.

Lorsque ε est petit, on peut pousser jusque quelques approximations raisonnables. On commence par introduire l'esprit de l'énergie mécanique en multipliant par $\frac{dx}{dt}$ et en reconnaissant :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right] = \varepsilon \omega_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Lorsque le régime est devenu périodique, l'intégrale sur une période du premier membre est nul ; pour le second, nul par conséquence, la forme presque ronde dans l'espace des phases permet l'approximation sinusoïdale $x(t) = x_1 \cos(\omega t)$ d'où, en décalant l'origine des temps et en effectuant les calculs dont on ne donne pas le détail :

$$\int_0^T \varepsilon \omega_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = 0$$

$$\varepsilon \omega_0 \omega^2 x_1^2 \int_0^T \left(1 - \frac{x_1^2}{x_0^2} \cos^2(\omega t)\right) \sin^2(\omega t) dt = 0$$

$$\varepsilon \omega_0 \omega^2 x_1^2 T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{x_1^2}{x_0^2}\right) = 0$$

d'où l'on tire $x_1 = 2x_0$, déjà lu sur la figure mais avec ici une explication physique, c'est bien mieux. Par contre, il est inutile de faire l'hypothèse $\omega = \omega_0$ donc cette approche ne donne aucune indication sur la période.

Pour la période, on peut dire le terme dissipatif est borné par un terme proportionnel à ε car dans son expression x est borné et donc que pour ε faible, il est négligeable, l'équation est donc proche de celle de l'oscillateur harmonique et la pulsation proche de ω_0 .

Tout autre développement dépasserait les objectifs de ce chapitre.

4 Oscillateur excité.

4.a Excitation sinusoïdale.

- **Présentation du problème.**

Reprenons le tout premier exemple d'une masse suspendue à un ressort mais dont l'extrémité supérieure soit soumise à un mouvement vertical sinusoïdal $A \cos(\omega t)$. L'équation du mouvement, en tenant compte d'un frottement fluide et en reprenant les notations de l'exemple et avec le même changement de variable, est

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m g - \lambda \frac{dz}{dt} - k[(z - A \cos(\omega t)) - l_0]$$

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \lambda \frac{d\zeta}{dt} + k \zeta = k A \cos(\omega t)$$

La mise sous forme canonique (cf paragraphe 2.b p. 13) conduit à une équation type :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \alpha \omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

Il n'y a, bien sûr, aucune raison pour que ω , pulsation de l'excitation, soit égale à ω_0 , pulsation qu'aurait l'oscillateur non excité et sans frottement, appelée *pulsation propre*.

• **Principe de résolution.**

si $x_P(t)$ est une solution, dite *solution particulière*, et $x(t)$ une autre solution quelconque, dite *solution générale*, on a :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \\ \frac{d^2x_P}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx_P}{dt} + \omega_0^2 x_P = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \end{cases}$$

Par différence des deux équations, en notant $\xi(t)$ la différence $x(t) - x_P(t)$, on tire :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0$$

ce qui prouve que $\xi(t)$ vérifie l'équation du même oscillateur non excité, appelée *équation homogène* ou plus couramment mais fautivement¹⁷ *équation sans second membre*. Or on sait résoudre cette équation (cf paragraphe 2.b p. 13).

Puisque $x(t) = x_P(t) + \xi(t)$, toute solution de l'équation à résoudre est somme d'une solution particulière, à trouver, et de l'une quelconque des solutions prises dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. On choisira les deux coefficients apparaissant dans $\xi(t)$ de sorte que $x(t)$ (et non $\xi(t)$ bien sûr) vérifie les conditions initiales imposées à l'oscillateur.

Reste donc à trouver une solution particulière; on la cherchera sinusoïdale de même pulsation que l'excitation et l'on sera très optimiste sur le résultat de cette quête car les dérivées successives d'une sinusoïde sont sinusoïdales de même pulsation et qu'une combinaison linéaire de sinusoïdes de même pulsation en est une autre.

• **Méthode des amplitudes complexes.**

En restant dans le cadre de la pure trigonométrie, l'on peut très bien trouver la solution particulière sinusoïdale; mais la méthode des amplitudes complexes est beaucoup plus efficace. Profitons de l'occasion pour la présenter correctement, ce qui n'est pas toujours le cas dans les cours de physique.

Considérons l'ensemble \mathcal{E}_ω , ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω donnée. Une fonction quelconque de cet ensemble peut être donnée par son amplitude a et sa phase à l'origine φ et notée $f(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$. Les formules élémentaires de trigonométrie permettent d'écrire :

$$f(t) = a \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\varphi) \cos(\omega t) + a \sin(\varphi) [-\sin(\omega t)]$$

17. L'équation a un second membre. Il est nul.

ce qui nous apprend trois choses :

- l'ensemble \mathcal{E}_ω est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des réels.
- le couple des deux fonctions $f_1(t) = \cos(\omega t)$ et $f_2(t) = -\sin(\omega t)$ forme une base de cet espace vectoriel.
- les composantes sur cette base d'une fonction d'amplitude a et de phase à l'origine φ sont $a \cos(\varphi)$ et $a \sin(\varphi)$.

On sait par ailleurs

- l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des réels.
- le couple des complexes $z_1 = 1$ et $z_2 = i$ forme une base de cet espace vectoriel.
- les composantes sur cette base d'un complexe $z = x + iy$ sont x et y .

L'isomorphisme (une bijection linéaire) canonique entre espaces vectoriels de même dimension, noté ici Φ , associe à toute fonction de \mathcal{E}_ω muni de la base précédente le nombre complexe de \mathbb{C} muni de la base précédente qui a les mêmes composantes. Si la fonction f est définie par $f(t) = a \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\varphi) f_1(t) + a \sin(\varphi) f_2(t)$ ou plus fondamentalement si $f = a \cos(\varphi) f_1 + a \sin(\varphi) f_2$ alors

$$\Phi(f) = a \cos(\varphi) z_1 + a \sin(\varphi) z_2 = a \cos(\varphi) + i a \sin(\varphi) = a \exp(i\varphi)$$

Dans la pratique courante, on note \underline{f} au lieu de $\Phi(f)$, que l'on appelle *amplitude complexe* de la fonction, et l'on retient pour une application automatique que si l'on a $f(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$ alors $\underline{f} = a \exp(i\varphi)$.

La fonction réciproque est aisée à expliciter si l'on écrit le complexe en module et argument. Il suffit de lire ce qui précède pour affirmer que $\Phi^{-1}(a \exp(i\varphi)) = a \cos(\omega t + \varphi)$. Or on peut remarquer que :

$$a \cos(\omega t + \varphi) = \Re(a \exp[i(\omega t + \varphi)]) = \Re[a \exp(i\varphi) \exp(i\omega t)]$$

ce qui donne une formule pratique à utiliser automatiquement : si \underline{f} est l'amplitude complexe de f alors $f(t) = \Re(\underline{f} \exp(i\omega t))$.

Un raccourci courant consiste à dire que l'on associe à toute fonction réelle $a \cos(\omega t + \varphi)$ la fonction complexe $a \exp[i(\omega t + \varphi)] = a \exp(i\varphi) \exp(i\omega t)$ dont on ne retient que l'amplitude $a \exp(i\varphi)$. Ainsi présentée, il s'agit d'une recette de cuisine qui marche un peu miraculeusement ; c'est bien dommage.

Passons à la dérivation temporelle, c'est un isomorphisme (bijection linéaire) de \mathcal{E}_ω sur lui-même ; qui est défini dès que l'on connaît les dérivées temporelles des deux vecteurs de la base, soit :

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos(\omega t)] = \omega [-\sin(\omega t)] = \omega f_2 \\ \frac{df_2}{dt} = \frac{d}{dt}[-\sin(\omega t)] = -\omega \cos(\omega t) = -\omega f_1 \end{cases}$$

donc la matrice associée à la dérivation est $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ et si $g = \frac{df}{dt}$, on peut noter vectoriellement, en considérant les fonctions comme des vecteurs colonnes, $(g) = (P)(f)$.

L'isomorphisme canonique Φ (l'amplitude complexe) entre \mathcal{E}_ω et \mathbb{C} , de par sa nature, donne pour image de la dérivation un isomorphisme de \mathbb{C} sur lui-même qui aura la même matrice. C'est à dire que si $g = \frac{df}{dt}$, leurs amplitudes complexes vérifient matriciellement $(g) = (P)(f)$. En notant $\underline{f} = x + iy$ et $\underline{g} = X + iY$, on aura donc :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix}$$

soit algébriquement

$$\underline{g} = X + iY = -\omega y + i\omega x = i^2\omega y + i\omega x = i\omega(x + iy) = i\omega \underline{f}$$

C'est là l'intérêt de l'amplitude complexe : la dérivation temporelle est remplacée par une simple multiplication par une constante et si $g = \frac{df}{dt}$, alors $\underline{g} = i\omega \underline{f}$.

Bouclons la boucle en appliquant la méthode à la recherche de la solution particulière de :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

d'où, en appliquant la fonction Φ , puis en utilisant sa linéarité et enfin la façon dont elle transforme les dérivations (une dérivée seconde est la dérivée de la dérivée) :

$$\begin{aligned} \Phi \left[\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right] &= \omega_0^2 a \Phi [\cos(\omega t)] \\ \Phi \left[\frac{d^2x}{dt^2} \right] + 2\alpha\omega_0 \Phi \left[\frac{dx}{dt} \right] + \omega_0^2 \Phi [x] &= \omega_0^2 a \Phi [\cos(\omega t)] \\ (i\omega)^2 \Phi [x] + 2(i\omega)\alpha\omega_0 \Phi [x] + \omega_0^2 \Phi [x] &= \omega_0^2 a \Phi [\cos(\omega t)] \end{aligned}$$

d'où avec $\Phi [\cos(\omega t)] = 1$ et en notant \underline{x} pour $\Phi [x]$

$$[\omega_0^2 + 2i\alpha\omega_0\omega - \omega^2] \underline{x} = \omega_0^2 a$$

Avec un peu d'entraînement, on passe directement de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

à :

$$[\omega_0^2 + 2i\alpha\omega_0\omega - \omega^2] \underline{x} = \omega_0^2 a$$

On a donc :

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2i\alpha\omega_0\omega - \omega^2} a$$

ce qui donne l'amplitude complexe de la fonction recherchée. Une maladresse fréquente pour expliciter la fonction consiste à la mettre sous forme canonique en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué de ce dernier ; ce calcul sert à extraire la partie réelle et la partie imaginaire, or ce dont a besoin de du module et de l'argument, il est donc inutile¹⁸. Le module d'un rapport est le rapport des modules et son argument, la différence des arguments. L'amplitude A et la phase à l'origine φ de la solution particulière sont donc :

$$\begin{cases} A = |\underline{x}| = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 + 2i\alpha\omega_0\omega - \omega^2|} a = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}} a \\ \varphi = \arg(\underline{x}) = 0 - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega_0\omega) = -\arccos \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}} \end{cases}$$

où le choix de l'arccos est justifié par le fait que la partie imaginaire du dénominateur est toujours positive.

Rien n'empêchera ensuite de mettre la solution particulière sous cette autre forme $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ en développant $\cos(\omega t + \varphi)$.

• Un tabou absolu.

La méthode des amplitudes complexes repose sur un isomorphisme entre \mathcal{E}_ω , ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation donnée ω et \mathbb{C} .

Le produit de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω se linéarise en somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de pulsation double et n'appartient donc pas à \mathcal{E}_ω et la magie n'opère plus.

Le piège est que rien n'empêche d'effectuer le produit des amplitudes complexes des deux facteurs, ce produit est l'amplitude complexe d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω mais celle-ci n'a rien à voir avec le produit des deux fonctions sinusoïdales.

Retenons donc :

Il est tabou de multiplier deux amplitudes complexes.

et l'on n'oublie pas qu'un carré est un produit !

• Régimes transitoire et sinusoïdal établi.

Un problème type classique est le suivant : un oscillateur n'a pas été excité depuis longtemps et il est donc revenu au repos puis à $t = 0$, on l'excite par un phénomène sinusoïdal connu. Pour $t > 0$, on doit résoudre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t + \varphi)$$

¹⁸. Aphorisme personnel : ce qui est inutile est potentiellement nuisible. C'est le cas ici, on complique la suite des calculs

avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ (ou toute autre couple de conditions initiales) ; les paramètres α , ω_0 , a , ω et φ sont des données du problème.

La méthode des amplitudes complexes donne une solution particulière de l'équation différentielle sans conditions initiales fixés de la forme :

$$A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

où A_1 et B_1 se déduisent de façon unique des données (cf supra) et sont donc considérés comme connus.

L'équation homogène, avec $\alpha < 1$ par exemple pour fixer les idées a des solutions de la forme :

$$x(t) = [A_2 \cos(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_1 t)] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où ω_1 et τ se déduisent de façon unique des données (cf supra) et sont donc considérés comme connus et où A_2 et B_2 sont quelconques.

La solution la plus générale de l'équation de l'oscillateur excité est donc :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) + [A_2 \cos(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_1 t)] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où il faut adapter A_2 et B_2 au conditions initiales. Avec notre exemple, on devra avoir :

$$\begin{cases} x(0) = A_1 + A_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega B_1 + \omega_1 B_2 - \frac{1}{\tau} A_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $A_2 = -A_1$ et $B_2 = -\frac{1}{\omega_1 \tau} A_1 - \frac{\omega}{\omega_1} B_1$ etc.

La figure 9 p.27 trace, pour des valeurs parfaitement arbitraires des constantes du problème, la courbe donnant la position x en fonction du temps t . Pour t assez grand, le facteur $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ devient négligeable et l'on a donc $x(t) \approx A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$, c'est le *régime sinusoïdal établi* qui se confond avec la solution particulière trouvée par la méthode des amplitudes complexes.

Pour le début du mouvement à partir de $t = 0$, le *régime transitoire*, la fonction est beaucoup plus complexe, avec des hésitations (je veux dire des aller-retours sans passage par la position d'équilibre), et de ce fait est rarement étudiée ce qui est bien dommage. Un point important à noter c'est que, pendant cette phase, $x(t)$, en valeur absolue, passe par des valeurs qui sont supérieures à l'amplitude du régime sinusoïdal établi ; on peut montrer que l'on peut arriver, dans certains cas, environ au double. Si $x(t)$ désigne, non une position mais une intensité électrique, on parle de *sur-intensité au démarrage* ; il importe d'en connaître l'existence pour que le disjoncteur de protection de l'installation¹⁹ supporte cette brève surintensité sans sourciller (disjoncteur *temporisé*).

19. qui comporte bobines et condensateurs pour relever de ce chapitre.

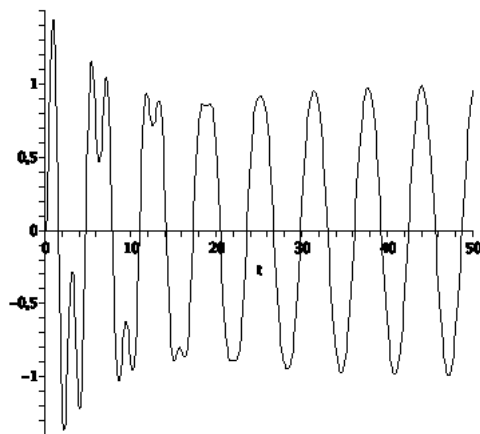


FIGURE 9 – Régime transitoire.

- **Résonance.**

Lorsque le régime sinusoïdal s'est établi, l'oscillateur excité par un terme noté ici $\omega_0^2 a \cos(\omega t)$ (à une phase près, liée au choix de l'origine des temps donc non significative), acquiert (cf supra) un mouvement d'amplitude complexe :

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2i\alpha\omega_0\omega - \omega^2} a$$

et d'amplitude réelle :

$$A = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}} a$$

Avec les variables réduites $X = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Y = \frac{A}{a}$, la fonction $Y(X)$ dépend du seul paramètre α :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + 4\alpha^2 X^2}}$$

La figure 10 p. 28 montre le tracé de cette courbe pour $\alpha = 3$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{9}$. A basse fréquence ($X \rightarrow 0$), toutes tendent vers $Y = 1$, ce qui est normal car $\frac{dx}{dt}$ proportionnel à ω et $\frac{d^2x}{dt^2}$ proportionnel à ω^2 deviennent négligeables²⁰ et à haute fréquence ($X \rightarrow \infty$),

20. On laisse au lecteur le soin de poursuivre, ça lui fera un peu d'exercice.

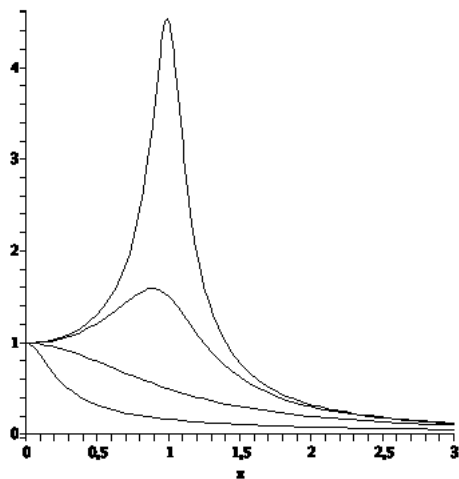


FIGURE 10 – Courbe de résonance.

toutes tendent vers $Y = 0$, ce qui est tout aussi normal car cette fois c'est $\frac{d^2x}{dt^2}$ qui devient prépondérant²¹.

Pour α assez grand, $Y(X)$ est monotone décroissante et pour α assez petit, $Y(X)$ passe par un maximum, pour une valeur de X proche de 1 et légèrement inférieure, maximum d'autant plus prononcé que α est plus petit ; on dit qu'il y a *résonance*²².

Il peut être intéressant de déterminer la valeur charnière de α au-dessous de laquelle le phénomène de résonance existe et, si oui, les valeurs, en fonction de α , de X et Y au maximum. Mais la façon de définir Y n'est pas unique, on peut mettre au numérateur, à une constante multiplicative près l'amplitude de $x(t)$ (position en mécanique, différence de potentiel aux bornes d'un condensateur en électrocinétique) ou celle de $\frac{dx}{dt}$ (vitesse en mécanique, différence de potentiel aux bornes d'une résistance en électrocinétique) ou enfin celle de $\frac{d^2x}{dt^2}$ (accélération en mécanique, différence de potentiel aux bornes d'une bobine en électrocinétique) et au dénominateur, on a aussi ce genre de choix. Je me contenterai donc de donner la piste à explorer : la fonction $Y = \frac{1}{\sqrt{(1-X^2)^2 + 4\alpha^2 X^2}}$ varie dans le sens inverse de celui de $(1 - X^2)^2 + 4\alpha^2 X^2$ qui est le même que celui obtenu en remplaçant la variable X par son carré Ξ , on se ramène à l'étude du polynôme du second degré $P(\Xi) = (1 - \Xi)^2 + 4\alpha^2 \Xi$, ce qui est aisé. Pour les autres définitions de $Y(X)$, on adapte cette remarque.

21. Même remarque.

22. avec un seul « n », c'est diabolique.

Remarque : on pourrait aussi s'intéresser au déphasage (cf supra) :

$$\varphi = -\arccos \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_0^2 \omega^2}} = -\arccos \frac{1 - X^2}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + 4\alpha^2 X^2}}$$

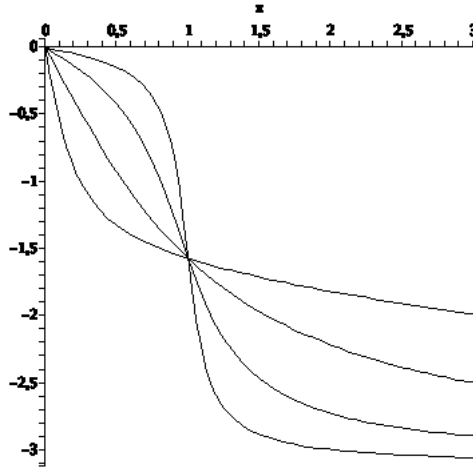


FIGURE 11 – Evolution du déphasage.

La figure 11 p. 29 montre le tracé de cette courbe pour les mêmes valeurs de α soit $\alpha = 3$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{9}$. A basse fréquence ($X \rightarrow 0$), toutes tendent vers $\varphi = 0$ (mouvement en phase avec l'excitation), à haute fréquence ($X \rightarrow \infty$), toutes tendent vers $\varphi = -\pi$ (mouvement en opposition de phase avec l'excitation) et pour $X = 1$ (égalité entre fréquence propre et fréquence excitatrice), toutes ont pour valeur $-\frac{\pi}{2}$ (mouvement en quadrature-retard avec l'excitation) avec une pente d'autant plus forte que α est petit. Selon que α est grand ou petit, on a une courbe à concavité fixe ou une courbe à inflexion (en $X = 1$). Cela dit, l'amplitude de mouvement sinusoïdal établi est bien plus importante que sa phase.

4.b Résonance paramétrique.

- **Présentation.**

Une autre façon d'exciter un oscillateur consiste à faire varier périodiquement un des ses paramètres donc un des coefficients de l'équation ; la réalisation pratique la plus courante consiste en un circuit R-L-C dont le condensateur a une épaisseur variable obtenue par la vibration d'une de ses armatures.

Formellement, on a une équation que l'on peut écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega(t)^2 x = 0$$

où $\omega(t)$ est une fonction périodique de période T .

Remarque 1 : le coefficient du terme d'amortissement a été écrit $\alpha\omega_0$ par analogie avec ce qui précède ; on aurait pu le noter λ ; si l'on maintient $\alpha\omega_0$, on choisira ω_0 de façon significative, par exemple une valeur intermédiaire entre le minimum et le maximum de $\omega(t)$ mais sans se lancer dans des calculs, ce n'est qu'une question de notation sans importance.

Remarque 2 : on arrive, en mécanique quantique, à ce type d'équation dans le cas d'une particule placée dans un champ périodique (dans un cristal par exemple).

L'équation différentielle à résoudre est linéaire à coefficients variables avec le temps, d'ordre deux ; on sait donc que l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension deux et qu'il suffit de connaître deux solutions (linéairement indépendantes) pour les connaître toutes par combinaison linéaire. Le seul problème c'est qu'il n'y a aucun moyen de trouver ces solutions.

Cependant, on arrive par des considérations²³ sinon simples au moins accessibles à montrer la possibilité d'une « résonance paramétrique ». Allons-y !

• Première étape : existence de solutions particulières.

Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions, supposées connues, de l'équation formant une base de l'espace vectoriel des solutions. On se propose de montrer qu'il existe parmi toutes les solutions, de la forme $x(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$, des solutions (non identiquement nulles) pour lesquelles existe une constante k telle que l'on ait à la fois $x(T) = kx(0)$ et $\dot{x}(T) = k\dot{x}(0)$ où T est la période de $\omega(t)$ et où $\dot{x}(t)$ est la notation classique de $\frac{dx}{dt}$.

Les coefficients λ et μ doivent donc être solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda x_1(T) + \mu x_2(T) = k [\lambda x_1(0) + \mu x_2(0)] \\ \lambda \dot{x}_1(T) + \mu \dot{x}_2(T) = k [\lambda \dot{x}_1(0) + \mu \dot{x}_2(0)] \end{cases}$$

On ne fait surtout pas de calcul, on se contente d'observer. Vis-à-vis de λ et μ , il s'agit d'un système de deux équations linéaires homogènes (sans termes constants). Il admet comme solution $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ qui correspond à la fonction identiquement nulle. On en veut d'autres, donc on veut que le système n'ait pas une solution unique ; son déterminant doit donc être nul. Les coefficients de λ et μ dans le système, mis mentalement sous forme canonique, sont des polynômes de degré un en k , donc le déterminant est un polynôme de degré deux en k , qui admet, sauf cas particulier, deux racines auxquelles correspondent deux fonctions répondant au « cahier des charges » et que nous choisirons désormais comme fonctions de base de l'espace vectoriel de solutions.

²³. trouvées avec une explication erronée (je ne cite donc pas mes sources) mais facile à rectifier.

• **Deuxième étape : propriétés des solutions particulières.**

Soit une solution de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega(t)^2 x = 0$$

avec comme conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ (rappel : $\omega(t)$ est une fonction périodique de période T). Nous supposons qu'il existe une constante k telle que l'on ait à la fois $x(T) = kx_0$ et $\dot{x}(T) = k\dot{x}_0$.

La fonction $\tilde{x}(t) = x(T + t)$, obtenu par décalage de l'origine des temps en $t = T$, ce qui ne modifie pas les fonctions dérivées vérifie donc la même équation linéaire mais avec comme conditions initiales $\tilde{x}(0) = kx_0$ et $\dot{\tilde{x}}(0) = k\dot{x}_0$. La linéarité de l'équation différentielle prouve que $kx(t)$ est une solution donc la solution de ce problème. On peut donc affirmer que $\tilde{x}(t) = kx(t)$ d'où $x(t + T) = kx(t)$.

On en déduit que $x(t + 2T) = k^2x(T)$, $x(t + 3T) = k^3x(t)$, etc. On peut écrire tout t sous la forme $t = NT + \theta$ où N est entier et θ compris entre 0 et T (division de t par T) et l'on a donc :

$$x(t) = k^N x(\theta)$$

que l'on peut reformuler ainsi :

$$x(t) = k^{(N + \frac{\theta}{T})} x(\theta) k^{(-\frac{\theta}{T})} = k^{(\frac{t}{T})} x(\theta) k^{(-\frac{\theta}{T})} = e^{(\frac{t}{T} \ln k)} x(\theta) k^{(-\frac{\theta}{T})}$$

On peut introduire la fonction $u(t)$ périodique de période T s'identifiant entre 0 inclus et T exclu²⁴ à $x(t) k^{(-\frac{t}{T})}$, vérifiant donc $u(t) = u(NT + \theta) = u(\theta)$ et remplacer la donnée de k par celle de $\tau = \frac{T}{\ln k}$.

La synthèse des deux conclusions est qu'il existe deux solutions particulières de la forme :

$$x(t) = e^{\frac{t}{\tau}} u(t)$$

où u est une fonction périodique de même période que l'excitation. C'est un renseignement intéressant sur ces fonctions que l'on ne peut expliciter.

• **Troisième étape : possibilité d'amplification.**

Trois cas se présentent pour $k^{(\frac{t}{T})} = e^{\frac{t}{\tau}}$:

- $|k| < 1$ et la fonction correspondante tend vers 0 quand t croît ; c'est un classique régime transitoire
- $|k| = 1$ et la fonction correspondante reste stable, à un déphasage près si k est complexe ; un régime permanent est possible

24. Les exceptions du genre inclus/exclu font le charme de la langue française !

- $|k| > 1$ et la fonction correspondante diverge mathématiquement ; physiquement les non-linéarités, qui apparaissent quand x est très grand, stabilisent le phénomène à une très grande amplitude ; c'est le phénomène de *résonance paramétrique*.

La conclusion est que, sous certaines conditions, on peut à partir d'une faible variation périodique d'un paramètre obtenir un mouvement périodique de grande amplitude. On travaille actuellement à des amplificateurs optiques sur ce principe.

• **Un exemple pas trop compliqué.**

Le cas le plus simple est celui d'une variation de type signal carré où $\omega(t) = \omega_1$ sur une demi-période et $\omega(t) = \omega_2$ sur l'autre demi-période. On a donc sur chaque demi-période une équation classique de solutions sinusoïdales. Une solution quelconque a l'allure suivante :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_1 t) + \frac{B}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) & \text{si } x \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ x(t) = A \cos(\omega_2 t) + \frac{B}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) & \text{si } x \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases}$$

dont l'écriture permet la continuité de x et \dot{x} en $t = 0$.

Les conditions imposées (ici adaptées au choix de l'intervalle de départ rendu symétrique) $x(\frac{T}{2}) = k x(-\frac{T}{2})$ et $\dot{x}(\frac{T}{2}) = k \dot{x}(-\frac{T}{2})$ conduisent à un système de deux équations linéaires homogènes en A et B dont le déterminant doit être nul pour avoir $(A, B) \neq (0, 0)$ et une fonction $x(t)$ non identiquement nulle (même méthode de raisonnement que plus haut). On fait grâce au lecteur du détail des calculs et l'on arrive à ce que k est solution de :

$$k^2 + \left[\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - 2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \right] k + 1 = 0$$

où $\varphi_1 = \frac{\omega_1 T}{2}$ et $\varphi_2 = \frac{\omega_2 T}{2}$.

On sait que le rapport du dernier coefficient du polynôme en k au premier est le produit des racines, ici égal à l'unité donc. Toute solution de l'équation est combinaison linéaire des deux solutions relatives aux deux valeurs de k , avec, sauf conditions initiales particulières, deux coefficients non nuls. Trois cas se présentent donc :

- le discriminant de l'équation en k est négatif et il y a deux solutions complexes de module unité donc une oscillation permanente possible sans amplification (cf supra).
- le discriminant est nul, il y a une solution double, égale soit à 1, soit à -1 donc de module 1, on se ramène au cas précédent
- le discriminant est positif, les racines sont réelles, inverses l'une de l'autre et différentes, donc une de module supérieur à l'unité et l'autre de module inférieur ; la première permet (cf supra) une résonance paramétrique.

La condition d'amplification est donc :

$$\left[\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - 2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \right]^2 > 4$$

Je ne dis pas que c'est facile à exploiter littéralement, mais il est raisonnable ici d'utiliser l'outil informatique. La figure 12 p. 33 réalisée de façon minimaliste avec un outil simple²⁵, pour illustrer la faisabilité de la représentation, est un diagramme où φ_1 varie de gauche à droite entre 0 et π et φ_2 de haut en bas entre les mêmes limites (arbitraires car φ_1 et φ_2 ne sont pas limités) avec un échantillonnage tous les 4° pour un quadrillage à cases vertes si la condition est réalisée et rouges sinon (était-il utile de le préciser ?).



FIGURE 12 – Résonance paramétrique.

4.c Excitation périodique d'une oscillation de relaxation.

- Principe de la synchronisation.

Il y a tant de situations diverses qui relèvent de la relaxation qu'on ne peut, au contraire des oscillateurs harmoniques ou assimilés, donner une équation-type. Mon propos qui vise à dégager un comportement fréquent ne peut donc être étayé que par un exemple et n'a donc pas valeur démonstrative en dehors de cet exemple ; c'est pourquoi je l'ai présenté de façon minimaliste de façon que ce minimum soit plus facile à adapter à une autre situation.

On part de l'exemple du vase de TANTALE illustré par la figure 3 p. 10 et l'on suppose que, les autres paramètres restant constants, un dispositif non précisé²⁶ donne à h_2 une variation périodique de période T (pour alléger les calculs, une fonction triangle). Pour alléger les calculs on supposera aussi que le h_0 de la figure est grand devant $h_2 - h_1$ de sorte que le débit de vidange soit approximativement constant.

Définissons une notation : $h_2(t)$ étant supposé bloqué à une valeur h_d , nous appellerons $\tau(h_d)$ le temps qu'il faut pour que le siphonnage fasse passer le niveau dans le récipient de

25. Un tableur Excel où la première ligne et la première colonne sont des suites arithmétiques d'indices représentant φ_1 et φ_2 et les autres contiennent la valeur du déterminant en fonction des indices de la ligne et de la colonne, le plus dur étant de se documenter sur la formulation qui permette une recopie automatique correcte ; il suffit ensuite de formater les cellules au carré et de les colorier avec un test sur leur valeur (format/mise en forme conditionnelle) et ça marche !

26. Par exemple : la partie horizontale (sur la figure) du siphon comporte, à l'extérieur du récipient, une bosse souple dont le sommet est mis en mouvement par un fil attaché à la périphérie d'un disque qui tourne.

h_d à h_1 et pour que le niveau remonte à la valeur initiale h_d une fois le siphon désamorcé. Sauf cas exceptionnel, $\tau(h_d)$ n'est pas un multiple de T , nous noterons nT le multiple de T le plus proche de $\tau(h_d)$.

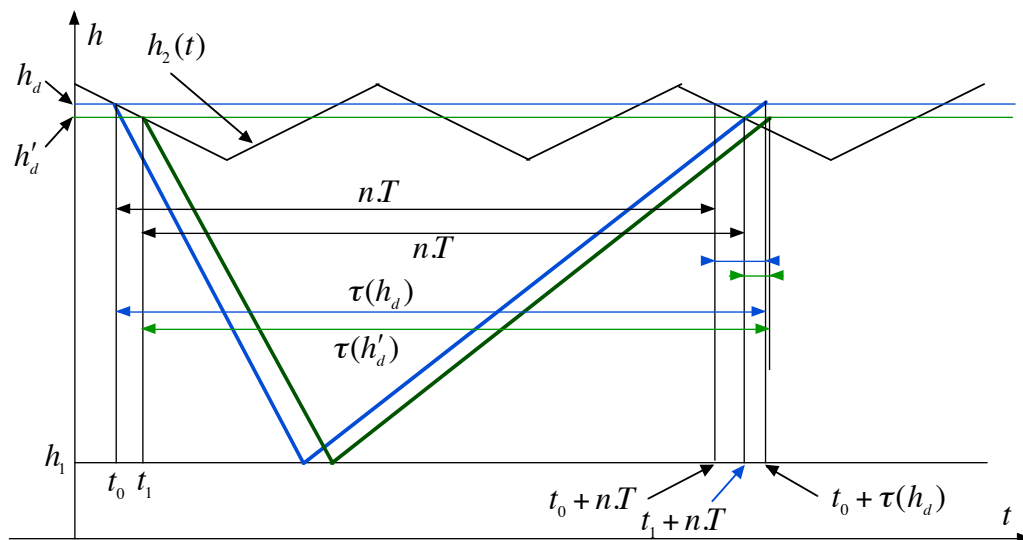


FIGURE 13 – Synchronisation de la relaxation.

Pour la suite du raisonnement, nous nous appuyerons sur la figure 13 p. 34. Supposons qu'à un instant t_0 le siphon s'amorce pour une valeur $h(t_0) = h_d$ de la hauteur d'eau ; le récipient se vidange à vitesse constante jusqu'à ce que $h = h_1$ puis le niveau remonte à vitesse constante jusqu'à ce qu'il soit égal à $h_2(t)$. Graphiquement, la vidange et le remplissage sont dessinés par un trait gras bleu foncé et le niveau $h_2(t)$ par une dent de scie en trait mince noir. Le siphon s'amorce à nouveau quand ces deux courbes se recoupent. On se place, pour fixer les idées, dans le cas où l'intersection a lieu quand $h_2(t)$ décroît et où $\tau(h_d)$ est légèrement supérieur à nT et la figure a été tracée avec $n = 2$.

A $t = t_0 + nT < \tau(h_d)$, $h_2(t)$ est redescendu à h_d mais le niveau n'a pas encore remonté à h_d , l'amorçage du siphon n'a pas encore eu lieu qui a donc lieu dans l'intervalle entre $t = t_0 + nT$ et $t = t_0 + \tau(h_d)$ dessiné en bleu. Appelons $t_1 + nT$ l'instant où les deux courbes se croisent et $h'_d < h_d$ le niveau atteint. On repart pour un nouveau cycle, dessiné en vert, que l'on décale sur le graphe de nT vers le passé pour une comparaison plus aisée.

Dans le calcul de $\tau(h'_d)$ (niveau supposé bloqué), comme on part de plus bas pour remonter plus bas, on aura $\tau(h'_d) < \tau(h_d)$; le croisement suivant aura lieu dans un intervalle plus étroit et, semble-t-il un peu plus bas encore. On conçoit la possibilité que les niveaux successifs d'amorçage descendent progressivement jusqu'à une valeur limitée h_l telle que $h_l = nT$ et dès lors tous les cycles seront identiques et la relaxation se sera synchronisée avec l'excitation.

• **Condition de synchronisation.**

Les calculs qui suivent sont un peu arides et ne sont valables que dans le cas particulier étudié. Leur lecture n'est pas obligatoire pour la compréhension du phénomène (ce qui précède suffit) ; ils figurent uniquement comme exemple de méthode de réflexion.

Pour alléger, nous choisirons l'origine des temps pour la première oscillation de sorte que $t_0 = 0$ et noterons $\theta_1 = t_1 + nT$. La hauteur d'amorçage $h_2(t)$ passe d'une valeur h_d rebaptisé y_0 à l'instant nT à une valeur h'_d rebaptisée y_1 à l'instant θ_1 avec une pente connue que nous noterons $-\alpha$; on a donc successivement :

$$\frac{y_1 - y_0}{\theta_1 - nT} = -\alpha$$

$$\theta_1 = nT + \frac{y_0 - y_1}{\alpha}$$

Le paramètre $\tau(h_d)$ soit ici $\tau(y_0)$ est, en appelant $-\beta$ la pente pendant la vidange et γ pendant le remplissage :

$$\tau(y_0) = \frac{y_0 - h_1}{\beta} + \frac{y_0 - h_1}{\gamma}$$

Pendant la phase de remplissage, le niveau passe ou plutôt passerait avec une pente γ de y_1 au temps θ_1 à y_0 au temps $\tau(y_0)$, d'où successivement :

$$\frac{y_0 - y_1}{\tau(y_0) - \theta_1} = \gamma$$

$$\theta_1 = \tau(y_0) - \frac{y_0 - y_1}{\gamma}$$

$$\theta_1 = \frac{y_0 - h_1}{\beta} + \frac{y_0 - h_1}{\gamma} - \frac{y_0 - y_1}{\gamma}$$

Éliminons θ_1 pour obtenir une relation entre y_1 et y_0 ne faisant intervenir que des données du problème ; pour cela égalons les deux expressions de θ_1 que nous avons obtenues ; d'où successivement :

$$nT + \frac{y_0 - y_1}{\alpha} = \frac{y_0 - h_1}{\beta} + \frac{y_0 - h_1}{\gamma} - \frac{y_0 - y_1}{\gamma}$$

$$-y_1 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right) = y_0 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) - nT - h_1 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$y_1 = \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}} y_0 + \frac{nT + h_1 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}}$$

que nous noterons $y_1 = f(y_0)$. On a bien sûr $y_2 = f(y_1)$ après le second cycle. Nos amis mathématiciens montre que l'on converge vers y_∞ solution de $y = f(y)$ (ici c'est une

équation du premier degré) pourvu que $|f'(y_\infty)|$ soit inférieur à l'unité, soit ici pourvu que :

$$\left| \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right| < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

soit

$$-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

La seconde inégalité est toujours vérifiée (α , β et γ sont positifs) et la seconde peut se reformuler ainsi :

$$\frac{1}{\beta} < \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

condition qu'il est aisé de vérifier. On n'oublie pas de se convaincre que si $y_{n+1} = y_n$ la synchronisation est réalisée.

• Synchronisation et résonance.

Un fois l'oscillation de relaxation synchronisée sur l'oscillateur harmonique, éventuellement amorti, qui l'excite, elle peut symétriquement jouer le rôle d'excitateur pour l'oscillateur harmonique et puisqu'il y a accord de fréquence provoquer une résonance de celui-ci, d'autant plus aiguë que le terme de frottement est faible.

Un exemple classique est celui d'un courant d'air arrivant sur un obstacle linéaire; de part et d'autre de celui-ci et alternativement se forment des tourbillons qui dans un premier temps restent accrochés à l'obstacle d'un seul côté, deviennent de plus en plus gros et finissent par s'en décrocher et s'en éloigner tandis que naît une autre tourbillon de l'autre côté. Ce phénomène relève de la relaxation. Si l'obstacle est tel qu'il puisse vibrer, alors la synchronisation-résonance peut apparaître et ce sera encore plus facile si l'obstacle a plusieurs modes de vibration, par exemple un fondamental et ses harmoniques (voir chapitre D-II).

C'est ainsi que chantent par grand vent les fils téléphoniques, un brin d'herbe tendu entre les pouces sur lequel on souffle, la flûte, tuyau résonnant, sur le biseau duquel on souffle (et qui passe à l'octave si l'on souffle plus fort); c'est ainsi aussi que s'est amorcée et amplifiée jusque la rupture la vibration de torsion du tablier du célèbre pont de Tacoma (il est aisé de se procurer le bout de film tourné à l'époque).

5 Oscillateurs couplés.

5.a Deux masses et trois ressorts.

- Mise en équation et résolution.

La figure 14 p. 37 montre deux masses m identiques accrochées par trois ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide l_0 entre un plancher et un plafond distants de $3L$. On repère la position des masses par leurs distances z_1 et z_2 du plafond sur un axe vertical descendant.

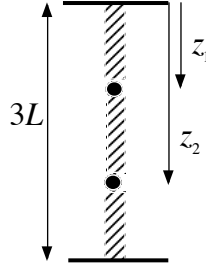


FIGURE 14 – Oscillateurs couplés.

Les longueurs respectives des trois ressorts sont z_1 , $z_2 - z_1$ et $3L - z_2$. A l'équilibre (indice « e ») on a donc :

$$\begin{cases} 0 = m g + k (z_{2e} - z_{1e} - l_0) - k (z_{1e} - l_0) \\ 0 = m g + k (3L - z_{2e} - l_0) - k (z_{2e} - z_{1e} - l_0) \end{cases}$$

d'où l'on tirerait aisément z_{1e} et z_{2e} si ce n'était pas inutile. Les équations du mouvement sont, en l'absence de frottement et en notant \ddot{z}_1 pour $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ et analogues :

$$\begin{cases} m \ddot{z}_1 = m g + k (z_2 - z_1 - l_0) - k (z_1 - l_0) \\ m \ddot{z}_2 = m g + k (3L - z_2 - l_0) - k (z_2 - z_1 - l_0) \end{cases}$$

Enfin en posant $z_1 = z_{1e} + \zeta_1$ et $z_2 = z_{2e} + \zeta_2$, on obtient par soustraction entre équations des deux systèmes :

$$\begin{cases} m \ddot{\zeta}_1 = k (\zeta_2 - \zeta_1) - k (\zeta_1) \\ m \ddot{\zeta}_2 = -k \zeta_2 - k (\zeta_2 - \zeta_1) \end{cases}$$

ou encore en posant $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (cf le problème avec une masse m et un ressort de raideur k)

$$\begin{cases} \ddot{\zeta}_1 = \omega_0^2 (-2\zeta_1 + \zeta_2) \\ \ddot{\zeta}_2 = \omega_0^2 (\zeta_1 - 2\zeta_2) \end{cases}$$

Dans ce cas hautement symétrique, une astuce permet d'éviter le passage par des méthodes sophistiquées. Par addition et soustraction, en posant $\zeta_s = \zeta_1 + \zeta_2$ et $\zeta_d = \zeta_1 - \zeta_2$, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{\zeta}_s = -\omega_0^2 \zeta_s \\ \ddot{\zeta}_d = -3\omega_0^2 \zeta_d \end{cases}$$

ce qui montre que ζ_s est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_0 et ζ_d est une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{3}$, dont on détermine les amplitudes et phases à l'origine du temps à partir des conditions initiales. On termine ensuite en retrouvant ζ_1 et ζ_2 par $\zeta_1 = \frac{1}{2}(\zeta_s + \zeta_d)$ et par $\zeta_2 = \frac{1}{2}(\zeta_s - \zeta_d)$

• Modes propres.

Le cas particulier où les conditions initiales rendent nulles ζ_d , où donc $\zeta_1 = \zeta_2$, s'appelle mode propre de pulsation ω_0 . On pouvait y penser sans calcul ; en effet si $\zeta_1 = \zeta_2$, le ressort central de longueur fixe ne joue plus aucun rôle et chacune des masses ne subit l'action que d'un seul ressort. On retrouve donc formellement le problème avec une masse et un ressort.

L'autre cas particulier où les conditions initiales rendent nulles ζ_s , où donc $\zeta_1 = -\zeta_2$, s'appelle mode propre de pulsation ω_1 . On pouvait y penser aussi ; en effet si $\zeta_1 = -\zeta_2$, le point milieu du ressort central est donc fixe et chacune des masses subit l'action un seul ressort de raideur k et d'un demi-ressort de raideur²⁷ $2k$. On retrouve donc formellement le problème avec une masse et un ressort de raideur $k + 2k = 3k$.

En pensant à la symétrie par rapport au point milieu ces deux modes s'appellent parfois respectivement *mode antisymétrique* et *mode symétrique*.

La solution la plus générale est bien sûr la combinaison linéaire de ces deux modes propres.

• Battements.

Pour fixer les idées, prenons comme conditions initiales celles-ci : $\dot{\zeta}_1(0) = \dot{\zeta}_2(0) = 0$, $\zeta_1(0) = 2a$ et $\zeta_2(0) = 0$; en passant par ζ_s et ζ_d , on arrive aisément à :

$$\begin{cases} \zeta_1 = a [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)] \\ \zeta_2 = a [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t)] \end{cases}$$

²⁷. A force égale, l'allongement du demi-ressort est deux fois plus petite donc la raideur deux fois plus grande.

On obtient les mouvements de la figure 15 p. 39 avec $\zeta_1(t)$ en noir et $\zeta_2(t)$ en bleu.

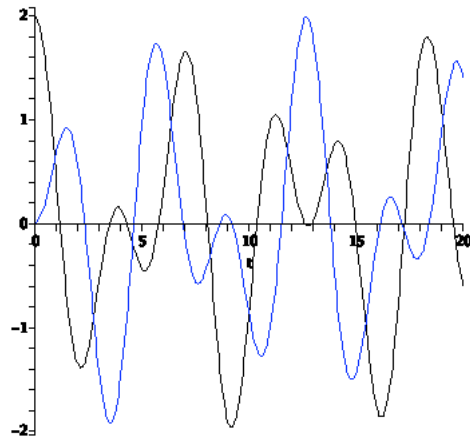


FIGURE 15 – Mouvement des deux masses.

Les résultats sont plus spectaculaires si l'on remplace le ressort central par un ressort de raideur plus faible, on parle alors de *couplage faible*. On ne refait pas tous les calculs, admettons-en le résultat : ω_1 n'est que légèrement plus grand que ω_0 . La figure 16 p. 39, avec $\zeta_1(t)$ en noir et $\zeta_2(t)$ en bleu, montre un phénomène de battements, classique pour toute somme ou différence de sinusôides de fréquences voisines.

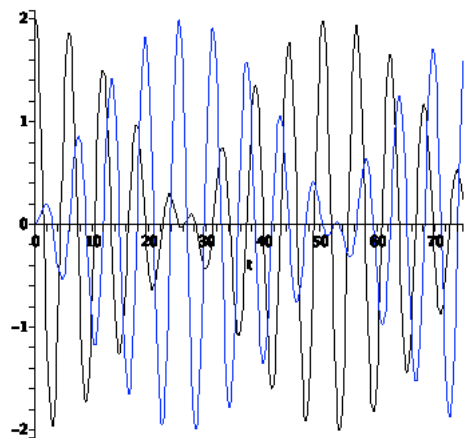


FIGURE 16 – Battements.

Il est, dans ce cas, plus parlant dans les expressions de $\zeta_1(t)$ et $\zeta_2(t)$ de transformer les sommes ou différences en produits d'un facteur de basse fréquence en $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ et d'un facteur de haute fréquence en $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$:

$$\begin{cases} \zeta_1 = a [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)] = 2 a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \\ \zeta_2 = a [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t)] = 2 a \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{cases}$$

Ainsi présenté, on comprend que $\zeta_1(t)$ et $\zeta_2(t)$ oscillent à grande fréquence chacune entre deux courbes-« enveloppes » de basse fréquence, respectivement $\pm 2 a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ et $\pm 2 a \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$, ce qui décrit bien la figure obtenue. On remarque donc un va et vient de l'énergie de système entre la masse 1 et la masse 2 entre des instants où l'une ne vibre presque plus et l'autre vibre au maximum.

• Influence des frottements.

Si l'on introduit des termes de frottement fluide dans les équations des mouvements des deux masses, respectivement en $-\lambda \dot{\zeta}_1$ et $-\lambda \dot{\zeta}_2$, la même méthode de résolution conduit pour ζ_s et ζ_d , en posant $\lambda = 2 \alpha \omega_0$ (cf supra), à

$$\begin{cases} \ddot{\zeta}_s + 2 \alpha \omega_0 \dot{\zeta}_s + \omega_0^2 \zeta_s = 0 \\ \ddot{\zeta}_d + 2 \alpha \omega_0 \dot{\zeta}_d + 3 \omega_0^2 \zeta_d = 0 \end{cases}$$

que l'on résout chacune comme pour un oscillateur unique amorti. Si, par exemple, α est assez petit, ζ_1 et ζ_2 seront cette fois combinaisons linéaires de solutions pseudo-périodiques, c'est-à-dire sinusoïdales amorties exponentiellement ; rien de bien sorcier.

5.b Généralisation à une chaîne de ressorts.

Si l'on reprend le problème avec n masses identiques et $(n+1)$ ressorts identiques entre deux supports fixes, on arrive avec la même méthode à :

$$\begin{cases} \ddot{\zeta}_1 = \omega_0^2(-2 \zeta_1 + \zeta_2) \\ \ddot{\zeta}_k = \omega_0^2(\zeta_{k-1} - 2 \zeta_k + \zeta_{k+1}) & \text{si } 1 < k < n \\ \ddot{\zeta}_n = \omega_0^2(\zeta_{n-1} - 2 \zeta_n) \end{cases}$$

soit encore matriciellement :

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

Par analogie avec le cas précédent, on recherche n modes propres pour lesquels tous les $\zeta_k(t)$ sont sinusoïdaux de même pulsation ω , d'où $\frac{d^2\zeta_k}{dt^2} = -\omega^2 \zeta_k$ d'où :

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

où l'on reconnaît un classique problème de recherche de valeurs propres d'une matrice ; les pulsations des modes propres sont celles qui annulent le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Nos amis mathématiciens y reconnaissent des polynômes liés à ceux de TCHEBYCHEV²⁸ et dont les racines sont les ω_p avec $1 \leq p \leq n$ tels que :

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} - 2 = 2 \cos \left(\frac{p \pi}{n+1} \right)$$

d'où l'on déduit aisément, avec un minimum de trigonométrie

$$\omega_p = 2 \omega_0 \cos \left(\frac{p \pi}{2(n+1)} \right)$$

On pense bien sûr à vérifier que le cas $n = 2$ redonne bien les résultats établis plus haut.

28. On appelle $P_n(X)$ le déterminant d'ordre n avec X (pour $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2$) sur la diagonale principale, 1 de part et d'autre et 0 partout ailleurs. En développant selon la première ligne on arrive à la relation de récurrence $P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$. Or le développement de $\sin(n\theta)$ (par la formule de Moivre et $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$) conduit à un produit de $\sin \theta$ par un polynôme de degré $(n-1)$ en $\cos \theta$ que nous considérerons plutôt comme un polynôme Q_{n-1} en $X = 2 \cos \theta$, soit $\sin(n\theta) = \sin \theta Q_{n-1}(2 \cos \theta)$. La formule de trigonométrie :

$$\sin[(n+3)\theta] + \sin[(n+1)\theta] = 2 \cos \theta \sin[(n+2)\theta]$$

prouve que $Q_{n+2} = X Q_{n+1} - Q_n$ soit la même relation de récurrence et l'on vérifie aisément l'identité $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_2$ d'où $P_n = Q_n$. Finalement les racines de $Q_n(2 \cos \theta)$ sont celles de $\sin[(n+1)\theta]$ (celles de $\sin \theta$ exclus) d'où l'on déduit ceux de P_n .

Pour chaque valeur de ω_p , le structure de la matrice est suffisamment simple pour trouver de proche en proche ζ_2 , ζ_3 , etc. à partir de ζ_1 , par exemple :

$$\omega_0^2 \zeta_2 - 2\omega_0^2 \zeta_1 = -\omega_p^2 \zeta_1$$

$$\omega_0^2 \zeta_3 - 2\omega_0^2 \zeta_2 + \omega_0^2 \zeta_1 = -\omega_p^2 \zeta_2$$

Le chapitre D-II donnera une approche plus rapide pour cette question.